

UNIVERZITET „VELJKO VLAHOVIĆ“ U TITOGRADU

Dr inž. Vlado Lubarda

OTPORNOST MATERIJALA

(UVOD U MEHANIKU DEFORMABILNOG TIJELA)

DRUGO IZDANJE

NIO „UNIVERZITETSKA RIJEČ“

Titograd, 1989.

Dr inž. Vlado Lubarda
OTPORNOST MATERIJALA
(Uvod u mehaniku deformabilnog tijela)

Recenzenti:

Dr inž. Vlatko Brčić,
redovni profesor Građevinskog fakulteta
Univerziteta u Beogradu

Dr inž. Miodrag Sekulović,
redovni profesor Građevinskog fakulteta
Univerziteta u Beogradu

Izdaje:
NIO „Univerzitetska riječ“ – Titograd
Univerzitet „Veljko Vlahović“ u Titogradu

Za izdavača:
Janko Brajković, direktor

Lektor i korektor:
Čedomir Mikić

Tehnička oprema i korice:
Slavko Milentijević
Dragomir Stojić

Tiraž: 1000 primjeraka

Štampa: IGRO „Vojvodina“, Beždan

Rješenjem Komisije za izdavačku djelatnost Univerziteta „Veljko Vlahović“ u Titogradu, broj 02/2—402—408/2 od 17.11.1987. god. ova knjiga odobrena je za štampanje kao stalni univerzitetski udžbenik.

SADRŽAJ

	Strana
Predgovor	9
Uvod	11

Dio I OPŠTA TEORIJA

1. ANALIZA NAPONA	15
1.1. Spoljašnje i unutrašnje sile	15
1.2. Vektor napona	16
1.3. Tenzor napona	20
1.4. Stav o konjugovanosti napona	22
1.5. Promjena komponenti tenzora napona pri rotaciji koordinatnog sistema	26
1.6. Glavni naponi	28
1.7. Maksimalni naponi smicanja	33
1.8. Mohrovi krugovi napona	36
1.9. Oktaedarski naponi	38
1.10. Sferni i devijatorski dio tenzora napona	38
1.11. Diferencijalne jednačine ravnoteže	40
1.12. Specijalne vrste naponskog stanja	42
1.12.1. Ravno stanje napona	42
1.12.2. Čisto smicanje	50
1.12.3. Linearano stanje napona	50
2. ANALIZA DEFORMACIJE	53
2.1. Pojam deformacije	53
2.2. Veza između pomjeranja i komponentalnih deformacija	55
2.3. Tenzor deformacije	58
2.4. Tenzor rotacije	61
2.5. Promjena komponenti tenzora deformacije pri rotaciji koordinatnog sistema	63
2.6. Glavne dilatacije	64
2.7. Maksimalna klizanja	65
2.8. Sferni i devijatorski dio tenzora deformacije	65
2.9. Jednačine kompatibilnosti	67
2.10. Određivanje pomjeranja pri zadatim komponentalnim deformacijama	69
2.11. Ravno stanje deformacije	72
3. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE	78
3.1. Uvodne napomene	78
3.2. Eksperimentalni podaci	80
3.2.1. Test istezanja	80
3.2.2. Uticaj temperature i vremena na ponašanje materijala	85
3.2.3. Testiranje materijala u uslovima kombinovanog napreznja	86

	Strana
3.3. Konstitutivne jednačine za materijal u uslovima malih elastičnih deformacija	87
3.3.1. Konstitutivne jednačine za izotropan materijal (Hookeov zakon)	87
3.3.2. Konstitutivne jednačine za anizotropan materijal	98
3.3.3. Linearne termoelastične jednačine	100
3.4. Konstitutivne jednačine za materijal u uslovima plastičnih deformacija	102
3.4.1. Uslov plastičnog tečenja	102
3.4.2. Formulacija konstitutivnih jednačina	105
3.5. Konstitutivne jednačine za materijal u uslovima viskoelastičnih deformacija	106
4. FORMULACIJA I RJEŠAVANJE PROBLEMA TEORIJE ELASTIČNOSTI	110
4.1. Rekapitulacija osnovnih jednačina	110
4.2. Formulacija problema teorije elastičnosti	112
4.3. Rješavanje problema teorije elastičnosti	112
4.4. Primjeri rješavanja problema teorije elastičnosti	115
4.4.1. Deformacija štapa usljed sopstvene težine	115
4.4.2. Laméov problem	117
5. DEFORMACIONI RAD	122
5.1. Pojam deformacionog rada	122
5.2. Izraz za deformacioni rad elastično deformisanog tijela	124
5.3. Teorema o minimumu potencijalne energije	127
5.4. Teorema o minimumu komplementarne energije	128
5.5. Bettiev stav o recipročnosti	130
5.5.1. Maxwellov stav o uzajamnosti pomjeranja	131
5.5.2. Castiglianovi stavovi	132
6. HIPOTEZE O SLOMU	134
6.1. Uvodne napomene	134
6.2. Hipoteze o slomu	135
6.2.1. Hipoteza najvećeg normalnog napona	135
6.2.2. Hipoteza najveće dilatacije	136
6.2.3. Hipoteza najvećeg smičućeg napona	136
6.2.4. Hipoteza najvećeg deformacionog rada na promjeni oblika	137
6.2.5. Mohrova hipoteza o slomu	138
6.3. Dozvoljeni napon i koeficijent sigurnosti	141
DIO II	
TEORIJA GREDE	
7. AKSIJALNO NAPREZANJE GREDE	145
7.1. Uvodne napomene o gredi	145
7.2. Izrazi za napon i deformaciju	145
7.3. Deformacioni rad kod aksijalnog naprezanja	148
7.4. Dimenzionisanje pri aksijalnom naprezanju	149
7.5. Dodatne napomene o aksijalnom naprezanju	149
8. ČISTO SAVIJANJE GREDE	165
8.1. Čisto pravo savijanje	165
8.1.1. Izrazi za napon i deformaciju	165
8.1.2. Deformacioni rad kod čistog pravog savijanja	168
8.1.3. Elementarna teorija čistog pravog savijanja	168
8.1.4. Dimenzionisanje pri čistom pravom savijanju	171
8.2. Čisto koso savijanje	180
8.2.1. Izrazi za napon i deformaciju	180
8.2.2. Deformacioni rad kod čistog kosog savijanja	183
8.2.3. Dimenzionisanje pri čistom kosom savijanju	184

	Strana
9. EKSCENTRIČNI PRITISAK GREDE	191
9.1. Kombinacija aksijalnog naprezanja i čistog savijanja grede	191
9.2. Izraz za napon ekscentrično pritisnute grede	192
9.3. Jezgro presjeka	195
9.4. Dimenzionisanje ekscentrično pritisnute grede	196
10. TORZIJA GREDE	201
10.1. Torzija grede proizvoljnog punog poprečnog presjeka	201
10.2. Torzija grede višestruko povezanog poprečnog presjeka	206
10.3. Torzija grede eliptičnog poprečnog presjeka	208
10.4. Elementarna teorija torzije grede kružnog poprečnog presjeka	211
10.5. Torzija grede prstenastog poprečnog presjeka	214
10.6. Membranska analogija	216
10.7. Torzija grede pravougaonog poprečnog presjeka	220
10.8. Torzija grede otvorenog tankozidnog profila	224
10.9. Torzija grede zatvorenog tankozidnog profila	228
10.10. Deformacioni rad pri torziji	229
10.11. Rješavanje problema torzije grede pomoću metode deformacionog rada	231
10.12. Dimenzionisanje grede pri torziji	233
10.13. Dodatne napomene o torziji	233
11. SAVIJANJE GREDE SILAMA	250
11.1. Savijanje grede proizvoljnog punog poprečnog presjeka	250
11.2. Savijanje grede višestruko povezanog poprečnog presjeka	255
11.3. Savijanje grede eliptičnog poprečnog presjeka	256
11.4. Savijanje grede kružnog poprečnog presjeka	259
11.5. Savijanje grede pravougaonog poprečnog presjeka	260
11.6. Savijanje grede kružnog prstenastog poprečnog presjeka	264
11.7. Elementarna teorija savijanja grede	266
11.8. Savijanje grede tankozidnog otvorenog profila	273
11.9. Savijanje grede tankozidnog zatvorenog profila	280
11.10. Glavni naponi kod grede savijene silama	284
11.11. Dimenzionisanje grede pri savijanju silama	286
11.12. Deformacioni rad pri savijanju grede silama	297
11.13. Elastična linija grede	298
11.13.1. Diferencijalna jednačina elastične linije	298
11.13.2. Određivanje ugiba i nagiba grede metodom superpozicije	304
11.13.3. Maxwell-Mohrova metoda fiktivnog nosača	305
11.13.4. Određivanje ugiba i nagiba grede promjenljivog poprečnog presjeka	308
11.13.5. Određivanje ugiba i nagiba grede metodama deformacionog rada	312
11.14. Statički neodređene grede	325
11.14.1. Određivanje nepoznatih reakcija metodom sila	325
11.14.2. Određivanje reakcija integracijom diferencijalne jednačine elastične linije	335
11.14.3. Kontinualne grede	338
11.14.4. Određivanje reakcija statički neodređenih problema metodama deformacionog rada	343
11.15. Savijanje krivog štapa	352
11.15.1. Čisto savijanje krivog štapa	352
11.15.2. Savijanje silama krivog štapa	356
12. KOMBINOVANO NAPREZANJE GREDE	360
12.1. Različite vrste kombinovanog naprezanja i određivanje napona i deformacije	360
12.2. Deformacioni rad i njegova primjena kod kombinovanog naprezanja	367
12.3. Dimenzionisanje pri kombinovanom naprezanju	369
12.4. Rješavanje statički neodređenih problema kombinovanog naprezanja	374
13. STABILNOST GREDE	384
13.1. Uvodne napomene	384
13.2. Uticaj aksijalne sile na ugib grede	385

13.2.1. Diferencijalne jednačine pritisnute savijene grede	386
13.2.2. Koncentrisana bočna sila na pritisnutoj gredi	388
13.2.3. Kontinualno opterećenje po pritisnutoj gredi	391
13.2.4. Savijanje spregovima pritisnute grede	392
13.2.5. Uticaj početne krivine na ponašanje pritisnute grede	394
13.3. Izvijanje grede	400
13.3.1. Osnovni Eulerovi slučajevi izvijanja	400
13.3.2. Slobodna dužina izvijanja	406
13.3.3. Dimenzionisanje prema izvijanju	406
13.3.4. Određivanje kritične sile izvijanja metodom potencijalne energije	409
13.3.5. Dodatne napomene o izvijanju	411
14. ELASTO-PLASTIČNA ANALIZA GREDE	423
14.1. Uvodne napomene	423
14.2. Elasto-plastična analiza aksijalno opterećenog nosača	424
14.3. Elasto-plastična analiza grede opterećene na torziju	426
14.4. Elasto-plastična analiza grede opterećene na savijanje	430
14.4.1. Elasto-plastično savijanje spregovima	430
14.4.2. Elasto-plastično savijanje silama	434
14.5. Dimenzionisanje prema graničnoj nosivosti	439
15. OGRANIČENA TORZIJA TANKOZIDNIH ŠTAPOVA OTVORENOG PROFILA	
15.1. Uvodne napomene - - - - -	450
15.2. Vitoperenje (krivljenje) poprečnog presjeka - - - - -	451
15.3. Izraz za uzdužno pomjeranje pri proizvoljnom naprezanju tankozidnog štapa - - - - -	453
15.4. Pretpostavke o komponentalnim naponima i presječne sile - - - - -	454
15.5. Veza između presječnih sila i spoljašnjeg opterećenja - - - - -	455
15.6. Izraz za normalni napon - - - - -	457
15.7. Izraz za smičući napon - - - - -	460
15.8. Diferencijalne jednačine tankozidnog štapa - - - - -	462
15.9. Specijalni slučajevi opterećenja - - - - -	464
15.9.1. Poprečno opterećenje - - - - -	464
15.9.2. Podužno opterećenje - - - - -	466
15.10. Primjeri - - - - -	468
DODATAK A: GEOMETRIJSKE OSOBINE RAVNIH POVRŠINA - - - - -	480
A.1. Težište ravne površine - - - - -	480
A.2. Momenti inercije ravne površine - - - - -	482
A.3. Promjena momenata inercije pri transformaciji koordinatnog sistema - - - - -	485
A.3.1. Translacija koordinatnog sistema - - - - -	485
A.3.2. Rotacija koordinatnog sistema - - - - -	487
A.4. Glavni moment inercije - - - - -	488
A.5. Mohrov krug inercije - - - - -	492
A.6. Elipsa inercije - - - - -	495
A.7. Sektorske karakteristike tankozidnih profila - - - - -	497
A.7.1. Sektorska koordinata - - - - -	497
A.7.2. Sektorski momenti - - - - -	498
A.7.3. Glavni pol. Normirana sektorska koordinata. Sektorski moment inercije - - - - -	499
DODATAK B: TABLICE UGIBA I NAGIBA - - - - -	509
DODATAK C: TABLICE STANDARDNIH PROFILA - - - - -	514
DODATAK D: ZADACI ZA VJEŽBU - - - - -	525
LITERATURA - - - - -	569
REGISTAR POJMOVA - - - - -	571

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik je namijenjen studentima tehničkih fakulteta, prvenstveno građevinske i mašinske struke, za predmet otpornost materijala. Udžbenik sadrži dva dijela: u prvom je data opšta teorija, a u drugom teorija grede, tj. primjena opšte teorije iz prvog dijela na analizu grednog nosača. Ovo predstavlja uvod u mehaniku deformabilnog tijela, izuzetno široku i tehnički važnu oblast mehanike, pa, pored ustaljenog naziva otpornost materijala, udžbenik nosi i takav naziv.

U dijelu I (Opšta teorija) razvijene su trodimenziona teorija napona, infinitezimalnih deformacija i konstitutivnih relacija, te formulisane opšte jednačine teorije elastičnosti. Takođe su uvedene metode deformacionog rada sa odgovarajućim teoremama korisnim za primjenu, da bi se na kraju formulisale i hipoteze o slomu, tj. plastičnom tečenju i lomu materijala.

U dijelu II (Teorija grede) analizira se gredni nosač u različitim uslovima naprezanja. Posmatra se, prvo, linearno naprezanje (koje obuhvata aksijalno naprezanje, čisto savijanje i ekscentrični pritisak), zatim torzija, savijanje silama i kombinovano naprezanje grede. Analizi se pristupa deduktivno polazeći od opštih jednačina teorije elastičnosti. Izvode se izrazi za napon, deformaciju i pomjeranja. Za određivanje pomjeranja i rješavanje statički neodređenih problema koriste se takođe i metode deformacionog rada, dok se dimenzionisanje vrši na bazi odgovarajuće hipoteze o slomu. Nakon toga, posmatra se fenomen nestabilnosti i izvijanje grednog nosača, te formuliše dimenzionisanje prema izvijanju. Na kraju se analizira elasto-plastična deformacija grednog nosača i uvodi dimenzionisanje prema graničnoj nosivosti, koje danas nalazi sve veću primjenu u inženjerskim konstrukcijama.

Dodatak A udžbenika je posvećen geometrijskim karakteristikama ravnih površina, prvenstveno momentima inercije ravnih površina, tj. poprečnih presjeka grede.

Teorijsko izlaganje u udžbeniku je praćeno nizom riješenih primjera koji su od izuzetnog značaja za shvatanje razvijene teorije i njenu primjenu, a često predstavljaju i dopunu određenih teorijskih postavki. Za potrebe rješavanja primjera udžbenik sadrži još dva dodatka: Tablice ugiba i nagiba i Tablice standardnih profila. Najzad, u Dodatku D su dati zadaci za vježbu koji su namijenjeni studentu za samostalnu izradu.

Autoru je prijatna dužnost da se ovom prilikom zahvali profesoru V. Brčiću na dragocjenim savjetima i recenziji udžbenika, profesoru M. Sekuloviću na recenziji, profesorima L. Vujoševiću i A. Vujoviću na podršci za izradu udžbenika i docentu Z. Čulafiću na čitanju rukopisa i korisnim zapažanjima i sugestijama.

Titograd, april 1984.

V. Lubarda

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

U drugom izdanju ovog udžbenika ispravljene su primijećene greške iz prvog izdanja i dodata nova, petnaesta glava: Ograničena torzija tankozidnih štapova otvorenog profila. Takođe je Dodatak A proširen odjeljkom: Sektorske karakteristike tankozidnih profila.

Koristim priliku da se zahvalim prof. dr M. Sekuloviću na recenziji dopunskog teksta, kao i izdavaču „Univerzitetska riječ“ i štampariji „Vojvodina Bezdán“ na trudu oko pripreme i štampanja ovog izdanja.

Titograd, oktobar 1987.g.

V. Lubarda

UVOD

Mehanika deformabilnog tijela je dio mehanike koji izučava ponašanje čvrstih tijela uzimajući u obzir njihovu deformabilnost. Fluidi, tj. tečnosti i gasovi, izučavaju se u posebnoj disciplini – mehanici fluida. Uključivanje deformabilnosti u analizu, tj. napuštanje modela krutog (nedeformabilnog) tijela uvedenog i korištenog u mehanici krutih tijela, je neophodno da bi se riješili ključni problemi inženjerske prakse kao što su određivanje izdržljivosti, fleksibilnosti i stabilnosti opterećenih konstruktivnih dijelova. U mehanici deformabilnog tijela zanemarujemo molekularnu (diskretnu) strukturu tijela, pa smatramo da je tijelo neprekidna sredina (kontinuum). Ovo omogućuje da se definiše napon u tački kao fundamentalna veličina i da se razvije teorija koja se u mnogim slučajevima sasvim dobro slaže sa eksperimentalnim podacima.

Mehanika deformabilnog tijela je izuzetno široka oblast. Ona obuhvata niz disciplina koje tretiraju različite aspekte problema. Teorija elastičnosti obrađuje probleme elastičnih deformacija, teorija viskoelastičnosti probleme viskoelastičnih deformacija, a teorija plastičnosti probleme plastičnih deformacija. Zavisno od intenziteta (veličine) deformacije, razvila se posebno teorija malih (infinitesimalnih), a posebno teorija velikih (konačnih) deformacija. Ukoliko je priroda opterećenja takva da se mogu zanemariti inercijalni efekti, riječ je o statički deformabilnog tijela, a ukoliko to nije slučaj, imamo dinamiku, tj. vibracije i prostiranje talasa u deformabilnom tijelu. Posebnu disciplinu predstavlja mehanika loma, koja tretira fenomen nastanka pukotine i lom opterećenog tijela. Termički efekti zahtijevaju poseban tretman, pa su se razvile, na primjer, termoelastičnost i termoplastičnost. Osim toga, zavisno od oblika i geometrije posmatranog tijela, govorimo o teoriji grede i teoriji ploča i ljuski, koje kao posebne discipline tretiraju važne tehničke probleme grednog nosača i površinskih nosača – ploča i ljuski.

Prema tome, mehanika deformabilnog tijela obuhvata čitav spektar problema. Njihovo rješavanje je, međutim, često izuzetno složeno i skopčano sa velikim teškoćama, kako mehaničko-fizičke, tako i matematičke prirode. Zato se ne mogu uvijek dobiti analitička rješenja, u vidu izvedenih formula i obrazaca, pa je neophodno koristiti razne eksperimentalne i numeričke metode. Od ovih posljednjih se danas naročito efikasno koristi metoda konačnih elemenata.

Ovaj udžbenik predstavlja samo uvod u mehaniku deformabilnog tijela. On sadrži teoriju napona i infinitesimalnih deformacija i teoriju grednog nosača sa primjenom na inženjerske probleme. Ostale pomenute discipline mehanike deformabilnog tijela izučavaju se u posebnim kursovima kao što su teorija elastičnosti, teorija viskoelastičnosti, teorija plastičnosti, teorija ploča i ljuski, mehanika loma, itd., uglavnom na postdiplomskim studijama.

Istorijat. – Mehanika deformabilnog tijela počela se razvijati u 17. vijeku radovima G. Galileia, R. Hookea i E. Mariottea, da bi svoj veliki napredak doživjela u 18. i 19. vijeku izvanrednim rezultatima u oblasti teorije elastičnosti, kada su

veliki matematičari i fizičari D. Bernoulli, L. Euler, L. Navier i C. Cauchy postavili osnovne jednačine teorije. Niz drugih istraživača s kraja 19. vijeka daju svoj veliki doprinos razvoju teorije elastičnosti: Lord Kelvin, Poisson, Lamé, Clapeyron, Green, Saint-Venant, Betti, Airy, Kirchhoff, Boussinesq i drugi. U 20. vijeku istraživanja se nastavljaju, pa Lord Rayleigh, Galerkin, Timoshenko, Muskhelishvili i drugi razvijaju nove metode rješavanja već formulisanih jednačina teorije elastičnosti.

Teorija neelastičnih deformacija, kao što su viskoelastične i plastične deformacije, počela se razvijati znatno kasnije. Tek u ovom vijeku postignuti su značajniji rezultati iz ove oblasti, ali je još uvijek ovaj dio mehanike deformabilnog tijela neuporedivo slabije razvijen od teorije elastičnosti. Istaknuti istraživači iz ove oblasti su Tresca, Huber, Von Mises, Hencky, Prandtl, Reuss, Nadai, Prager, kao i savremenici Rivlin, Hill, Lee, Noll, Il'yushin i drugi. Međutim, ovaj dio mehanike deformabilnog tijela je još uvijek nezadovoljavajuće razvijen, te zajedno sa mehanikom loma i drugim otvorenim problemima predstavlja pravo mjesto za koncentraciju napora budućih istraživanja.

DIO I

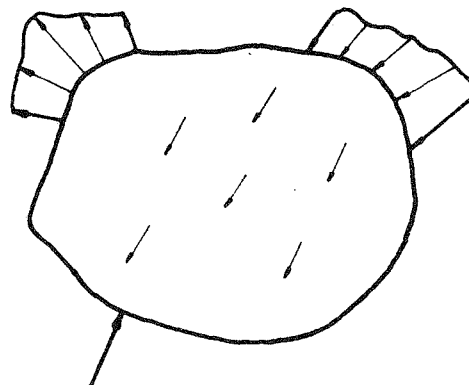
OPŠTA TEORIJA

1. ANALIZA NAPONA

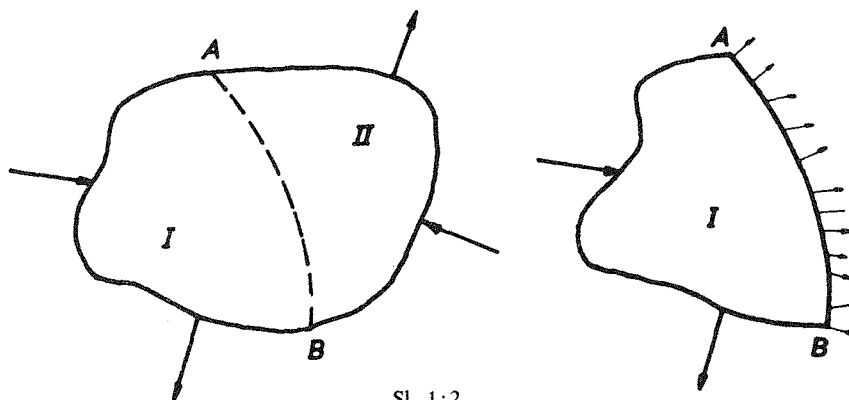
1.1. Spoljašnje i unutrašnje sile

Spoljašnje sile za posmatrano tijelo su sile kojima okolni svijet djeluje na to tijelo. One mogu biti površinske i zapreminske. Površinske sile su sile koje se prenose po spoljašnjoj površini tijela i posljedica su kontakta (dodira) drugog tijela kojim se ostvaruje dejstvo na posmatrano tijelo. Zapreminske sile su sile koje djeluju na sve tačke tijela, tj. unutar cijele njegove zapremine, i posljedica su dejstva na daljinu drugih tijela (na primjer, gravitacione, magnetne ili inercijalne sile). Površinske i zapreminske sile koje djeluju na uočeno tijelo šematski su prikazane na sl. 1:1.

Kao posljedica dejstva spoljašnjih sila, u tijelu (tj. između dijelova tijela) javljaju se unutrašnje sile. Po prirodi to su takođe površinske sile jer djeluju po zamišljenim površima unutar tijela. Na primjer, na sl. 1:2 prikazane su površinske sile koje djeluju po površi *AB* i koje predstavljaju dejstvo dijela *II* na dio *I* uočenog tijela.



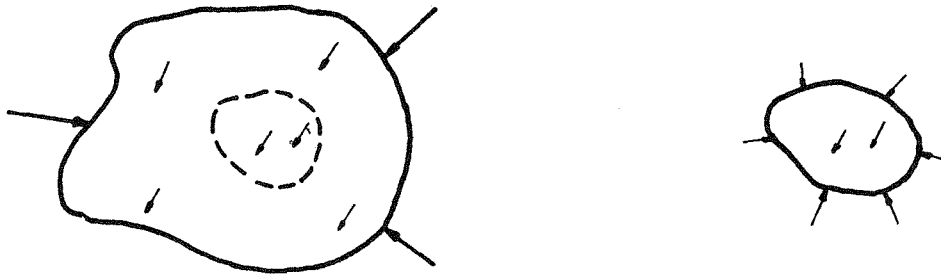
Sl. 1:1.



Sl. 1:2.

Po zakonu akcije i reakcije dio *I* djeluje na dio *II* silama istog intenziteta i pravca a suprotnog smjera.

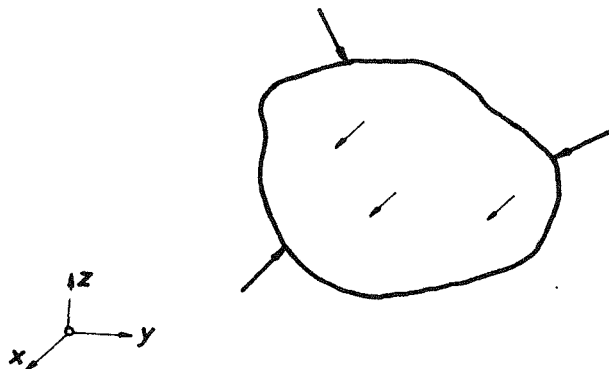
U mehanici krutog tijela formulisane su jednačine ravnoteže i kretanja krutog tijela opterećenog proizvoljnim sistemom sila. U mehanici deformabilnog tijela te iste jednačine važe u deformisanoj konfiguraciji tijela. Na primjer, za ravnotežu tijela potrebno je da u deformisanoj konfiguraciji glavni vektor i glavni moment svih spoljašnjih sila za proizvoljnu tačku budu jednaki nuli. Ako je cijelo tijelo u ravnoteži, onda je u ravnoteži i svaki njegov dio, pa prema tome moraju biti jednaki nuli glavni vektor i glavni moment sistema sila koje napadaju izdvojeni dio tijela. Sile koje napadaju izdvojeni dio tijela su spoljašnje sile koje su djelovale na taj dio i dok ga nismo izdvojili iz tijela, i površinske sile po omotaču dijela kojima zamjenjujemo djejestvo uklonjenog dijela tijela na izdvojeni dio (sl. 1:3). Ove površinske sile su unutrašnje sile za čitavo tijelo, ali su spoljašnje sile za izdvojeni dio tijela.



Sl. 1:3.

1.2. Vektor napona

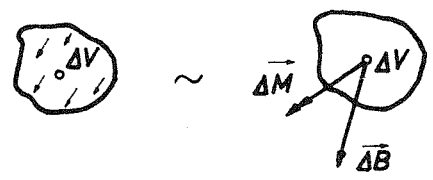
Posmatrajmo tijelo napadnuto sistemom spoljašnjih (površinskih i zapreminskih) sila (sl. 1:4).



Sl. 1:4.

Uočimo oko proizvoljne tačke jedan mali dio tijela zapremine ΔV . Zapreminske sile koje djeluju na ovaj dio mogu se redukovati u uočenoj tački na glavni vektor i glavni moment $\Delta \vec{B}$ i $\Delta \vec{M}$ (sl. 1:5).

Pretpostavljajući da postoje granične vrijednosti količnika $\frac{\Delta \vec{B}}{\Delta V}$ i $\frac{\Delta \vec{M}}{\Delta V}$, kada $\Delta V \rightarrow 0$, $\lim \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta V}$ je mala veličina za jedan red niža od veličine $\lim \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta V}$, pa uzimamo da je:

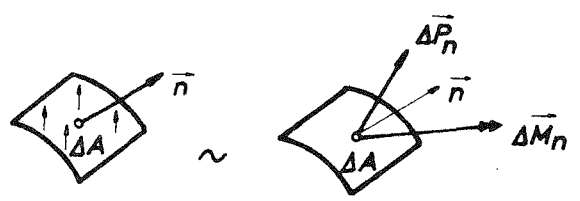


Sl. 1:5.

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta V} = \vec{b} \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta V} = 0.$$

Veličinu \vec{b} nazivamo specifična zapreminska sila ili zapreminska sila po jedinici zapremine. Ona zavisi od tačke u tijelu, tj. $\vec{b} = \vec{b}(x, y, z)$, gdje su x, y, z Descartesove pravougule koordinate koje definišu položaj tačke u prostoru.



Sl. 1:6.

Uočimo dalje u proizvoljnoj tački spoljne površine (omotača) tijela elementarni dio površine ΔA čija je normala u uočenoj tački \vec{n} . Spoljašnje površinske sile koje djeluju na ovaj dio površine mogu se redukovati u uočenoj tački na $\Delta \vec{P}_n$ i $\Delta \vec{M}_n$ (sl. 1:6).

I ovdje pretpostavljamo da je:

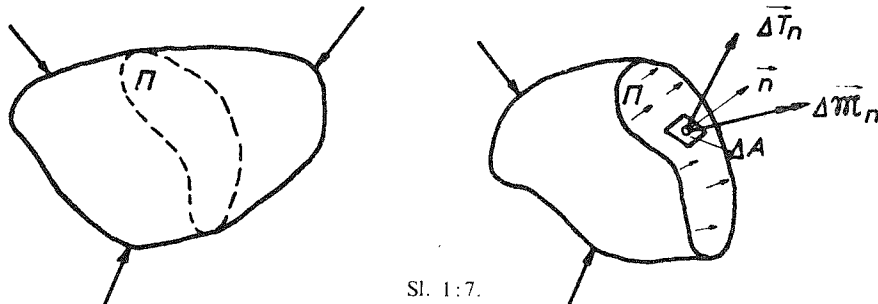
$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_n}{\Delta A} = \vec{p}_n \tag{2}$$

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}_n}{\Delta A} = 0.$$

Veličina \vec{p}_n je specifična površinska sila u uočenoj tački spoljne površine tijela čija je normala u tački \vec{n} . Vektor \vec{p}_n zavisi od tačke na omotaču tijela, tj. $\vec{p}_n = \vec{p}_n(x, y, z)$, gdje su x, y, z koordinate tačke omotača tijela.

Posmatrajmo sada unutrašnje sile koje se, kao rezultat djejtva spoljašnjih sila, javljaju između dijelova tijela, prenoseći se preko zamišljenih površi koje razdvajaju te dijelove. Uočimo u proizvoljnoj tački površi Π na sl. 1:7 elementarni

dio te površi ΔA sa normalom \vec{n} . Sile koje djeluju na površini ΔA mogu se redukovati u uočenoj tački na $\Delta \vec{T}_n$ i $\Delta \vec{M}_n$.

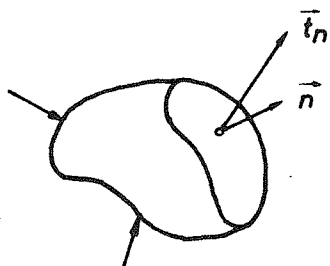


Sl. 1:7.

Iz istih razloga kao i prije, pretpostavićemo da je:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}_n}{\Delta A} = \vec{t}_n \quad \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}_n}{\Delta A} = 0. \quad (3)$$

Vektor \vec{t}_n je vektor specifične unutrašnje sile u datoj tački tijela u odnosu na površ kroz tu tačku čija je normala \vec{n} . Vektor \vec{t}_n naziva se vektor napona u tački za površ (ili presječnu ravan) čija je normala \vec{n} . Vektor napona u uočenoj tački je skiciran na sl. 1:8.



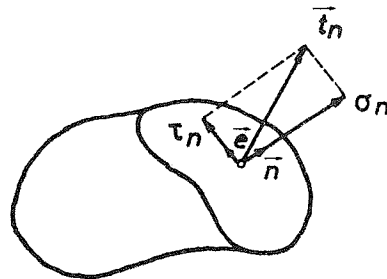
Sl. 1:8.

Fizički, vektor napona u tački predstavlja mjeru naprežanja (tj. silu po jedinici površine) u uočenoj tački i u odnosu na uočenu površ kroz tu tačku. Ako vektor napona razložimo na dvije komponente, jednu u pravcu normale \vec{n} i drugu tangентno, na površ (sl. 1:9), dobićemo

$$\vec{t}_n = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{e}. \quad (4)$$

Komponenta σ_n se zove normalni napon u tački za površ sa normalom \vec{n} , tj. to je komponenta vektora napona za površ sa normalom \vec{n} u pravcu normale \vec{n} . Komponenta τ_n se zove smičući (ili tangencijalni) napon u tački za površ sa normalom \vec{n} , tj. to je komponenta vektora napona za površ sa normalom \vec{n} u pravcu tangente na površ \vec{e} (sl. 1:9).

Fizički, normalni napon σ_n predstavlja mjeru istezanja ili pritiska u uočenoj tački po površi sa normalom \vec{n} , dok smičući napon τ_n predstavlja mjeru tangencijalnog naprežanja (smicanja) u uočenoj tački po površi sa normalom \vec{n} . Iz (4) vidimo da se komponente



Sl. 1:9.

vektora napona mogu dobiti skalarnim množenjem vektora napona sa ortovima normale, odnosno tangente na površ:

$$\sigma_n = \vec{t}_n \cdot \vec{n} \quad \tau_n = \vec{t}_n \cdot \vec{e}. \quad (5)$$

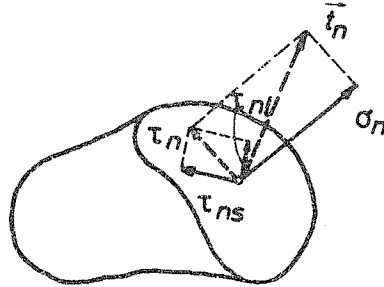
Smičući napon se obično razlaže u ravni svog dještva na dvije upravne komponente, u pravcima koordinatnih osa koje su postavljene u uočenoj tački (sl. 1:10), tako da je

$$\vec{\tau}_n \cdot \vec{e} = \tau_{ns} \vec{s} + \tau_{nl} \vec{l}. \quad (6)$$

Veličina τ_{ns} je komponenta smičućeg napona za ravan (površ) sa normalom \vec{n} u pravcu \vec{s} , a τ_{nl} je komponenta smičućeg napona za ravan sa normalom \vec{n} u pravcu \vec{l} .

Očigledno je iz zakona akcije i reakcije da je vektor napona za ravan sa normalom $-\vec{n}$ suprotan vektoru napona za ravan sa normalom \vec{n} , tj.

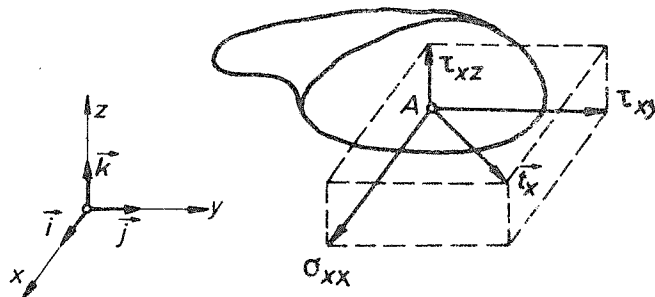
$$\vec{t}_{-\vec{n}} = -\vec{t}_n. \quad (7)$$



Sl. 1:10.

Vektor napona \vec{t}_n zavisi od tačke u tijelu, pa je $\vec{t}_n = t_n(x, y, z)$. Ako je $t_n(x, y, z) = \text{const.}$ svuda u tijelu, kažemo da je stanje napona u tijelu homogeno. U budućće ćemo pretpostavljati da je $t_n(x, y, z)$ neprekidna funkcija svojih koordinata, tako da se u svakoj maloj okolini uočene tačke vektor napona \vec{t}_n malo mijenja. Tada se može pretpostaviti da je u maloj okolini tačke $\vec{t}_n = \text{const.}$, tj. u maloj okolini tačke stanje napona je uvijek homogeno. Ovo se zove pretpostavka o homogenosti stanja napona u okolini tačke.

Međutim, za datu tačku vektor napona suštinski zavisi od presječne površi kroz tu tačku, tj. normale \vec{n} . Za različite presječne ravni kroz datu tačku imamo različite vektore napona za tu tačku, tj. $\vec{t}_n \neq \vec{t}_m$. Na primjer, posmatrajmo kroz tačku A presječnu ravan sa normalom u pravcu x ose ($\vec{n} = \vec{i}$), tj. presječnu ravan paralelnu koordinatnoj ravni yz (sl. 1:11). Vektor napona za ovu ravan označavaćemo sa \vec{t}_x .



Sl. 1:11.

Razlažući vektor napona \vec{t}_x na koordinatne pravce x, y, z, dobijamo

$$\vec{t}_x = \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}. \quad (8)$$

Za komponente vektora napona u (8) koristimo sljedeću terminologiju: σ_{xx} je x komponenta vektora napona za površ sa normalom u x pravcu (ili normalni napon u x pravcu); τ_{xy} je y komponenta vektora napona za površ sa normalom u x pravcu (ili smičući napon u y pravcu za površ sa normalom u x pravcu); τ_{xz} je z komponenta vektora napona za površ sa normalom u x pravcu (ili smičući napon u z pravcu za površ sa normalom u x pravcu).

Fizički σ_{xx} predstavlja mjeru normalnog naprezanja u uočenoj tački u x pravcu, a τ_{xy} i τ_{xz} su mjere tangencijalnog (smičućeg) naprezanja u y i z pravcu po površi sa normalom u x pravcu.

Analogno se dobija postavljajući kroz tačku A presječne ravni paralelne sa preostale dvije koordinatne ravni da je:

$$\vec{t}_y = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \quad (9)$$

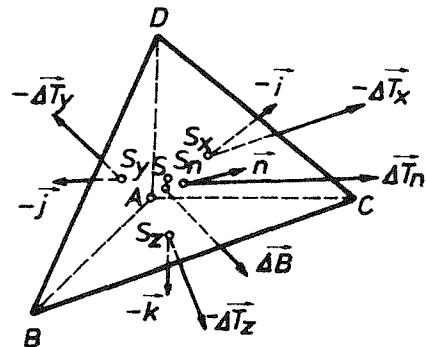
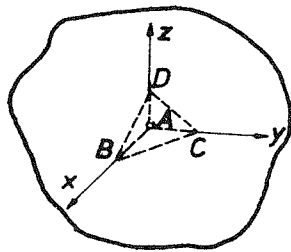
$$\vec{t}_z = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k}. \quad (10)$$

Dakle, u istoj tački za različite presječne ravni dobijamo različite vektore napona. Kako se kroz svaku tačku može postaviti beskonačno mnogo presječnih ravni, postojaće za svaku tačku beskonačno mnogo vektora napona. Kažemo da znamo stanje napona u tački ako znamo vektore napona za svaku presječnu ravan kroz tu tačku. Kako tih vektora ima beskonačno mnogo, poznavati stanje napona u tački značilo bi poznavanje beskonačno velikog broja podataka. Zato se postavlja pitanje da li postoji veza između vektora napona za različite presječni ravni, tj. da li postoji konačan (ograničen) broj podataka sa kojim u potpunosti određujemo stanje napona u tački. Odgovor na ovo pitanje je potvrđan. U narednom poglavlju pokazaćemo da je dovoljno poznavati vektore napona za samo tri međusobno upravne presječne ravni, jer pomoću njih možemo odrediti vektor napona za bilo koju drugu presječnu ravan kroz datu tačku.

Napomena: Umjesto oznake τ za komponentalne smičuće napone u (8), (9) i (10) često se koristi oznaka σ , tako da, na primjer, umjesto τ_{xy} pišemo σ_{xy} , itd. Ovakvu notaciju koristićemo u daljem izlaganju. (Takođe se umjesto oznaka σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} često prosto piše σ_x , σ_y , σ_z).

1.3. Tenzor napona

Neka je A proizvoljna tačka opterećenog tijela i pretpostavimo da znamo vektore napona u toj tački u odnosu na tri koordinatne ravni: xz , yz i zx . Da bismo odredili vektor napona za proizvoljnu ravan kroz tačku A , posmatrajmo njoj paralelnu ravan BCD na malom rastojanju Δh od tačke A , tako da ova ravan zajedno sa koordinatnim ravnima isijeca iz tijela mali tetraedar $ABCD$ (sl. 1:12).



Sl. 1:12.

Pošto smo izdvojili elementarno mali tetraedar, po pretpostavci o homogenosti napona u maloj okolini možemo zanemariti promjenu vektora napona duž svake od strana tetraedra, tj. uzeti da su sile na stranama jednake vektor napona puta površina strane (na primjer, sila na strani BCD je $\Delta\vec{T}_n = \vec{t}_n \cdot \Delta BCD$). Dakle, neka su $-\Delta\vec{T}_x$, $-\Delta\vec{T}_y$ i $-\Delta\vec{T}_z$ rezultujuće sile koje se prenose preko koordinatnih ravni od odbačenog dijela tijela na uočeni tetraedar, i neka je $\Delta\vec{T}_n$ rezultujuća sila kojom odbačeni dio tijela djeluje na tetraedar preko ravni BCD sa normalom \vec{n} . Neka je, najzad, $\Delta\vec{B}$ rezultujuća zapreminska sila koja djeluje na tetraedar. Površinske sile $-\Delta\vec{T}_x$, $-\Delta\vec{T}_y$, $-\Delta\vec{T}_z$ i $\Delta\vec{T}_n$ djeluju u težištima strana tetraedra, a zapreminska sila $\Delta\vec{B}$ u težištu tetraedra. Pod djelstvom ovih sila tetraedar mora biti u ravnoteži, ukoliko je i čitavo tijelo u ravnoteži, pa glavni vektor i glavni moment definisanog sistema sila moraju biti jednaki nuli. Iz uslova da je glavni vektor jednak nuli imamo

$$\Delta\vec{T}_n - \Delta\vec{T}_x - \Delta\vec{T}_y - \Delta\vec{T}_z + \Delta\vec{B} = 0, \quad (1)$$

odnosno

$$\vec{t}_n \cdot \Delta BCD - \vec{t}_x \cdot \Delta ACD - \vec{t}_y \cdot \Delta ABD - \vec{t}_z \cdot \Delta ABC + \vec{b} \cdot \frac{1}{3} \Delta BCD \cdot \Delta h = 0. \quad (2)$$

Neka je vektor normale $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$, tada je očigledno $\Delta ACD = \Delta BCD \cdot n_x$, $\Delta ABD = \Delta BCD \cdot n_y$ i $\Delta ABC = \Delta BCD \cdot n_z$, pa dijeleći (2) sa ΔBCD , dobijamo u limitu kada $\Delta h \rightarrow 0$ (tj. kada tetraedar postaje sve manji i manji, a ravan BCD se sve više primiče paralelnoj ravni kroz tačku A)

$$\vec{t}_n = n_x \vec{t}_x + n_y \vec{t}_y + n_z \vec{t}_z. \quad (3)$$

Relacija (3) predstavlja traženu vezu pomoću koje možemo odrediti vektor napona u datoj tački u odnosu na proizvoljnu presječnu ravan sa normalom \vec{n} ako znamo vektore napona u toj tački za tri upravne ravni, \vec{t}_x , \vec{t}_y i \vec{t}_z . Relacija (3) se naziva Cauchyeva relacija.

S obzirom da su vektori napona određeni sa po tri skalarna podatka, tj.:

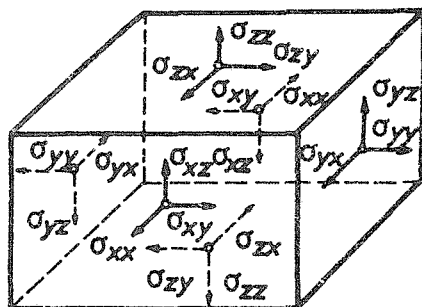
$$\begin{aligned} \vec{t}_x &= \{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}\} \\ \vec{t}_y &= \{\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}\} \\ \vec{t}_z &= \{\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}\}, \end{aligned} \quad (4)$$

zaključujemo da je stanje napona u tački potpuno određeno poznavanjem devet skalarnih podataka u toj tački: tri normalna napona σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} i šest smičućih napona σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zx} i σ_{zy} . Ovih devet podataka zapisujemo u obliku kvadratne matrice

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

koju nazivamo tenzor napona u datoj tački. Kažemo, dakle, da poznajemo stanje napona u tački ako znamo tenzor napona u toj tački, tj. ako znamo devet komponenti tenzora napona u toj tački.

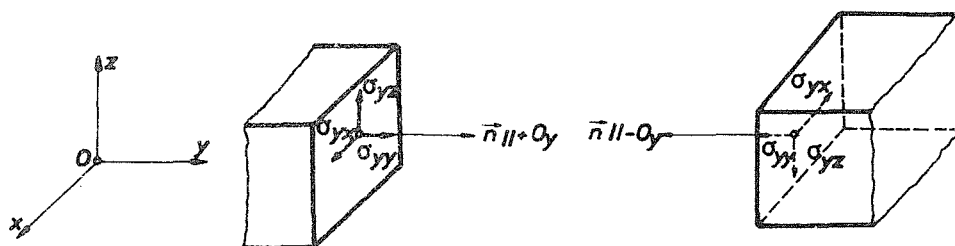
Komponente tenzora napona mogu se simbolički prikazati kao na sl. 1:13.



Sl. 1:13.

Pri tome se usvaja konvencija o znaku komponenti napona: na površi sa smjerom spoljne normale u pozitivnom smjeru koordinatne ose, pozitivni komponentalni naponi djeluju u pozitivnom smjeru koordinatnih osa; na površi sa smjerom spoljne normale u negativnom smjeru koordinatne ose, pozitivni komponentalni naponi djeluju u negativnom smjeru koordinatnih osa (sl. 1:14).

U narednom poglavlju pokazacemo da devet podataka koji obrazuju tenzor napona u tački nisu svi nezavisni i da postoji samo šest međusobno različitih (nezavisnih) komponenti tenzora napona.



Sl. 1:14.

1.4. Stav o konjugovanosti napona

Posmatrajmo ponovo tetraedar izdvojen iz napregnutog tijela (sl. 1:12). Na njega djeluju površinske sile $-\Delta\vec{T}_x$, $-\Delta\vec{T}_y$, $-\Delta\vec{T}_z$ i $\Delta\vec{T}_n$ u težištima korespondentnih strana tetraedra, S_x , S_y , S_z i S_n , i zapreminska sila $\Delta\vec{B}$ koja djeluje u težištu tetraedra S_0 . (S obzirom na hipotezu o homogenosti stanja napona u maloj okolini, sile koje djeluju po strani tetraedra su jednake i paralelne, pa se njihovom redukcijom na težište strane dobija samo glavni vektor, dok je glavni moment za svaku stranu tetraedra jednak nuli. Isto važi i za zapreminske sile redukcijom na težište tetraedra). Iz uslova ravnoteže tetraedra da je glavni vektor svih sila koje napadaju tetraedar jednak nuli, dobili smo Cauchyevu relaciju (1.3:3). Za ravnotežu je još potrebno i da je glavni moment definisanog sistema sila jednak nuli. Za redukcionu tačku izaberimo tačku S_n . Tada je

$$\vec{M}_R^{S_n} = \vec{S}_n \vec{S}_x \times (-\Delta\vec{T}_x) + \vec{S}_n \vec{S}_y \times (-\Delta\vec{T}_y) + \vec{S}_n \vec{S}_z \times (-\Delta\vec{T}_z) + \vec{S}_n \vec{S}_0 \times \Delta\vec{B} = 0. \quad (1)$$

No, $\vec{AS}_x = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AD})$, $\vec{AS}_y = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD})$, $\vec{AS}_z = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$, $\vec{AS}_n = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$, pa je $\vec{S}_n \vec{S}_x = -\frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{S}_n \vec{S}_y = -\frac{1}{3}\vec{AC}$, $\vec{S}_n \vec{S}_z = -\frac{1}{3}\vec{AD}$, što

zamjenom u (1) daje

$$\frac{1}{3}\vec{AB} \times \Delta\vec{T}_x + \frac{1}{3}\vec{AC} \times \Delta\vec{T}_y + \frac{1}{3}\vec{AD} \times \Delta\vec{T}_z + \vec{S}_n \vec{S}_0 \times \Delta\vec{B} = 0,$$

tj.

$$\frac{1}{3}\vec{AB} \times \vec{t}_x \cdot \Delta ACD + \frac{1}{3}\vec{AC} \times \vec{t}_y \cdot \Delta ABD + \frac{1}{3}\vec{AD} \times \vec{t}_z \cdot \Delta ABC + \vec{S}_n \vec{S}_0 \times \vec{b} \cdot \Delta V = 0. \quad (2)$$

No, sa smanjivanjem tetraedra ($\Delta h \rightarrow 0$), zapreminska sila ($\vec{b} \cdot \Delta V$) smanjuje se za jedan red brže od površinskih sila ($\vec{t} \cdot \Delta A$), pa se može zanemariti u izrazu (2), tako da imamo

$$\frac{1}{3}(\vec{AB} \times \vec{t}_x) \cdot \Delta ACD + \frac{1}{3}(\vec{AC} \times \vec{t}_y) \cdot \Delta ABD + \frac{1}{3}(\vec{AD} \times \vec{t}_z) \cdot \Delta ABC = 0. \quad (3)$$

Množenjem izraza (3) skalarno sa vektorom \vec{AD} dobijamo

$$\frac{1}{3}\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{t}_x) \cdot \Delta ACD + \frac{1}{3}\vec{AD} \cdot (\vec{AC} \times \vec{t}_y) \cdot \Delta ABD = 0, \quad (4)$$

što u stvari predstavlja uslov ravnoteže da je moment svih sila oko z ose jednak nuli. Iz (4) dalje slijedi cikličnom permutacijom mješovitih vektorskih proizvoda

$$\vec{t}_x \cdot (\vec{AD} \times \vec{AB}) \cdot \Delta ACD + \vec{t}_y \cdot (\vec{AD} \times \vec{AC}) \cdot \Delta ABD = 0,$$

odakle, s obzirom da je $\vec{AD} \times \vec{AB} = 2\Delta ABD \cdot \vec{j}$ i $\vec{AD} \times \vec{AC} = 2\Delta ACD \cdot (-\vec{i})$, dobijamo

$$\vec{t}_x \cdot \vec{j} = \vec{t}_y \cdot \vec{i}. \quad (5)$$

Odavde, imajući u vidu izraze (1.3:4), sada slijedi

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad (6)$$

tj. u datoj tački je y komponenta smičućeg napona u ravni čija je normala u pravcu x ose, jednaka x komponenti smičućeg napona u ravni čija je normala u pravcu y ose.

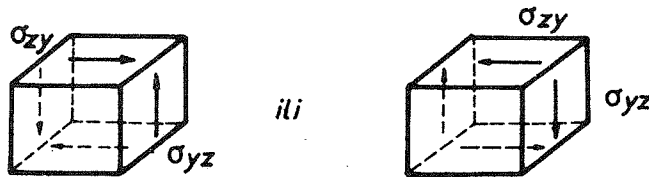
Iz uslova ravnoteže da su momenti svih sila koje napadaju tetraedar oko x i y ose jednaki nuli (koji se dobijaju množeći (3) skalarno sa \vec{AB} i \vec{AC}), analogno slijede još dvije jednakosti:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (7)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz}. \quad (8)$$

Prema tome, iz uslova ravnoteže da je glavni moment sistema sila koje napadaju tetraedar na sl. 1:12 jednak nuli, slijedi da šest komponenti smičućeg napona u datoj tački nisu nezavisne, već su to samo tri od njih, s obzirom da važe tri jednakosti (6), (7) i (8). Jednakosti (6), (7) i (8) predstavljaju tzv. stav o konjugovanosti smičućih napona: u dvjema međusobno upravnim ravnima, komponente

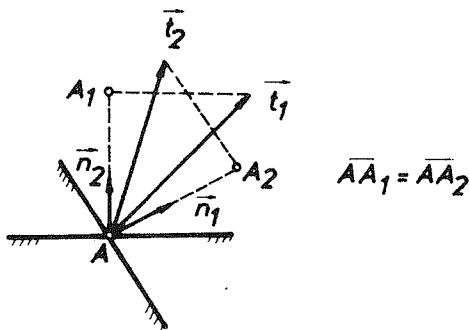
smičućeg napona koje su upravne na presječnu pravu tih ravni, jednake su po veličini, a obje imaju smjer ili ka presječnoj pravoj ili od nje. Ovo je skicirano za komponente σ_{zy} i σ_{yz} na sl. 1:15.



Sl. 1:15.

Zaključujemo, dakle, da je za poznavanje naponskog stanja u tački dovoljno poznavati samo šest veličina: σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$. To znači da je tenzor napona (1.3:5) simetričan u odnosu na glavnu dijagonalu i da je samo šest njegovih komponenti međusobno nezavisno.

Stav o konjugovanosti smičućih napona može se lako uopštiti na stav o konjugovanosti napona: u bilo kojoj tački napregnutog tijela projekcija vektora napona za ravan sa normalom \vec{n}_1 na pravac \vec{n}_2 jednaka je po veličini i po znaku projekciji vektora napona za ravan sa normalom \vec{n}_2 na pravac \vec{n}_1 (sl. 1:16), tj.



Sl. 1:16.

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{t}_1 = \vec{n}_1 \cdot \vec{t}_2. \quad (9)$$

U specijalnom slučaju, kada je $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, tj. kada su ravni upravne, stav o konjugovanosti napona svodi se na stav o konjugovanosti smičućih napona.

Primjer 1.1. U datoj tački tijela tenzor napona u odnosu na x, y, z ose glasi

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 36 & 27 & 0 \\ 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} (\text{MPa}), \quad \left(1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right).$$

Naći:

- vektor napona u odnosu na ravan sa normalom $\vec{n} = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, n_z > 0 \right\}$,
- intenzitet tog vektora napona,

- c) normalni i smičući napon u toj ravni,
 d) ugao između vektora napona i normale na ravan.

Rješenje:

a) Kako je $|\vec{n}|=1$, mora biti $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + n_z^2 = 1$, odakle je $n_z = \frac{1}{3}$. Prema tome,

vektor normale na ravan je $\vec{n} = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$. Vektor napona u ravni sa normalom \vec{n} je saglasno Cauchyvoj relaciji (1.3:3)

$$\vec{t}_n = \frac{2}{3} \cdot \{36, 27, 0\} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \{27, -36, 0\} + \frac{1}{3} \cdot \{0, 0, 18\} = \{6, 42, 6\}.$$

b) Intenzitet vektora napona je

$$|\vec{t}_n| = \sqrt{6^2 + 42^2 + 6^2} = 42,85 \text{ MPa}.$$

c) Normalni napon možemo odrediti koristeći relaciju (1.2:5)

$$\sigma_n = \vec{t}_n \cdot \vec{n} = \{6, 42, 6\} \cdot \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\} = -22 \text{ MPa}.$$

Dobijeni znak „-“ znači da je u pitanju napon pritiska.
 Smičući napon u posmatranoj ravni je

$$\tau_n = \sqrt{t_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{42,85^2 - 22^2} = 36,77 \text{ MPa}.$$

d) Ugao između \vec{t}_n i \vec{n} dobićemo iz izraza za skalarni proizvod dva vektora:

$$\cos \sphericalangle (\vec{t}_n, \vec{n}) = \frac{\vec{t}_n \cdot \vec{n}}{|\vec{t}_n| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-22}{42,85 \cdot 1} = -0,5134,$$

$$\sphericalangle (\vec{t}_n, \vec{n}) = 120,89^\circ.$$

Primjer 1.2. U datoj tački tijela tenzor napona je

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa})$$

s tim što je komponenta napona σ_{xx} nepoznata. Odrediti σ_{xx} iz uslova da postoji ravan kroz datu tačku tijela za koju je vektor napona jednak nuli (nenapregnuta ravan). Odrediti takođe normalu \vec{n} te ravni.

Rješenje:

Iz uslova zadatka je

$$\vec{t}_n = n_x \cdot \{\sigma_{xx}, 2, 1\} + n_y \cdot \{2, 0, 2\} + n_z \cdot \{1, 2, 0\} = 0,$$

što daje sistem jednačina:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} \cdot n_x + 2 \cdot n_y + 1 \cdot n_z &= 0 \\ 2 \cdot n_x + 0 \cdot n_y + 2 \cdot n_z &= 0 \\ 1 \cdot n_x + 2 \cdot n_y + 0 \cdot n_z &= 0.\end{aligned}\tag{a}$$

Ovaj homogeni sistem jednačina po n_x , n_y i n_z imaće netrivialno rješenje ako mu je determinanta sistema jednaka nuli, tj. ako je

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

odakle dobijamo

$$\sigma_{xx} = 2 \quad (\text{MPa}).$$

Da bismo odredili normalu nenapregnute ravni, vraćamo se sa nađenom vrijednošću $\sigma_{xx} = 2$ u sistem jednačina (a):

$$\begin{aligned}2n_x + 2n_y + n_z &= 0 \\ 2n_x + 0 \cdot n_y + 2n_z &= 0 \\ n_x + 2n_y + 0 \cdot n_z &= 0.\end{aligned}\tag{a'}$$

Neka je $n_x = a$, tada iz sistema (a') slijedi da je $n_y = -\frac{1}{2}a$, $n_z = -a$.

Veličinu a dobićemo iz uslova $|\vec{n}| = 1$, tj. iz

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = a^2 + \left(-\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2 = 1,$$

odakle je $a = \pm \frac{2}{3}$. Prema tome je:

$$\vec{n}_1 = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\}, \quad \vec{n}_2 = \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}.$$

Očigledno, $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$, tj. \vec{n}_1 i \vec{n}_2 definišu jednu istu ravan, samo su u pitanju njena spoljašnja i unutrašnja normala.

1.5. Promjena komponenti tenzora napona pri rotaciji koordinatnog sistema

Kao što smo vidjeli, za poznavanje naponskog stanja u tački dovoljno je znati vektore napona t_x , t_y i t_z u odnosu na ravni čije su normale x , y i z osa koordinatnog sistema (x, y, z) , tj. poznavati tenzor napona

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix};\tag{1}$$

koji je, ovdje, očigledno napisan u odnosu na koordinatni sistem (x, y, z) . Međutim, za drugi koordinatni sistem tenzor napona izgleda drugačije. Zato se postavlja pitanje kako se mijenjaju komponente tenzora napona pri rotaciji koordinatnog sistema. Dakle, neka je koordinatni sistem (x, y, z) zarotiran (transformisan) u novi

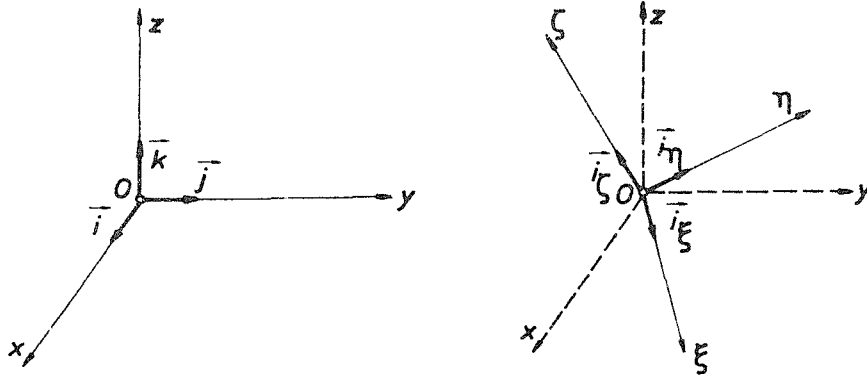
koordinatni sistem (ξ, η, ζ) (sl. 1:17), tako da su jedinični vektori novih osa definisani u odnosu na stari koordinatni sistem sa $\vec{i}_\xi = (\cos \alpha_\xi, \cos \beta_\xi, \cos \gamma_\xi)$, $\vec{i}_\eta = (\cos \alpha_\eta, \cos \beta_\eta, \cos \gamma_\eta)$, $\vec{i}_\zeta = (\cos \alpha_\zeta, \cos \beta_\zeta, \cos \gamma_\zeta)$.

U odnosu na koordinatni sistem (ξ, η, ζ) , tenzor napona je formiran od vektora napona:

$$\vec{t}_\xi = \{\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\xi\eta}, \sigma_{\xi\zeta}\}, \quad \vec{t}_\eta = \{\sigma_{\eta\xi}, \sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\eta\zeta}\}, \quad \vec{t}_\zeta = \{\sigma_{\zeta\xi}, \sigma_{\zeta\eta}, \sigma_{\zeta\zeta}\}$$

i glasi

$$[\sigma]' = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}. \quad (2)$$



Sl. 1:17.

Nadimo vèze između komponenti tenzora $[\sigma]$ i $[\sigma]'$. Vektor napona \vec{t}_ξ može biti napisan, koristeći Cauchyevu relaciju (1.3:3), u obliku

$$\vec{t}_\xi = \cos \alpha_\xi \vec{t}_x + \cos \beta_\xi \vec{t}_y + \cos \gamma_\xi \vec{t}_z, \quad (3)$$

odakle je, s obzirom na (1.3:4),

$$\vec{t}_\xi = \{ \cos \alpha_\xi \sigma_{xx} + \cos \beta_\xi \sigma_{yx} + \cos \gamma_\xi \sigma_{zx}, \cos \alpha_\xi \sigma_{xy} + \cos \beta_\xi \sigma_{yy} + \cos \gamma_\xi \sigma_{zy}, \cos \alpha_\xi \sigma_{xz} + \cos \beta_\xi \sigma_{yz} + \cos \gamma_\xi \sigma_{zz} \}. \quad (4)$$

Komponentu napona $\sigma_{\xi\xi}$ dobijamo iz (4) skalarnim množenjem sa ortom \vec{i}_ξ

$$\sigma_{\xi\xi} = \vec{t}_\xi \cdot \vec{i}_\xi = (\cos^2 \alpha_\xi) \sigma_{xx} + (\cos^2 \beta_\xi) \sigma_{yy} + (\cos^2 \gamma_\xi) \sigma_{zz} + (2 \cos \alpha_\xi \cos \beta_\xi) \sigma_{xy} + (2 \cos \alpha_\xi \cos \gamma_\xi) \sigma_{xz} + (2 \cos \beta_\xi \cos \gamma_\xi) \sigma_{yz}. \quad (5)$$

Analogno je

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\eta} = \vec{t}_\xi \cdot \vec{i}_\eta = & (\cos \alpha_\xi \cos \alpha_\eta) \sigma_{xx} + (\cos \beta_\xi \cos \beta_\eta) \sigma_{yy} + (\cos \gamma_\xi \cos \gamma_\eta) \sigma_{zz} + \\ & + (\cos \beta_\xi \cos \alpha_\eta + \cos \alpha_\xi \cos \beta_\eta) \sigma_{xy} + (\cos \gamma_\xi \cos \alpha_\eta + \cos \alpha_\xi \cos \gamma_\eta) \sigma_{xz} + \\ & + (\cos \gamma_\xi \cos \beta_\eta + \cos \beta_\xi \cos \gamma_\eta) \sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Na isti način se dobijaju ostale komponente tenzora napona u novom koordinatnom sistemu, izražene preko komponenti u starom koordinatnom sistemu:

$$\sigma_{\xi\xi} = \vec{t}_\xi \cdot \vec{i}_\xi, \quad \sigma_{\eta\eta} = \vec{t}_\eta \cdot \vec{i}_\eta, \quad \sigma_{\zeta\zeta} = \vec{t}_\zeta \cdot \vec{i}_\zeta, \quad \text{itd.} \quad (7)$$

Dobijeni rezultati pokazuju da se komponente tenzora napona mijenjaju pri rotaciji koordinatnog sistema saglasno sljedećoj matricnoj operaciji

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_\xi & \cos \beta_\xi & \cos \gamma_\xi \\ \cos \alpha_\eta & \cos \beta_\eta & \cos \gamma_\eta \\ \cos \alpha_\zeta & \cos \beta_\zeta & \cos \gamma_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_\xi & \cos \alpha_\eta & \cos \alpha_\zeta \\ \cos \beta_\xi & \cos \beta_\eta & \cos \beta_\zeta \\ \cos \gamma_\xi & \cos \gamma_\eta & \cos \gamma_\zeta \end{bmatrix}, \quad (8)$$

tj. saglasno pravilu

$$[\sigma]' = [A] \cdot [\sigma] \cdot [A]^T, \quad (9)$$

gdje je $[A]$ matrica transformacije (rotacije) koordinatnog sistema, a $[A]^T$ njoj transponovana matrica, kao što se vidi iz (8).

Kad god se kvadratna matrica transformiše pri rotaciji koordinatnog sistema saglasno pravilu (9), kažemo da predstavlja tenzor drugog reda. Prema tome, napon je zaista tenzor drugog reda.

1.6. Glavni naponi

Kako je za različite ravni kroz datu tačku (tj. različite normale \vec{n}) različit i vektor napona \vec{t}_n , to je i komponenta normalnog napona (ili kratko, normalni napon) različita za različite ravni kroz datu tačku. Zato se nameće pitanje u odnosu na koju ravan kroz datu tačku je normalni napon ekstreman i kolika je ta ekstremna vrijednost. Da bismo došli do odgovora na ovo pitanje, polazimo od izraza

$$\sigma_n = \vec{t}_n \cdot \vec{n}, \quad (1)$$

koji, zbog Cauchyve relacije (1.3:3), postaje

$$\sigma_n = (n_x \vec{t}_x + n_y \vec{t}_y + n_z \vec{t}_z) \cdot \vec{n}, \quad (2)$$

gdje je $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ vektor normale izražen u koordinatnom sistemu (x, y, z) . Za poznate vrijednosti vektora napona \vec{t}_x, \vec{t}_y i \vec{t}_z , očigledno je iz (2) da je $\sigma_n = \sigma_n(n_x, n_y, n_z)$.

Da bismo odredili ekstremnu vrijednost za normalni napon σ_n , pri čemu je

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \quad (3)$$

potražimo slobodni ekstremum funkcije

$$\Phi = \sigma_n - \sigma \cdot (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1), \quad (4)$$

gdje je σ Lagrangeov množitelj veze. Uslov ekstremuma funkcije Φ je:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_z} = 0, \quad (5)$$

što, zajedno sa jednačinom (3), daje četiri jednačine sa četiri nepoznate n_x , n_y , n_z i σ . Lako je pokazati da jednačine (5) u razvijenom obliku glase:

$$\begin{aligned} 2\vec{n} \cdot \vec{t}_x - 2\sigma n_x &= 0 \\ 2\vec{n} \cdot \vec{t}_y - 2\sigma n_y &= 0 \\ 2\vec{n} \cdot \vec{t}_z - 2\sigma n_z &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{t}_x &= \sigma n_x \\ \vec{n} \cdot \vec{t}_y &= \sigma n_y \\ \vec{n} \cdot \vec{t}_z &= \sigma n_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Množenjem prve jednačine iz (6) sa \vec{i} , druge sa \vec{j} i treće sa \vec{k} , i sabiranjem, dobijamo

$$(\vec{n} \cdot \vec{t}_x) \cdot \vec{i} + (\vec{n} \cdot \vec{t}_y) \cdot \vec{j} + (\vec{n} \cdot \vec{t}_z) \cdot \vec{k} = \sigma \vec{n}. \quad (7)$$

No, zbog stava o konjugovanosti napona (1.4:9) imamo:

$$\vec{n} \cdot \vec{t}_x = \vec{i} \cdot \vec{t}_n, \quad \vec{n} \cdot \vec{t}_y = \vec{j} \cdot \vec{t}_n, \quad \vec{n} \cdot \vec{t}_z = \vec{k} \cdot \vec{t}_n, \quad (8)$$

što zamjenom u (7) daje

$$t_{nx} \vec{i} + t_{ny} \vec{j} + t_{nz} \vec{k} = \sigma \vec{n},$$

tj.

$$\vec{t}_n = \sigma \vec{n}. \quad (9)$$

Ovo pokazuje da u ravni za koju je normalni napon ekstreman nema komponenti smičućeg napona, tj. vektor napona za tu ravan je u pravcu normale na ravan. Dakle, u toj ravni postoji samo normalni napon $\sigma_n \equiv \sigma$, dok je smičući napon jednak nuli. Odredimo sada veličinu ovog (ekstremnog) normalnog napona. Iz (9) je

$$n_x \vec{t}_x + n_y \vec{t}_y + n_z \vec{t}_z - \sigma \vec{n} = 0.$$

tj.

$$\begin{aligned} \{n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{yx} + n_z \sigma_{zx} - \sigma n_x, n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{zy} - \sigma n_y, \\ n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz} - \sigma n_z\} = 0, \end{aligned}$$

što daje tri jednačine:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma) n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z &= 0 \\ \sigma_{xy} n_x + (\sigma_{yy} - \sigma) n_y + \sigma_{zy} n_z &= 0 \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + (\sigma_{zz} - \sigma) n_z &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Da bi ovaj homogeni sistem imao netrivialno rješenje, determinanta sistema mora biti jednaka nuli

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

što daje kubnu jednačinu za σ

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0, \quad (12)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ J_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \\ &\quad + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \\ &\quad - \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Kubna jednačina (12) daje tri realna rješenja za σ , tj. tri ekstremne vrijednosti normalnog napona. Za svako od ovih rješenja σ_i ($i=1, 2, 3$) sada možemo odrediti korespondentni vektor normale \vec{n}_i rješavanjem sistema:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma_i) n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z &= 0 \\ \sigma_{xy} n_x + (\sigma_{yy} - \sigma_i) n_y + \sigma_{zy} n_z &= 0 \\ \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + (\sigma_{zz} - \sigma_i) n_z &= 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1, \end{aligned} \quad (14)$$

gdje se, zbog linearne zavisnosti, uzimaju samo dvije nezavisne od prve tri jednačine sistema (14).

Dakle, za svako σ_i možemo odrediti korespondentni pravac \vec{n}_i ($i=1, 2, 3$). Ovi pravci zovu se glavni pravci napona. Korespondentni ekstremni naponi zovu se glavni naponi. Dakle:

$$\vec{t}_{n_1} = \sigma_1 \vec{n}_1, \quad \vec{t}_{n_2} = \sigma_2 \vec{n}_2, \quad \vec{t}_{n_3} = \sigma_3 \vec{n}_3. \quad (15)$$

S obzirom da glavni naponi imaju svoje definisano fizičko značenje, oni ne zavise od izbora koordinatnog sistema. Dakle, pri rotaciji koordinatnog sistema ne mijenjaju se ni σ_i ni \vec{n}_i , pa zaključujemo da koeficijenti u kubnoj jednačini (12) za σ moraju biti konstantni (nezavisni od koordinatnog sistema), tj.:

$$J_1 = \text{const.}, \quad J_2 = \text{const.}, \quad J_3 = \text{const.} \quad (16)$$

J_1, J_2 i J_3 zovu se, redom, prva, druga i treća invarijanta tenzora napona.

Vratimo se sada glavnim pravcima definisanim sa \vec{n}_1, \vec{n}_2 i \vec{n}_3 . Množenjem prve dvije jednačine u (15) sa \vec{n}_2 i \vec{n}_1 , respektivno, imamo:

$$\begin{aligned} \vec{t}_{n_1} \cdot \vec{n}_2 &= \sigma_1 (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) \\ \vec{t}_{n_2} \cdot \vec{n}_1 &= \sigma_2 (\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1). \end{aligned} \quad (17)$$

Ne, zbog konjugovanosti napona je $\vec{t}_{n_1} \cdot \vec{n}_2 = \vec{t}_{n_2} \cdot \vec{n}_1$, pa iz (17) slijedi

$$(\sigma_1 - \sigma_2) (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = 0. \quad (18)$$

Oдавде je evidentno ako je $\sigma_1 \neq \sigma_2$, mora biti $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, što znači da su pravci \vec{n}_1 i \vec{n}_2 međusobno upravni. Analogno slijedi i za \vec{n}_3 , tj. ako je $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, tada su sva tri pravca \vec{n}_1 , \vec{n}_2 i \vec{n}_3 međusobno upravna. Ako je, pak, $\sigma_1 = \sigma_2$, tada \vec{n}_1 i \vec{n}_2 mogu biti bilo koji pravci u ravni normalnoj na \vec{n}_3 . Najzad, ako je $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, svaki pravac je glavni pravac, a za naponsko stanje se kaže da je hidrostatičko (sferno).

Na kraju napominjemo, ako se za koordinatne ose uzmu ose koje se poklapaju sa glavnim pravcima napona, tenzor napona glasi

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

No i dalje je potrebno poznavati šest podataka za poznavanje naponskog stanja u tački, jer je pored tri napona σ_1 , σ_2 i σ_3 , potrebno znati i tri ugla koji definišu položaj glavnih pravaca.

Pr i mjer 1.3. Odrediti glavne napone i glavne pravce u tački tijela u kojoj je stanje napona definisano tenzorom napona

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -6 \\ -6 & -6 & -15 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa}).$$

Rješenje:

Glavne napone dobijamo kao rješenje kubne jednačine (1.6:12)

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0,$$

gdje su:

$$J_1 = 2 + 2 - 15 = -11$$

$$J_2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-15) + (-15) \cdot 2 - 4^2 - (-6)^2 - (-6)^2 = -144$$

$$J_3 = 2 \cdot 2 \cdot (-15) + 2 \cdot 4 \cdot (-6) \cdot (-6) - 2 \cdot (-6)^2 - 2 \cdot (-6)^2 - (-15) \cdot 4^2 = 324.$$

Dakle, kubna jednačina glasi

$$\sigma^3 + 11\sigma^2 - 144\sigma - 324 = 0.$$

Njena rješenja su glavni naponi: $\sigma_1 = 9$, $\sigma_2 = -2$, $\sigma_3 = -18$ (MPa).

Nadimo sada korespondentne glavne pravce. Odredimo prvo \vec{n}_1 . Njegove komponente dobićemo iz sistema jednačina (1.6:14), koji u ovom slučaju glasi:

$$\begin{aligned} (2-9)n_x + 4n_y - 6n_z &= 0 \\ 4n_x + (2-9)n_y - 6n_z &= 0 \\ -6n_x - 6n_y + (-15-9)n_z &= 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1, \end{aligned} \quad (a)$$

pri čemu su od prve tri jednačine ovog sistema samo dvije međusobno nezavisne. Dakle, iz prve dvije jednačine imamo:

$$4n_y - 6n_z = 7n_x$$

$$7n_y + 6n_z = 4n_x,$$

odakle je $n_y = n_x, n_z = -\frac{1}{2}n_x$. Zamjenom ovog u četvrtu jednačinu sistema (a), nalazimo da

je $n_x = 2/3$, pa je glavni pravac \vec{n}_1 definisan sa $\vec{n}_1 = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right\}$. Analogno se dobijaju

ostala dva glavna pravca: $\vec{n}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$ i $\vec{n}_3 = \left\{ \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}} \right\}$.

Primjer 1.4. Dat je tenzor napona u odnosu na x, y, z ose sa

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa}).$$

- Postaviti kubnu jednačinu za glavne napone.
- Direktno odrediti jedan od glavnih napona i njegov pravac.
- Naći ostala dva glavna napona i korespondentne glavne pravce.

Rješenje:

$$\text{a) } \sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0$$

Zamjenom vrijednosti za komponente tenzora napona u izraze (1.6:13) dobijamo: $J_1 = -3, J_2 = -18, J_3 = -14$, pa kubna jednačina za glavne napone glasi

$$\sigma^3 + 3\sigma^2 - 18\sigma + 14 = 0. \quad (\text{a})$$

b) Pošto je $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$, zaključujemo da je ravan sa normalom $\vec{n}_2 = \vec{k}$ slobodna od smičućih napona, pa je $n_2 = \{0, 0, 1\}$ jedan glavni pravac, a $\sigma_2 = \sigma_{zz} = 1$ MPa korespondentni glavni napon.

c) Preostala dva glavna napona dobijamo iz kubne jednačine (a) kao što slijedi:

$$\sigma^3 + 3\sigma^2 - 18\sigma + 14 = (\sigma - 1)(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) = 0,$$

$$\text{odakle je: } \sigma_1 = -2 + 3\sqrt{2}, \sigma_2 = -2 - 3\sqrt{2} \quad (\text{MPa}).$$

Korespondentne glavne pravce nalazimo na isti način kao i u primjeru 1.3. Dobijamo:

$$\vec{n}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, -\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, 0 \right\}, \quad \vec{n}_3 = \left\{ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, 0 \right\}.$$

Napomena: Notacija glavnih napona i pravaca izvršena je tako da je $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

1.7. Maksimalni naponi smicanja

U prethodnom poglavlju odredili smo glavne pravce napona u datoj tački i korespondentne glavne pravce $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Pretpostavimo opšti slučaj kada je $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ i numerišimo glavne pravce tako da je $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. S obzirom da je $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, glavni pravci obrazuju ortogonalan trijedrar. Izaberimo ga za koordinatni sistem u datoj tački (sl. 1:18). Pronaći ćemo sada u kojoj ravni kroz datu tačku djeluje ekstremni napon smicanja i kolika je ta ekstremna vrijednost. Označimo ortove koordinatnih osa (1, 2, 3) sa $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Proizvoljna ravan kroz tačku A definisana je vektorom normale $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3 = \{n_1, n_2, n_3\}$. Vektor napona za tu ravan je

$$\vec{t}_n = n_1 \vec{t}_1 + n_2 \vec{t}_2 + n_3 \vec{t}_3, \quad (1)$$

gdje su:

$$\vec{t}_1 = \{\sigma_1, 0, 0\}, \quad \vec{t}_2 = \{0, \sigma_2, 0\}, \quad \vec{t}_3 = \{0, 0, \sigma_3\} \quad (2)$$

vektori napona za koordinatne ravni, koje pretpostavljamo poznatim.

Zamjenom (2) u (1) dobijamo

$$\vec{t}_n = \{n_1 \sigma_1, n_2 \sigma_2, n_3 \sigma_3\}, \quad (3)$$

odakle je

$$t_n^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2 + n_3^2 \sigma_3^2. \quad (4)$$

Normalni napon za ravan sa normalom \vec{n} je

$$\sigma_n = \vec{t}_n \cdot \vec{n} = n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3, \quad (5)$$

pa je kvadrat smičućeg napona u uočenoj ravni

$$\tau_n^2 = t_n^2 - \sigma_n^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2 + n_3^2 \sigma_3^2 - (n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3)^2. \quad (6)$$

Da bismo našli ekstremnu vrijednost za $\tau_n = \tau_n(n_1, n_2, n_3)$, pri čemu je

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (7)$$

potražimo slobodni ekstremum funkcije

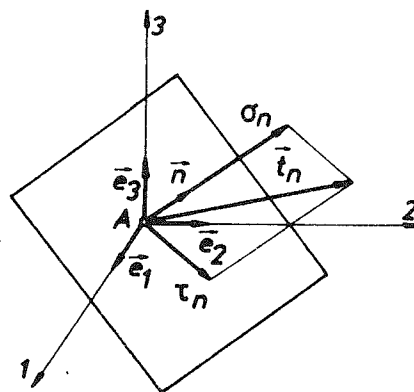
$$F = \tau_n^2 - \lambda \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1), \quad (8)$$

gdje je λ Lagrangeov množitelj veze. Uslov ekstremuma funkcije F je:

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial n_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial n_3} = 0, \quad (9)$$

što u razvijenom obliku daje:

$$\begin{aligned} n_1 [\sigma_1^2 - 2\sigma_1 (n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3) - \lambda] &= 0 \\ n_2 [\sigma_2^2 - 2\sigma_2 (n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3) - \lambda] &= 0 \\ n_3 [\sigma_3^2 - 2\sigma_3 (n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3) - \lambda] &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$



Sl. 1:18.

Ove tri jednačine, zajedno sa jednačinom (7), daju četiri jednačine sa četiri nepoznate n_1, n_2, n_3 i λ . Može se pokazati da su ove četiri jednačine zadovoljene u šest slučajeva, tj. u šest ravni čije su normale redom:

$$\vec{n} = \{0, 0, \pm 1\}, \quad \vec{n} = \{0, \pm 1, 0\}, \quad \vec{n} = \{\pm 1, 0, 0\}$$

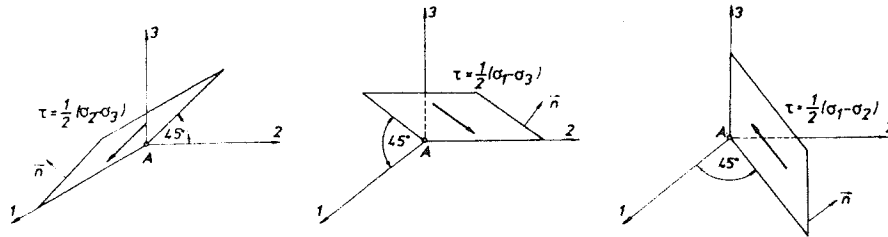
$$\vec{n} = \left\{0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \quad \vec{n} = \left\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \quad \vec{n} = \left\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right\}. \quad (11)$$

Korespondentne ekstremne vrijednosti smičućeg napona su respektivno:

$$\tau = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau = 0$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (12)$$

Prva tri slučaja odgovaraju minimalnim vrijednostima smičućeg napona: u glavnim ravnima smičući napon je nula. Preostala tri slučaja definišu maksimalne vrijednosti smičućeg napona: oni djeluju u ravnima koje polove uglove između dva glavna pravca napona (sl. 1:19).



Sl. 1:19.

Smičući napon τ mora imati naznačeni pravac na sl. 1:19, inače bi zbog konjugovanosti postojao smičući napon u glavnim ravnima, a njega tamo nema.

S obzirom da je $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, apsolutni maksimum smičućeg napona je

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (13)$$

i djeluje u ravni sa normalom

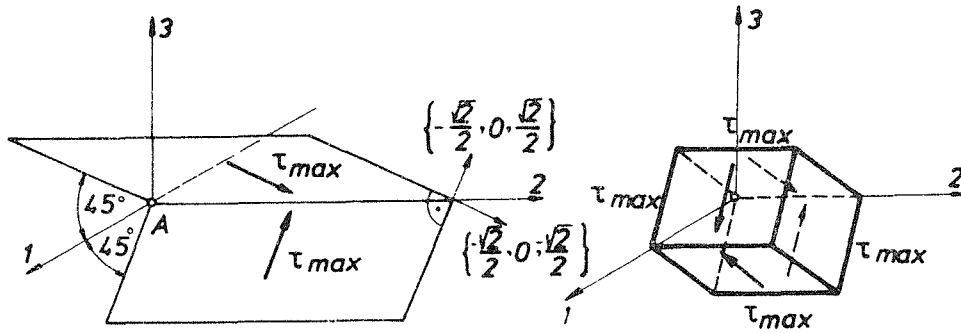
$$\vec{n} = \left\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Dakle, maksimalni smičući napon jednak je polovini razlike između najvećeg i najmanjeg glavnog napona i djeluje u ravni koja polovi ugao između pravaca najvećeg i najmanjeg glavnog napona.

Korespondentni normalni napon u toj ravni je

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (14)$$

Napomena: U izrazima za normalu (11) figuriše znak „±“, tj. uvijek su dvije međusobno upravne ravni kroz datu tačku gdje je smičući napon ekstreman (sl. 1:20), s obzirom na stav o konjugovanosti smičućeg napona.



Sl. 1:20.

Primjer 1.5. Neka je tenzor napona u tački

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -50 & -10 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa}).$$

Određiti glavne napone, glavne pravce i maksimalni smičući napon u toj tački.

Rješenje:

Glavne napone dobijamo iz:

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0$$

$$J_1 = -30, \quad J_2 = -1000, \quad J_3 = -6000$$

$$\sigma^3 + 30\sigma^2 - 1000\sigma + 6000 = 0$$

$$\sigma_2 = 10: \sigma^3 + 30\sigma^2 - 1000\sigma + 6000 = (\sigma - 10)(\sigma^2 + 40\sigma - 600) = 0,$$

pa je: $\sigma_1 = -20 + 10\sqrt{10}$, $\sigma_3 = -20 - 10\sqrt{10}$ (MPa).

Korespondentne glavne pravce nalazimo kao i u primjeru 1.3. Dobijamo:

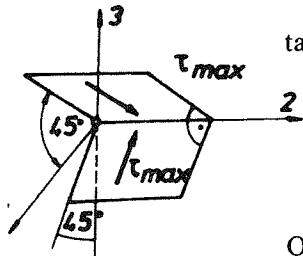
$$\vec{n}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2(10+3\sqrt{10})}}, -\frac{3+\sqrt{10}}{\sqrt{2(10+3\sqrt{10})}}, 0 \right\},$$

$$\vec{n}_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2(10-3\sqrt{10})}}, \frac{-3+\sqrt{10}}{\sqrt{2(10-3\sqrt{10})}}, 0 \right\}.$$

Maksimalni smičući napon je

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{(-20 + 10\sqrt{10}) - (-20 - 10\sqrt{10})}{2} = 10\sqrt{10} \quad (\text{MPa}).$$

Ravni u kojima djeluje τ_{\max} prikazane su na sl. P 1.5.



Sl. P 1.5.

Primjer 1.6. Odrediti maksimalni smičući napon u tački u kojoj je tenzor napona

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -6 \\ -6 & -6 & -15 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa}).$$

Odrediti takođe normalni napon u ravni maksimalnog smičućeg napona.

Rješenje:

U primjeru 1.3. našli smo glavne napone za ovo naponsko stanje: $\sigma_1 = 9$, $\sigma_2 = -2$, $\sigma_3 = -18$. Prema tome je

$$\tau_{\max} = \frac{9 - (-18)}{2} = \frac{27}{2} \quad (\text{MPa}).$$

Korespondentni normalni napon je

$$\sigma_n = \frac{9 + (-18)}{2} = -\frac{9}{2} \quad (\text{MPa}).$$

1.8. Mohrovi krugovi napona

Rezultati dobijeni u prethodnom poglavlju mogu biti ilustrovani preko tzv. Mohrovih krugova napona. Rješavanjem sistema jednačina:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 &= \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 &= \sigma_n \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

po n_1^2 , n_2^2 , n_3^2 dobijamo:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

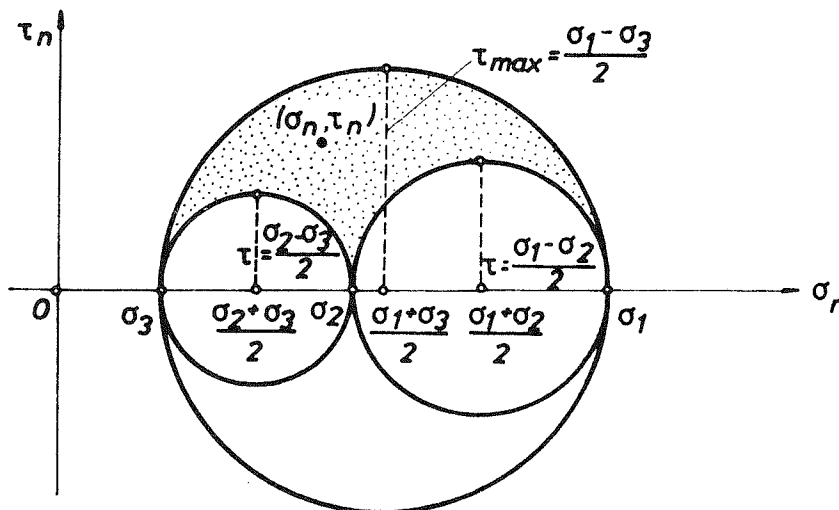
Kako smo pretpostavili da je $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, i s obzirom da je $n_i^2 > 0$ za svako i , iz izraza (2) slijedi da mora biti:

$$\begin{aligned} \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) &\geq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) &\leq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) &\geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

ili, prepisano u malo drugačijem obliku:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &\geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &\leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &\geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Ove tri nejednačine definišu oblast ograničenu kružnicama na sl. 1:21.



Sl. 1:21.

Koordinate (σ_n, τ_n) tačaka u šrafiranoj oblasti predstavljaju normalni, odnosno smičući napon za ravan sa odgovarajućom normalom n . (S obzirom da je τ_n definisano kao intenzitet smičućeg napona, uvijek je pozitivno, pa je dovoljno posmatrati samo gornju, šrafiranu polovinu površine na sl. 1:21). Ordinate tjemena tri Mohrove kružnice evidentno predstavljaju maksimalne smičuće napone. Apolutni maksimum je

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (5)$$

a korespondentni normalni napon

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (6)$$

Zamjenom ovih vrijednosti u izraze (2) za normalu, nalazimo:

$$n_1^2 = \frac{1}{2}, \quad n_2^2 = 0, \quad n_3^2 = \frac{1}{2}, \quad (7)$$

što definiše vektor normale $\vec{n} = \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

Na kraju napominjemo, ako je $\sigma_2 = \sigma_3$, postojeće beskonačno mnogo ravnii u kojima je smičući napon maksimalan (jer su n_2 i n_3 neodređeni), a ako je $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, ni u jednoj ravni nema smičućih napona (Mohrovi krugovi napona degenerišu se u tačku).

1.9. Oktaedarski naponi

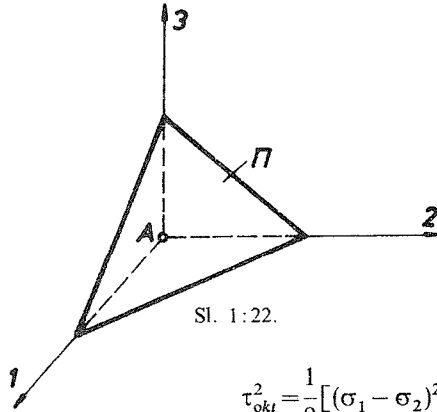
Oktaedarska ravan je ravan koja zaklapa jednake uglove sa glavnim pravcima napona. Ravan Π na sl. 1:22 odsijeca jednake odsječke na glavnim pravcima 1, 2 i 3. Ravan kroz tačku A paralelna ravni Π je oktaedarska ravan.

Vektor normale na oktaedarsku ravan je $\vec{n} = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$. Naponi koji djeluju na oktaedarskoj ravni zovu se oktaedarski naponi.

Kako je u koordinatnom sistemu glavnih pravaca napona:

$$\sigma_n = n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3 \quad (1)$$

$$\tau_n^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2 + n_3^2 \sigma_3^2 - (n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3)^2, \quad (2)$$



i kako je za oktaedarsku ravan $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3}$, dobijamo da je oktaedarski normalni napon

$$\sigma_{okt} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (3)$$

a kvadrat oktaedarskog smičućeg napona

$$\tau_{okt}^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (4)$$

1.10. Sferni i devijatorski dio tenzora napona

Oktaedarski normalni napon zove se još i srednji normalni napon, obilježava sa σ_s i jednak je jednoj trećini prve invarijante tenzora napona, tj.

$$\sigma_s = \frac{1}{3} J_1 = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (1)$$

Ako je stanje napona u tački takvo da je tenzor napona dat sa

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}, \quad (2)$$

kažemo da je stanje napona hidrostatičko (ni u jednoj ravni kroz datu tačku nema smičućih napona), a tenzor napona je sferni tenzor. Ako, pak, imamo proizvoljno stanje napona okarakterisano tenzorom napona

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

tada ga uvijek možemo razložiti na dva dijela na sljedeći način:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_s & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_s & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{bmatrix} = [\sigma]_{dev} + [\sigma]_{sf}. \quad (4)$$

Prvi dio tenzora napona u (4) je devijatorski dio tenzora napona, a drugi dio je sferni dio tenzora napona. Kao što ćemo kasnije vidjeti, devijatorski dio utiče samo na promjenu oblika elementa tijela, a sferni dio samo na promjenu zapremine. Razlaganje tenzora napona na sferni i devijatorski dio ima svoje veliko značenje u teoriji plastičnosti i viskoelastičnosti.

Primjer 1.7. Razložiti sljedeće tenzore napona na sferni i devijatorski dio:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa),} & \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa),} & \text{c)} \quad \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa),} \\ \text{d)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -6 \\ -6 & 6 & -13 \end{bmatrix} \text{ (MPa)} \end{aligned}$$

Rješenje:

a) Srednji normalni napon je

$$\sigma_s = \frac{1}{3} (30 + 0 + 0) = 10 \text{ MPa,}$$

pa je, saglasno dekompoziji (1.10:4),

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = [\sigma]_{dev} + [\sigma]_{sf}.$$

b) $\sigma_s = 0$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\sigma]_{dev} + [\sigma]_{sf}.$$

c) $\sigma_s = \frac{1}{3} \sigma$

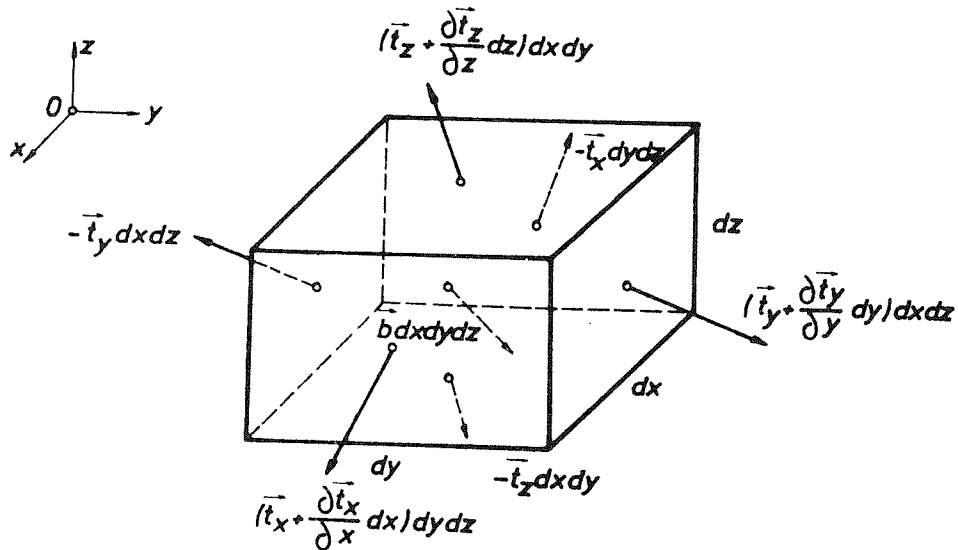
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & -\frac{1}{3} \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \sigma \end{bmatrix} = [\sigma]_{dev} + [\sigma]_{sf}$$

d) $\sigma_s = -3 \text{ MPa}$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -6 \\ -6 & -6 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 4 & 5 & -6 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = [\sigma]_{dev} + [\sigma]_{sf}$$

1.11. Diferencijalne jednačine ravnoteže

U prethodnim poglavljima posmatrali smo naponsko stanje u tački i vidjeli kako se mijenja vektor napona i njegove komponente za različite presječne ravni kroz posmatranu tačku tijela. Sada ćemo analizirati kako se mijenja naponsko



Sl. 1:23.

stanje od jedne do druge tačke posmatranog tijela. U tom cilju, izdvojimo iz napregnutog tijela mali pravougli paralelepiped sa stranama paralelnim koordinatnim ravnima i sa ivicama dx , dy , dz (sl. 1:23).

Neka je $-\vec{t}_x$ vektor napona koji djeluje na strani čija je normala u negativnom smjeru x ose. Tada je vektor napona na suprotnoj strani jednak $\vec{t}_x + \frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} dx$, tj. zbog hipoteze o kontinualnosti promjene napona, razlikuje se za malu veličinu $\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} dx$. Zbog hipoteze o homogenosti napona u maloj okolini, možemo onda uzeti da je ukupna sila na ovim stranama jednaka $(-\vec{t}_x dydz)$, odnosno $\left(\vec{t}_x + \frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} dx\right) dydz$. Ove sile djeluju u težištima strana. Slično imamo i za ostala dva para strana, kao što je prikazano na sl. 1:23. Najzad, neka je zapreminska sila koja djeluje na paralelepiped

$$d\vec{B} = \vec{b} dV = \{b_x, b_y, b_z\} dx dy dz.$$

Da bi pod uticajem definisanih sila paralelepiped bio u ravnoteži, glavni vektor i glavni moment sistema sila moraju biti jednaki nuli. Iz uslova da je glavni vektor jednak nuli dobijamo

$$\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z} + \vec{b} = 0, \quad (1)$$

ili u skalarnom obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Ove tri parcijalne diferencijalne jednačine nazivaju se Cauchyevim jednačinama ravnoteže. Iz uslova da je glavni moment definisanog sistema sila jednak nuli, slijedi ranije izvedeni stav o konjugovanosti smičućih napona. Dakle, zaključujemo da u svakoj tački opterećenog tijela šest komponenti tenzora napona moraju zadovoljiti tri diferencijalne jednačine ravnoteže (2). Pri tome moraju biti zadovoljeni granični uslovi na spoljnoj površini opterećenog tijela:

$$\begin{aligned} n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{xz} &= p_{nx} \\ n_x \sigma_{yx} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{yz} &= p_{ny} \\ n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} + n_z \sigma_{zz} &= p_{nz}, \end{aligned} \quad (3)$$

što slijedi iz ranije izvedene Cauchyve relacije (1.3:3), pri čemu su u (3) sa p_{nx} , p_{ny} i p_{nz} označene komponente specifične površinske sile u datoj tački površine (omotača) tijela čija je spoljna normala $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$.

Dakle, ako je zadatak da se za dato spoljašnje opterećenje (\vec{p}_n po omotaču tijela i \vec{b} unutar tijela) odredi naponsko stanje u svakoj tački tijela, treba riješiti tri Cauchyve

diferencijalne jednačine ravnoteže (2), pri čemu to rješenje mora zadovoljiti granične (površinske) uslove (3). No, iz tri jednačine nemoguće je odrediti šest nepoznatih komponenti napona, pa kažemo da je problem statički neodređen. Za njegovo rješenje je zato neophodno analizirati i deformaciju tijela i izvesti nove jednačine koje će, uz ove, voditi rješenju problema. Ovo će, međutim, biti predmet naredne glave. Prije toga, u sljedećem poglavlju upoznaćemo se sa tri važne specijalne vrste naponskog stanja.

1.12. Specijalne vrste naponskog stanja

U dosadašnjoj analizi posmatrali smo opšti, trodimenzionalni slučaj naponskog stanja. Sada ćemo analizirati tri važna specijalna slučaja: dvodimenzioni slučaj – ravno stanje napona, zatim slučaj čistog smicanja i jednodimenzioni slučaj – linearno stanje napona.

1.12.1. Ravno stanje napona

U tački tijela imamo ravno stanje napona u ravni (x, y) ako je u toj tački

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0, \quad (1)$$

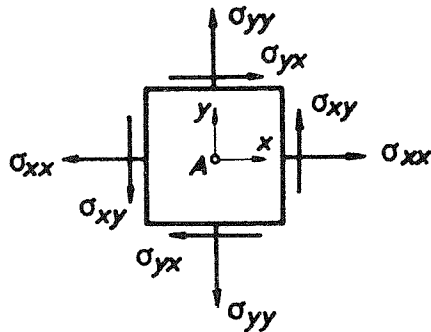
tj. ako tenzor napona ima oblik

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

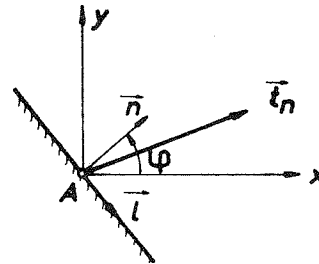
Dakle, stanje napona je određeno samo sa dva vektora napona $\vec{t}_x = \{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, 0\}$ i $\vec{t}_y = \{\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, 0\}$, jer je $t_z = 0$, tj. samo sa četiri skalarna podatka $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$, od kojih su zbog stava o konjugovanosti smičućih napona $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, samo tri nezavisna. Zato se tenzor napona u slučaju ravnog stanja napona piše u obliku

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

tj. vektori napona su u odnosu na koordinatni sistem (x, y) : $\vec{t}_x = \{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}\}$, $\vec{t}_y = \{\sigma_{yx}, \sigma_{yy}\}$ (sl. 1:24).



Sl. 1:24.



Sl. 1:25.

Cauchyeva relacija koja daje vektor naponá u ravni sa normalom $\vec{n} = \{n_x, n_y\}$ (sl. 1:25) glasi

$$\vec{t}_n = n_x \vec{t}_x + n_y \vec{t}_y. \quad (4)$$

Normalni napon u ravni sa normalom \vec{n} je

$$\sigma_n = \vec{t}_n \cdot \vec{n} = (n_x \vec{t}_x + n_y \vec{t}_y) \cdot \vec{n} = \{n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{yx}, n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy}\} \cdot \{n_x, n_y\},$$

odakle se dobija

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi, \quad (5)$$

s obzirom da je $n_x = \cos \varphi$ i $n_y = \sin \varphi$, gdje je φ ugao koji normala \vec{n} čini sa pozitivnim smjerom x ose (sl. 1:25).

Koristeći dvostruki ugao 2φ , izraz (5) možemo prepisati u obliku

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi. \quad (6)$$

Izrazi (5), odnosno (6), daju normalni napon u tački za ravan sa normalom \vec{n} . Smičući napon u toj ravni dobijamo iz

$$\tau_n = \vec{t}_n \cdot \vec{l}. \quad (7)$$

gdje je $\vec{l} = \{n_y, -n_x\}$ jedinični vektor koji leži u ravni (sl. 1:25). Razvijajući skalarni proizvod (7), dobijamo

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi - \sigma_{xy} \cos 2\varphi, \quad (8)$$

što predstavlja izraz za smičući napon u ravni sa normalom \vec{n} za slučaj ravnog stanja napona.

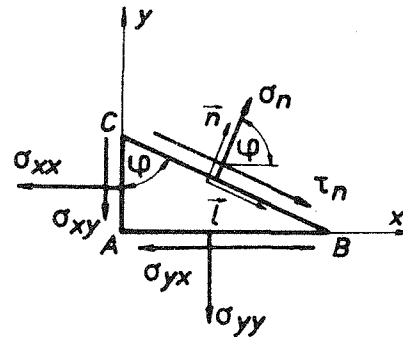
Izrazi (6) i (8) mogu se takođe dobiti i iz uslova ravnoteže malog trougaonog dijela napregnutog tijela jedinične debljine oko tačke A (sl. 1:26), što je analog ranije posmatranom tetraedru za slučaj trodimenzionalnog stanja napona (sl. 1:12).

Zaista, iz sume svih sila u pravcu \vec{n} imamo

$$\begin{aligned} \sigma_n \cdot (\overline{BC} \cdot 1) - \sigma_{xx} \cos \varphi \cdot (\overline{AC} \cdot 1) - \\ \sigma_{xy} \sin \varphi \cdot (\overline{AC} \cdot 1) - \sigma_{yx} \cos \varphi \cdot (\overline{AB} \cdot 1) - \\ \sigma_{yy} \sin \varphi \cdot (\overline{AB} \cdot 1) = 0, \quad (9) \end{aligned}$$

odakle se, s obzirom da je $\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \sin \varphi$ i $\overline{AC} = \overline{BC} \cdot \cos \varphi$, dobija ponovo izraz (5).

Izraz (8) dobija se iz uslova da je suma svih sila u pravcu \vec{l} jednaka nuli. Iz momentnog uslova ravnoteže dobija se stav o konjugovanosti smičućih napona $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.



Sl. 1:26.

Ekstremne vrijednosti normalnog napona (6) slijede iz

$$\frac{d\sigma_n}{d\varphi} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + 2\sigma_{xy} \cos 2\varphi = 0,$$

što definiše ugao $\varphi = \alpha$ glavnih pravaca napona

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}. \quad (10)$$

Iz (10) dobijamo dvije vrijednosti ugla: α_1 i $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$, tj. dva međusobno upravna glavna pravca napona n_1 i n_2 . Kako je

$$\left(\frac{d^2\sigma_n}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\alpha} = -\frac{4\sigma_{xy}}{\sin 2\alpha},$$

zaključujemo da \vec{n}_1 prolazi kroz prvi i treći kvadrant (x, y) koordinatnog sistema ako je $\sigma_{xy} > 0$, a ako je $\sigma_{xy} < 0$, kroz drugi i četvrti kvadrant.

Glavni naponi, tj. ekstremne vrijednosti normalnog napona, dobijaju se zamjenom ugla $\varphi = \alpha$ definisanog sa (10), u izraz (6). Dobija se:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{\max} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \sigma_{\min} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Zamjenom ugla (10) koji definiše glavne pravce u izraz (8) za τ_n , nalazimo da je $\tau_n = 0$ u ravni u kojoj imamo ekstreman normalni napon (glavna ravan). Važi i obrnuto, kad god je smičući napon u nekoj ravni jednak nuli, ta ravan je glavna ravan.

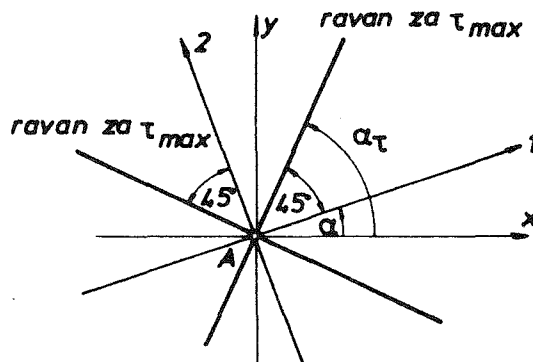
Ekstremne vrijednosti smičućeg napona dobijaju se iz uslova

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_n}{d\varphi} &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \\ & 2\sigma_{xy} \sin 2\varphi = 0, \end{aligned}$$

što daje ugao $\varphi = \alpha_\tau$ koji definiše ravni maksimalnog smičućeg napona

$$\operatorname{ctg} 2\alpha_\tau = -\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}. \quad (12)$$

Očigledno, $\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha_\tau = -1$, pa je $\alpha_\tau = \alpha \pm 45^\circ$, tj. ravni maksimalnog smičućeg napona polove uglove između glavnih pravaca napona (sl. 1:27).



Sl. 1:27.

Korespondentna maksimalna vrijednost smičućeg napona dobija se zamjenom ugla $\varphi = \alpha_c$, definisanog sa (12), u (8)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \equiv \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (13)$$

Normalni napon u ravni maksimalnog smičućeg napona je

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \equiv \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2),$$

što se dobija zamjenom ugla (12) u izraz za normalni napon (6).

Mohrov krug napona. – Dobijeni izrazi (6)–(13) imaju svoju geometrijsku interpretaciju pomoću tzv. Mohrovog kruga napona. Naime, ako izraze (6) i (8) prepíšemo u obliku:

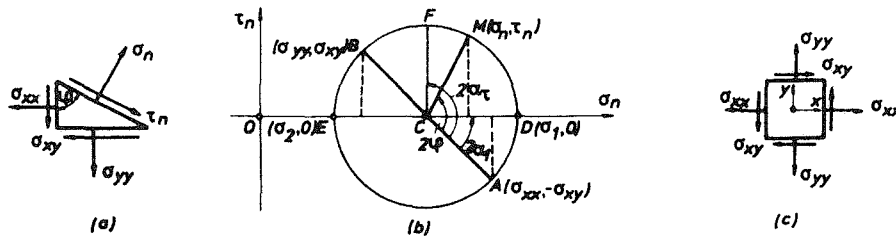
$$\sigma_n - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi - \sigma_{xy} \cos 2\varphi,$$

pa ih kvadriramo i saberemo, dobićemo s obzirom na trigonometrijsku identičnost $\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi = 1$, da je

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2. \quad (14)$$

Prema tome, za dato ravno stanje napona definisano komponentama napona σ_{xx} , σ_{yy} i σ_{xy} , normalni i smičući napon σ_n i τ_n u ravni sa normalom \vec{n} , zadovoljavaju uslov (14). U koordinatnom sistemu (σ_n, τ_n) uslov (14) predstavlja jednačinu kruga sa centrom u tački $\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0 \right)$ i poluprečnikom $\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$. Ovaj krug naziva se



Sl. 1:28.

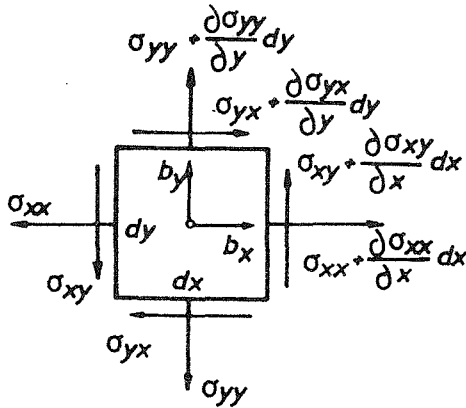
Mohrov krug napona (sl. 1:28) i predstavlja geometrijsko mjesto tačaka čije su koordinate (σ_n, τ_n) normalni i smičući napon u ravni sa normalom \vec{n} , za sve moguće pravce \vec{n} kroz posmatranu tačku.

Mohrov krug napona konstruiše se tako što se prvo odrede tačke $A(\sigma_{xx}, -\sigma_{xy})$ i $B(\sigma_{yy}, \sigma_{xy})$, a njihovim spajanjem i tačka $C\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0\right)$, koja predstavlja centar

Mohrovog kruga. Mohrov krug se onda dobija kada se iz tačke C opiše krug poluprečnika \overline{CA} , jer je očigledno $\overline{CA} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$ (sl. 1:28).

Uočavamo sa sl. 1:28 da tačka A ima τ_n koordinatu jednaku $(-\sigma_{xy})$, jer je pozitivna vrijednost komponente σ_{xy} , prikazana na sl. 1:28(c), negativan smičući napon τ_n u smislu prihvaćene orijentacije za pozitivno τ_n na sl. 1:28(a). Drugim riječima, pri konstrukciji Mohrovog kruga napona pretpostavlja se da je τ_n pozitivno u nekoj ravni ako ga treba kao vektor zaokrenuti za 90° suprotno kretanju kazaljke na satu da bi se poklopio sa pravcem normale na ravan n . To je zato što smo i izraz (8) izveli smatrajući τ_n pozitivnim ako djeluje kao na sl. 1:26.

Proizvoljna tačka $M(\sigma_n, \tau_n)$ na Mohrovom krugu napona odgovara ravni sa normalom pod uglom φ u odnosu na x osu, kao što je prikazano na sl. 1:28. Pri tome se ugao 2φ mjeri od CA ka CM suprotno kretanju kazaljke na satu. Sa sl. 1:28 je takođe geometrijski očigledno da je $OD = \sigma_1$, $OE = \sigma_2$, tj. tačka $D(\sigma_1, 0)$ odgovara glavnoj ravni sa maksimalnim normalnim naponom σ_1 , čija normala zaklapa sa $+x$ osom ugao α_1 , dok tačka $E(\sigma_2, 0)$ odgovara glavnoj ravni sa minimalnim normalnim naponom σ_2 , čija normala zaklapa sa $+x$ osom ugao $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$. Tačka $F\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$ odgovara ravni maksimalnog smičućeg napona $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, koja očigledno polovi ugao između pravaca \vec{n}_1 i \vec{n}_2 , s obzirom da je $\alpha_t = \alpha_1 + 45^\circ$.



Sl. 1:29.

Diferencijalne jednačine ravnoteže. — Iako diferencijalne jednačine ravnoteže za ravno stanje napona možemo direktno dobiti iz jednačina (1.11:2), stavljajući $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$ i $b_z = 0$, izvešćemo ih ovdje, instruktivnosti radi, još jedanput, startujući iz početka. Dakle, posmatrajmo pravougaoni element dimenzija $dx \cdot dy$ izdvojen iz napregnutog tijela koji je pod dejstvom napona kao što je prikazano na sl. 1:29.

Za ravnotežu ovog elementa potrebno je da su mu glavni vektor i glavni moment jednaki nuli. Iz uslova da je glavni moment jednak nuli dobija se stav o konjugovanosti smičućih napona $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, a iz uslova da je glavni vektor jednak nuli imamo:

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_{xx} dy + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \sigma_{yx} dx + b_x dx dy = 0$$

$$\left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_{xy} dy + \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy\right) dx - \sigma_{yy} dx + b_y dx dy = 0.$$

Odavde slijedi:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0$$

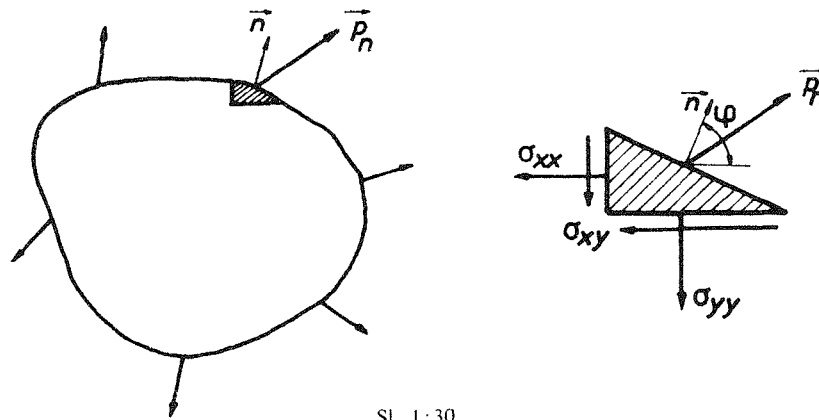
$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0,$$
(15)

što predstavlja Cauchyve diferencijalne jednačine ravnoteže za slučaj ravnog stanja napona. Ove dvije diferencijalne jednačine, naravno, prate i dva granična uslova:

$$\cos \varphi \sigma_{xx} + \sin \varphi \sigma_{xy} = p_{nx}$$

$$\cos \varphi \sigma_{yx} + \sin \varphi \sigma_{yy} = p_{ny},$$
(16)

koja dobijamo iz uslova ravnoteže malog elementa tijela uz konturu (sl. 1:30).



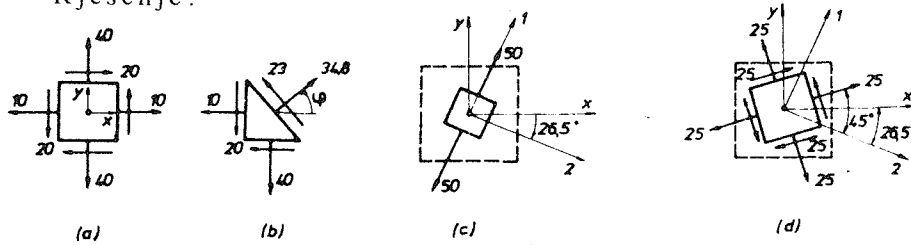
Sl. 1:30.

Primjer 1.8.

Dato je ravno naponsko stanje definisano sa: $\sigma_{xx} = 10$, $\sigma_{yy} = 40$, $\sigma_{xy} = 20$ (MPa).

- Odrediti normalni i smičući napon u ravni čija normala zaklapa sa x osom ugao $\varphi = 30^\circ$.
- Odrediti glavne pravce i glavne napone. Izdvojiti elemenat na koji djeluju glavni naponi.
- Odrediti maksimalni smičući napon i izdvojiti elemenat na koji djeluju maksimalni smičući naponi.
- Nacrtati Mohrov krug napona.

Rješenje:



Sl. P 1.8 (a) - (d).

a) Iz izraza (1.12.1:5) i (1.12.1:8) je:

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi = 10 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 40 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 34,8 \text{ (MPa)}$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi - \sigma_{xy} \cos 2\varphi = \frac{1}{2} (10 - 40) \frac{\sqrt{3}}{2} - 20 \cdot \frac{1}{2} \cong -23 \text{ (MPa)}$$

Naponi σ_n i τ_n prikazani su na sl. P 1.8(b).

b) Glavni pravci definisani su izrazom (1.12.1:10)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2 \cdot 20}{10 - 40} = -1,333; \quad \alpha = -26,5$$

Kako je $\sigma_{xy} = 20 > 0$, glavni pravac \vec{n}_1 prolazi kroz prvi i treći kvadrant (x, y) koordinatnog sistema (sl. P 1.8(c)). Korespondentni glavni naponi dobijaju se iz formula (1.12.1:11):

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2} (10 + 40) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(10 - 40)^2 + 4 \cdot 20^2} = 25 \pm 25 \\ \sigma_1 &= 50, \quad \sigma_2 = 0 \text{ (MPa)}. \end{aligned}$$

c) Maksimalni sićući napon računamo po formuli (1.12.1:13)

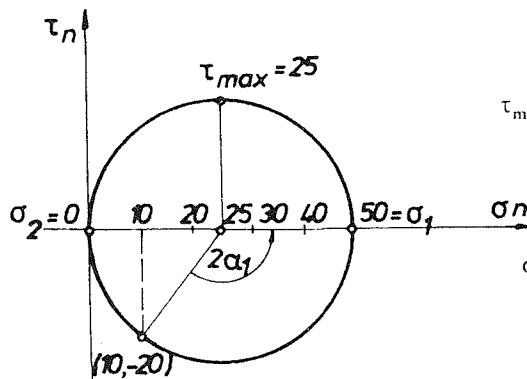
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} (50 - 0) = 25 \text{ (MPa)}$$

Korespondentni normalni napon je

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2} (50 + 0) = 25 \text{ (MPa)}$$

Na sl. P 1.8(d) prikazan je elemenat na koji djeluju maksimalni smićući naponi.

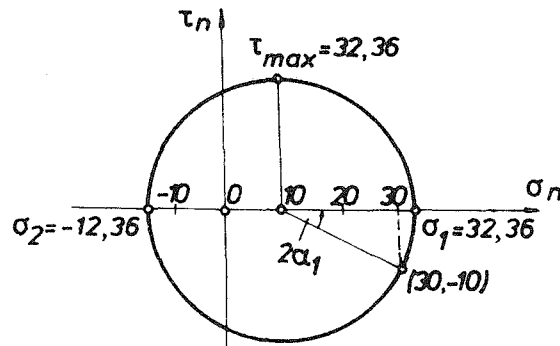
d) Mohrov krug napona je prikazan na sl. P 1.8(e).



Sl. P 1.8 (e).

Primjer 1.9.

Koristeći se Mohrovim krugom napona odrediti glavne pravce i glavne napone u tački u kojoj je: $\sigma_{xx}=30$, $\sigma_{yy}=-10$, $\sigma_{xy}=10$ (MPa). Koliki je maksimalni smičući napon?



Sl. P1.9.

Rješenje:

Sa sl. P1.9, koju crtamo u odgovarajućoj srazmjeri, dobijamo:

$$\sigma_1 = 32,36; \quad \sigma_2 = -12,36; \quad \tau_{\max} = 22,36 \text{ (MPa)}; \quad \text{tg } 2\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 13,28^\circ.$$

Primjer 1.10.

Element na sl. P1.10(a) je u tzv. biaksijalnom stanju napona. Odrediti:

- glavne napone,
- napone u ravni čija normala zaklapa sa x osom ugao φ ,
- maksimalni smičući napon;
- Mohrov krug napona.

Rješenje:

- Pošto nema smičućih napona na stranama elementa na sl. P1.10(a), zaključujemo da su x i y glavni pravci napona, a $\sigma_1 = \sigma_{xx}$ i $\sigma_2 = \sigma_{yy}$ glavni naponi. (Recimo, neka je $\sigma_{xx} > \sigma_{yy}$).
- Iz uslova ravnoteže elementa na sl. P1.10(b), ili iz opštih izraza (1.12.1:5) i (1.12.1:8), dobijamo stavljajući $\sigma_{xy} = 0$:

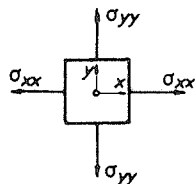
$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi.$$

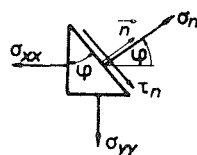
- Maksimalni smičući napon je

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}).$$

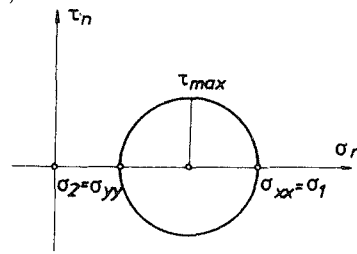
- Mohrov krug napona prikazan je na sl. P1.10(c).



(a)



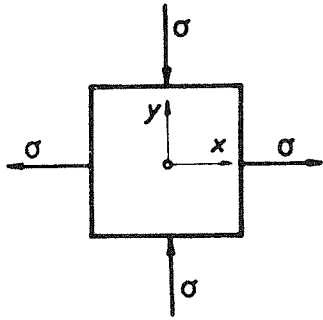
(b)



(c)

1.12.2. Čisto smicanje

Specijalan slučaj ravnog stanja napona kod kojeg je $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = \sigma$ i $\sigma_{xy} = 0$ nazivamo stanje čistog smicanja (sl. 1:31).



Sl. 1:31.

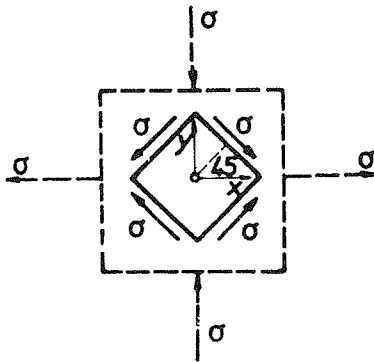
Jasno je da su glavni pravci napona u ovom slučaju pravci x i y , tj. $\sigma_1 = \sigma$ i $\sigma_2 = -\sigma$. Maksimalni smičući napon je u ravnima koje polove uglove između glavnih pravaca i iznosi

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma. \quad (1)$$

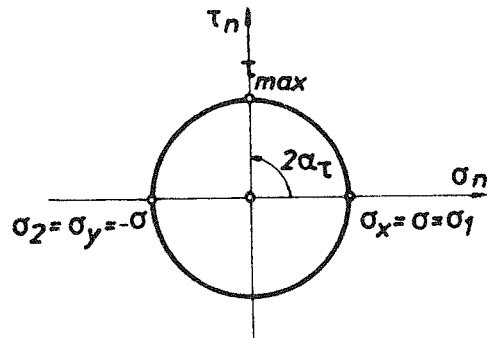
Korespondentni normalni napon u tim ravnima je

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = 0. \quad (2)$$

Na sl. 1:32 prikazan je elemenat na čijim stranama djeluju maksimalni smičući naponi. Kako na stranama ovog elementa nema normalnog napona, kažemo da je elemenat u stanju čistog smicanja (jer na njega djeluju samo smičući naponi $\tau = \sigma$).



Sl. 1:32.



Sl. 1:33.

Mohrov krug napona za slučaj čistog smicanja prikazan je na sl. 1:33.

1.12.3. Linearno stanje napona

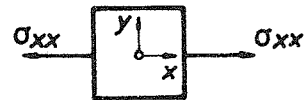
U tački tijela imamo linearno stanje napona u pravcu x ose ako je u toj tački:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad \text{i} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0, \quad (1)$$

tj. ako tenzor napona ima oblik

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

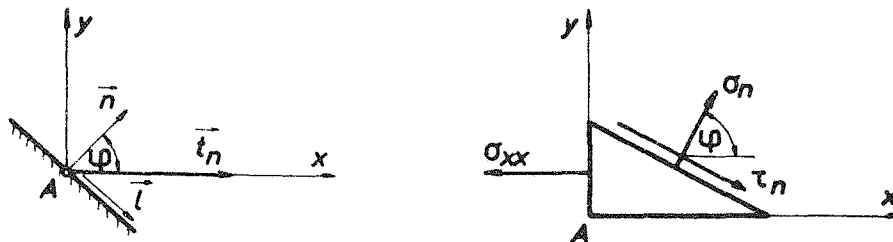
što je skicirano na sl. 1:34.



Sl. 1:34.

Dakle, $\vec{t}_x = \{\sigma_{xx}, 0, 0\}$ i $\vec{t}_y = \vec{t}_z = 0$, pa Cauchyeva relacija koja daje vektor napona u ravni sa normalom $n = \{n_x, n_y\}$ (sl. 1:35) glasi

$$\vec{t}_n = n_x \vec{t}_x. \quad (3)$$



Sl. 1:35.

Iz (3) se dobija da su normalni i smičući napon u ravni sa normalom \vec{n} :

$$\sigma_n = \vec{t}_n \cdot \vec{n} = \sigma_{xx} n_x^2 = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi \quad (4)$$

$$\tau_n = \vec{t}_n \cdot \vec{l} = \sigma_{xx} n_x n_y = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \sin 2\varphi. \quad (5)$$

S obzirom da na stranama elementa na sl. 1:34 nema smičućih napona, očigledno je da su x i y glavni pravci napona i da je (pretpostavljajući da je $\sigma_{xx} > 0$):

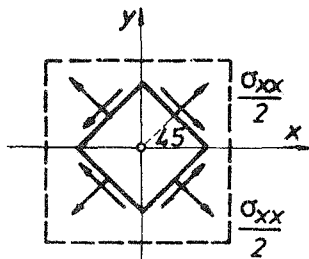
$$\sigma_1 = \sigma_{xx}, \quad \sigma_2 = 0. \quad (6)$$

Maksimalni smičući napon je

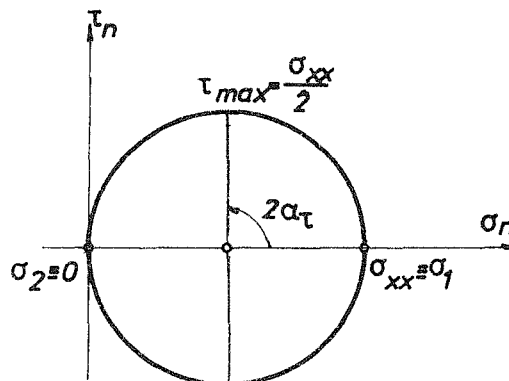
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} \sigma_{xx}, \quad (7)$$

i djeluje u ravnima pod 45° u odnosu na (x, y) ose (sl. 1:36). Normalni napon u tim ravnima je

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2} \sigma_{xx}. \quad (8)$$



Sl. 1:36.



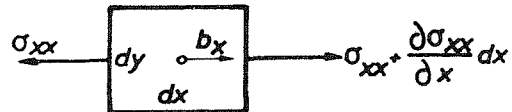
Sl. 1:37.

Mohrov krug napona za tačku sa linearnim stanjem napona prikazan je na sl. 1:37. Najzad, jednačina ravnoteže za slučaj linearnog stanja napona glasi

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + b_x = 0, \quad (9)$$

što slijedi iz ravnoteže elementa na sl. 1:38. Korespondentni granični uslov je

$$\cos \varphi \sigma_{xx} = p_{nx}. \quad (10)$$



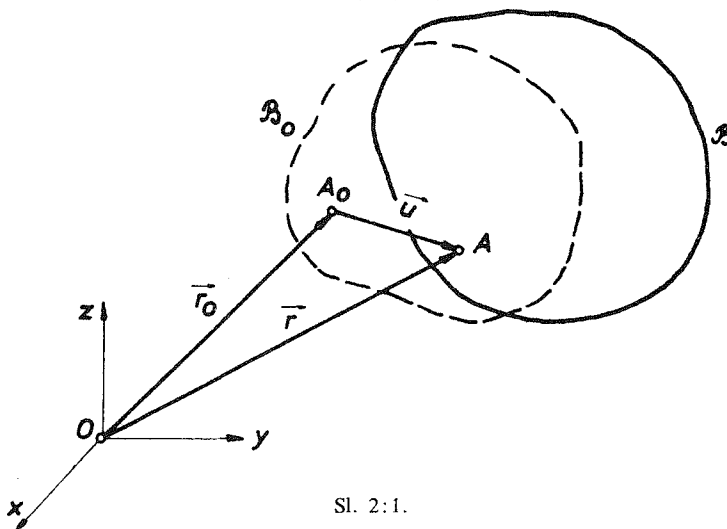
Sl. 1:38.

2. ANALIZA DEFORMACIJE

2.1. Pojam deformacije

Kažemo da je tijelo deformisano ako je promijenjen relativni položaj materijalnih tačaka u tijelu. Posmatrajmo tijelo u dvije konfiguracije \mathcal{B}_0 i \mathcal{B} . \mathcal{B}_0 je početna konfiguracija tijela, a \mathcal{B} je konfiguracija koju tijelo zauzima primjenom spoljašnjih sila. Ako je relativni položaj materijalnih tačaka u \mathcal{B} isti kao i u \mathcal{B}_0 , onda se konfiguracija \mathcal{B} dobila iz konfiguracije \mathcal{B}_0 translacijom i rotacijom čitavog tijela, tj. bez deformacije tijela. Predmet naše analize je, međutim, slučaj kada se relativni položaj materijalnih tačaka u tijelu promijenio, tj. kada je nastupila deformacija tijela. Neka se, dakle, konfiguracija \mathcal{B} na sl. 2:1 razlikuje od konfiguracije \mathcal{B}_0 za nastalu deformaciju opterećenog tijela. Uočimo proizvoljnu tačku A_0 u konfiguraciji \mathcal{B}_0 . Vektor položaja tačke A_0 u odnosu na 0 je \vec{r}_0 . Nakon deformacije ova tačka prelazi u položaj A čiji je vektor položaja \vec{r} . Vektor $A_0A = \vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0$ naziva se vektor pomjeranja uočene tačke. Različite tačke imaju u opštem slučaju različita pomjeranja, pa je

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z). \quad (1)$$

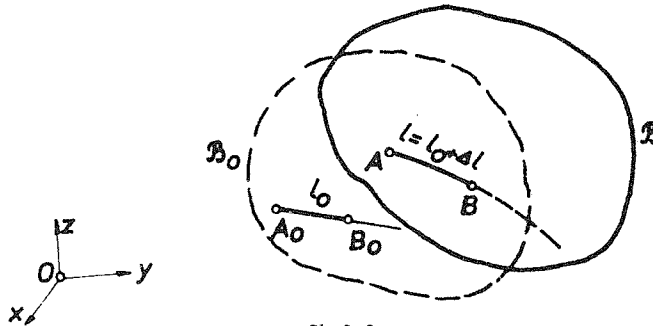


U daljoj analizi mi ćemo se ograničiti na slučaj kada su pomjeranja tijela veoma mala (tzv. infinitezimalna pomjeranja), što je najčešće i slučaj u građevinskim, mašinskim i drugim konstrukcijama. Tada su vektor pomjeranja \vec{u} i njegove komponente u_x, u_y, u_z veoma mali u poređenju sa dimenzijama tijela. Takođe ćemo pretpostavljati da su komponentalna pomjeranja neprekidne i diferencijabilne funkcije svojih koordinata, te da su i gradijenti pomjeranja veoma mali.

Posmatrajmo dalje mali linijski elemenat (malo vlakno) $\overline{A_0B_0}$ dužine l_0 . Zbog homogenosti deformacije u maloj okolini tačke ovo vlakno je u deformisanoj konfiguraciji još uvijek duž (AB) dužine $l = l_0 + \Delta l$, tj. promijenilo je dužinu za Δl (sl. 2:2). Veličina $\frac{\Delta l}{l}$ naziva se srednje izduženje duži u okolini tačke A i u pravcu AB , a

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l} \quad (2)$$

zovemo specifično izduženje ili dilatacija u tački A za pravac AB . Pojam dilatacije je, dakle, vezan za tačku i za pravac kroz tu tačku. Za različite pravce kroz datu tačku

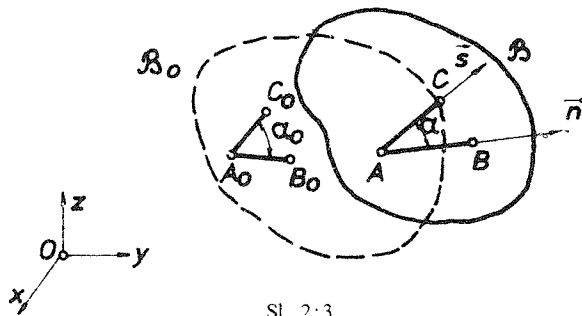


Sl. 2:2.

biće, u opštem slučaju, različite i korespondentne dilatacije, tj. $\varepsilon_n \neq \varepsilon_m$, gdje su sa ε_n i ε_m označene dilatacije u tački za pravce \vec{n} i \vec{m} . Naravno, dilatacija zavisi i od tačke u tijelu, tj.

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(x, y, z). \quad (3)$$

Dilatacija je bezdimenziona veličina, i za male deformacije je najviše reda veličine $10^{-3} - 10^{-2}$.



Sl. 2:3.

No, pri deformaciji tijela mijenjaju se ne samo dužine vlakana već i njihovi pravci i uglovi između tih pravaca. Poznati deformaciju u tački znači poznati, osim dilatacija u toj tački, i veličinu promjene ugla između bilo koja dva pravca u toj tački. Posmatrajmo zato u okolini tačke A_0 dva vlakna A_0B_0 i A_0C_0 sa međusobnim uglom α_0 u nedeformisanoj konfiguraciji

B_0 . U deformisanoj konfiguraciji ova dva vlakna prelaze u položaje AB , odnosno AC sa uglom α između njih (sl. 2:3). Promjena ugla je $(\alpha_0 - \alpha)$. Granična vrijednost ove promjene ugla usljed deformacije

$$\gamma_{ns} = \lim_{B, C \rightarrow A} (\alpha_0 - \alpha) \quad (4)$$

naziva se klizanje u tački A za pravce \vec{n} i \vec{s} . Klizanje kao neka mjera promjene uglova može se definisati i drugačije. Na primjer, mi ćemo koristiti definiciju

$$\varepsilon_{ns} = \frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos \alpha_0). \quad (5)$$

Evidentno, ako je $\alpha_0 = 90^\circ$, $\varepsilon_{ns} = \frac{1}{2} \gamma_{ns}$.

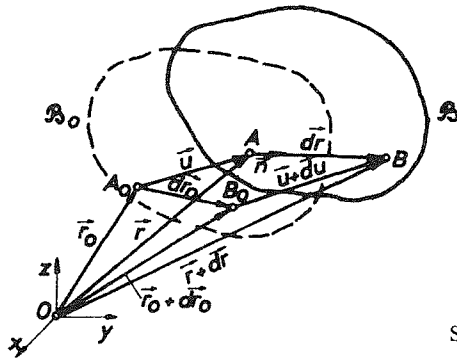
Za različite pravce u datoj tački imamo različita klizanja. Osim toga, u različitim tačkama tijela imamo i za iste pravce različita klizanja, tj.

$$\varepsilon_{ns} = \varepsilon_{ns}(x, y, z). \quad (6)$$

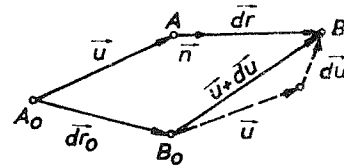
Dilatacije ε_n i klizanja ε_{ns} zajedno se nazivaju komponentalne deformacije. Jasno je da mora postojati veza između pomjeranja tačaka deformisanog tijela i komponentalnih deformacija. Naš je sada zadatak da utvrdimo tu vezu.

2.2. Veza između pomjeranja i komponentalnih deformacija

Uočimo nedeformisanu i deformisanu konfiguraciju tijela, \mathcal{B}_0 i \mathcal{B} . Neka je $A_0(\vec{r}_0)$ tačka u nedeformisanoj konfiguraciji, a $B_0(\vec{r}_0 + d\vec{r}_0)$ njoj obližnja tačka na malom rastojanju $d\vec{r}_0$. Nakon deformacije ove dvije tačke prelaze u tačke $A(\vec{r})$ i $B(\vec{r} + d\vec{r})$ na rastojanju $d\vec{r}$ (sl. 2:4). Vektor pomjeranja tačke A_0 je \vec{u} , a vektor pomjeranja tačke B_0 je $\vec{u} + d\vec{u}$. Očigledno je $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0$ i $d\vec{u} = d\vec{r} - d\vec{r}_0$. Vektor $d\vec{u}$ je



Sl. 2:4.



vektor relativnog pomjeranja tačke B u odnosu na tačku A . Promjena dužine vlakna AB u odnosu na A_0B_0 je $\overline{AB} - \overline{A_0B_0} = |\vec{dr}| - |\vec{dr}_0|$, a relativna promjena dužine (dilatacija) vlakna AB je

$$\varepsilon_n = \frac{\overline{AB} - \overline{A_0B_0}}{|\overline{AB}|} = \frac{|\vec{dr}| - |\vec{dr}_0|}{|\vec{dr}|} = \frac{dr - dr_0}{dr}, \quad (1)$$

gdje je $\vec{n} = \frac{\vec{dr}}{dr}$ jedinični vektor pravca \overline{AB} , a $dr = |\vec{dr}|$.

Za male deformacije ϵ_n se takođe može definisati kao:

$$\epsilon_n = \frac{\overline{AB} - \overline{A_0B_0}}{\overline{A_0B_0}} \quad \text{ili} \quad \frac{\overline{AB^2} - \overline{A_0B_0^2}}{2\overline{A_0B_0^2}} \quad \text{ili} \quad \frac{\overline{AB^2} - \overline{A_0B_0^2}}{2\overline{AB^2}}$$

Sve ove četiri definicije daju u slučaju malih deformacija istu vrijednost za dilataciju ϵ_n . Mi ćemo u daljoj analizi koristiti posljednji izraz za dilataciju zbog njegove pogodnosti za izvođenje veze između dilatacije i pomjeranja. Dakle,

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{\overline{AB^2} - \overline{A_0B_0^2}}{2\overline{AB^2}} = \frac{\vec{dr} \cdot \vec{dr} - \vec{dr}_0 \cdot \vec{dr}_0}{2\vec{dr} \cdot \vec{dr}} = \frac{\vec{dr} \cdot \vec{dr} - (\vec{dr} - \vec{du}) \cdot (\vec{dr} - \vec{du})}{2\vec{dr} \cdot \vec{dr}} = \\ &= \frac{\vec{dr} \cdot \vec{du} + \vec{du} \cdot \vec{dr} - \vec{du} \cdot \vec{du}}{2\vec{dr} \cdot \vec{dr}} \end{aligned} \quad (2)$$

No, za mala pomjeranja je $\vec{du} \cdot \vec{du} \ll \vec{du} \cdot \vec{dr}$, pa je

$$\epsilon_n = \frac{1}{2} \left(\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}}{dr} + \frac{d\vec{u}}{dr} \cdot \vec{n} \right) \quad (3)$$

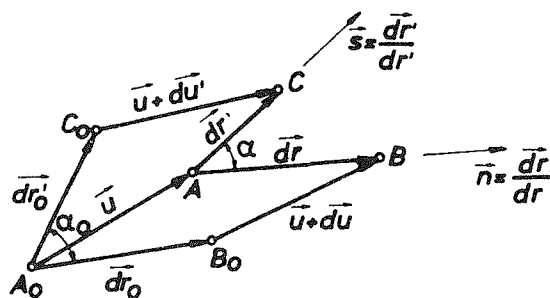
Ovo je tražena veza između dilatacije ϵ_n i pomjeranja \vec{u} . Vidi se da je dilatacija ϵ_n jednaka projekciji vektora \vec{du}/dr na pravac \vec{n} .

Birajući za pravac \vec{n} ortove osa x, y, z dobijamo iz (3):

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (4)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (5)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (6)$$



Sl. 2:5.

Nadimo sada vezu između klizanja i pomjeranja. U tom cilju uočimo u nedeformisanoj konfiguraciji dva kratka vlakna A_0B_0 (\vec{dr}_0) i A_0C_0 (\vec{dr}'_0) sa proizvoljnim uglom α_0 između njih. Nakon deformacije ova dva vlakna prelaze u položaje \vec{AB} (\vec{dr}) i \vec{AC} (\vec{dr}') sa uglom α između njih. Vektori pomjeranja naznačeni su na sl. 2:5. Definisali smo klizanje između pravaca \vec{AB} (\vec{n}) i \vec{AC} (\vec{s}) izrazom (2.1:5). Međutim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \alpha &= \frac{1}{2} \vec{n} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}}{dr} \cdot \frac{d\vec{r}'}{dr'} = \frac{1}{2} \frac{(d\vec{r}_0 + d\vec{u})(d\vec{r}'_0 + d\vec{u}')}{dr \cdot dr'} \cong \\ &\cong \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}'_0 + d\vec{r}_0 \cdot d\vec{u}' + d\vec{u} \cdot d\vec{r}'_0}{dr \cdot dr'} \cong \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}'_0}{dr \cdot dr'} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r} \cdot d\vec{u}'}{dr \cdot dr'} + \frac{d\vec{u} \cdot d\vec{r}'}{dr \cdot dr'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_n - \varepsilon_s) \cos \alpha_0 + \frac{1}{2} \left(\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}'}{dr'} + \frac{d\vec{u}}{dr} \cdot \vec{s} \right), \end{aligned}$$

pri čemu je korišteno $d\vec{r}_0 \cdot d\vec{u}' = (d\vec{r} - d\vec{u}) \cdot d\vec{u}' \cong d\vec{r} \cdot d\vec{u}'$ i:

$$\frac{d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}'_0}{dr \cdot dr'} = \frac{\cos \alpha_0}{(1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon_s)} \cong (1 - \varepsilon_n - \varepsilon_s) \cos \alpha_0.$$

Prema tome je

$$\varepsilon_{ns} = \frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

$$\varepsilon_{ns} = -\frac{1}{2} (\varepsilon_n + \varepsilon_s) \vec{n} \cdot \vec{s} + \frac{1}{2} \left(\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}'}{dr'} + \frac{d\vec{u}}{dr} \cdot \vec{s} \right). \quad (7)$$

Ovo je tražena veza između klizanja ε_{ns} i pomjeranja \vec{u} . Specijalno, ako je $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ imamo klizanje između upravnih pravaca \vec{n} i \vec{s}

$$\varepsilon_{ns} = \frac{1}{2} \left(\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}'}{dr'} + \frac{d\vec{u}}{dr} \cdot \vec{s} \right).$$

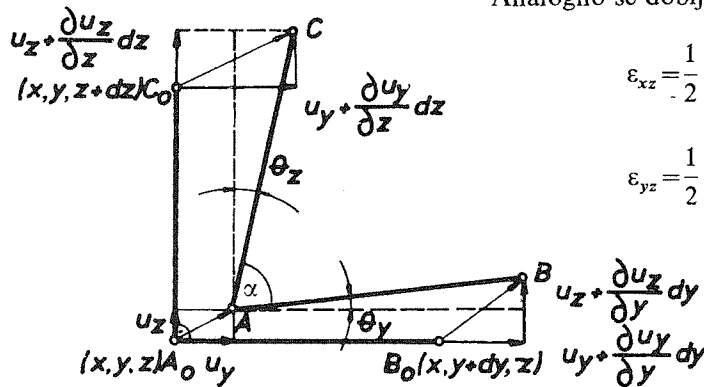
Birajući za pravac $\vec{n} = \vec{i}$, $\vec{s} = \vec{j}$, dobijamo

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (8)$$

Analogno se dobija:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (9)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (10)$$



Sl. 2:6.

Dobijeni izrazi (4)–(6) i (8)–(10) predstavljaju vezu između komponentalnih deformacija i komponentalnih pomjeranja u odnosu na x, y, z koordinatne pravce. Lako je dati njihovu geometrijsku interpretaciju. Na primjer, posmatrajmo ravan (y, z) u kojoj leže vlakna A_0B_0 i A_0C_0 (sl. 2:6). Relativna promjena dužine vlakna AB je

$$\frac{AB - A_0B_0}{A_0B_0} \cong \frac{\left(dy + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy\right) - dy}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \equiv \varepsilon_y,$$

dok je promjena ugla od 90° jednaka

$$\begin{aligned} 90^\circ - \alpha = \theta_y + \theta_z &\cong \text{tg } \theta_y + \text{tg } \theta_z = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial y} dy}{dy} + \frac{\frac{\partial u_y}{\partial z} dz}{dz} = \\ &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \equiv 2\varepsilon_{yz}. \end{aligned}$$

2.3. Tenzor deformacije

Vratimo se sada relacijama (2.2:3) i (2.2:7):

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \left(\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}}{dr} + \frac{d\vec{u}}{dr} \cdot \vec{n} \right) \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ns} = \frac{1}{2} \left(\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}'}{dr'} + \frac{d\vec{u}'}{dr'} \cdot \vec{s} \right), \quad (2)$$

pri čemu su \vec{n} i \vec{s} međusobno upravni pravci.

Kako je $\frac{d\vec{u}}{dr} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{dy}{dr} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{dz}{dr}$

i $\vec{n} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \left\{ \frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dr}, \frac{dz}{dr} \right\} = \{n_x, n_y, n_z\}$, dobijamo

$$\frac{d\vec{u}}{dr} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} n_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} n_z = (\vec{u}\vec{\nabla}) \cdot \vec{n}, \quad (3)$$

gdje je $(\vec{u}\vec{\nabla})$ tzv. spoljašnji proizvod vektora \vec{u} i vektora $\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, koji se definiše sa

$$\vec{u}\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Matrično zapisano, jednačina (3) glasi

$$\begin{bmatrix} \frac{du_x}{dr} \\ \frac{du_y}{dr} \\ \frac{du_z}{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Analogno je

$$\frac{d\vec{u}}{dr} = n_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u}), \quad (4)$$

pri čemu je $(\vec{\nabla} \vec{u})$ transponovana matrica od matrice $(\vec{u} \vec{\nabla})$. Slično imamo da je:

$$\frac{d\vec{u}'}{dr'} = (\vec{u} \vec{\nabla}) \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u}). \quad (5)$$

Zamjenom (3), (4) i (5) u (1) i (2) sada dobijamo:

$$\epsilon_n = \vec{n} \cdot E \cdot \vec{n} \quad (6)$$

$$\epsilon_{ns} = \vec{n} \cdot E \cdot \vec{s}, \quad (7)$$

gdje je $E = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \vec{\nabla})$. U razvijenom obliku matrica E glasi

$$E \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

i predstavlja matricu tenzora deformacije u (x, y, z) sistemu. Od devet komponenti tenzora deformacije (8), samo je šest nezavisno jer je po definiciji $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$ i $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$. Komponente ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} nazivamo normalnim deformacijama (ili dilatacijama), a komponente ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{zx} smičućim deformacijama (ili klizanjima):

Evidentno je iz (6) i (7) da je stanje deformacije u tački potpuno određeno tenzorom deformacije E , jer se dilatacija za bilo koji pravac \vec{n} i klizanje između bilo koja dva upravna pravca \vec{n} i \vec{s} određuju pomoću ovih obrazaca.

Klizanje između neupravnih pravaca \vec{n} i \vec{s} određujemo iz

$$\epsilon_{ns} = -\frac{1}{2} (\vec{n} \cdot E \cdot \vec{n} + \vec{s} \cdot E \cdot \vec{s}) (\vec{n} \cdot \vec{s}) + \vec{n} \cdot E \cdot \vec{s},$$

što je očigledno iz (6), (7) i (2.2:7).

Izrazi (6) i (7) su ekvivalentni korespondentnim izrazima za napon. Ako sa $T=[\sigma]$ označimo tenzor napona u tački, onda se normalni i smičući napon u ravni sa normalom \vec{n} mogu odrediti iz:

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot T \cdot \vec{n} \quad (9)$$

$$\sigma_{ns} = \vec{n} \cdot T \cdot \vec{s} \quad (10)$$

Očigledna je, dakle, potpuna analogija sa tenzorom napona. Zato i ovdje možemo uvesti vektore deformacije $e_x = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}\}$, $e_y = \{\varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{yz}\}$ i $e_z = \{\varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zz}\}$. Ova tri vektora deformacije definišu tenzor deformacije u (x, y, z) sistemu. Vektor deformacije za pravac \vec{n} , e_n , i dilatacija u pravcu \vec{n} , ε_n , vezani su preko

$$\varepsilon_n = \vec{e}_n \cdot \vec{n}, \quad (11)$$

što je analogno izrazu za normalni napon $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T} \cdot \vec{n}$. Upoređujući (1) i (9) vidimo da je

$$\vec{e}_n = \vec{n} \cdot E = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z, \quad (12)$$

što predstavlja Cauchyevu relaciju za vektore deformacije.

Znajući vektor napona \vec{e}_n , dilatacija u pravcu \vec{n} i klizanje između upravnih pravaca \vec{n} i \vec{s} dobijaju se iz:

$$\varepsilon_n = \vec{e}_n \cdot \vec{n}, \quad \varepsilon_{ns} = \vec{e}_n \cdot \vec{s}. \quad (13)$$

Primjer 2.1.

Pomjeranja tačaka tijela zadata su sa:

$$u_x = kxy, \quad u_y = kxy, \quad u_z = 2k(x+y)z,$$

gdje je k konstanta (dovoljno mala da se data pomjeranja mogu smatrati infinitezimalnim).

a) Napisati matricu tenzora deformacije.

b) Kolike su komponentalne deformacije u tački $(x, y, z) \equiv (1, 1, 0)$?

c) Odrediti u tački $(1, 1, 0)$ dilataciju u pravcu $\vec{n} = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\}$.

d) Odrediti u tački $(1, 1, 0)$ klizanje između pravaca $\vec{n} = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\}$ i

$$\vec{s} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}.$$

Rješenje:

a) Komponentalne deformacije dobijamo iz komponentalnih pomjeranja saglasno izrazima (2.2:4)–(2.2:6) i (2.2:8)–(2.2:10):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = ky, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = kx, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 2k(x+y)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{k}{2} (x+y), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = kz, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = kz,$$

pa je tenzor deformacije

$$E = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} ky & \frac{k}{2}(x+y) & kz \\ \frac{k}{2}(x+y) & kx & kz \\ kz & kz & 2k(x+y) \end{bmatrix}.$$

b)

$$E(1, 1, 0) = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 4k \end{bmatrix}.$$

c) Saglasno izrazu (2.3:6) dilatacija u pravcu \vec{n} je

$$\varepsilon_n = \vec{n} \cdot E \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{4}{9}k.$$

d) Klizanje između pravaca \vec{n} i \vec{s} je, saglasno izrazu (2.3:7),

$$\varepsilon_{ns} = \vec{n} \cdot E \cdot \vec{s} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

2.4. Tenzor rotacije

Definisali smo komponentalne deformacije (dilatacije i klizanja) kao mjeru relativnog pomjeranja između obližnjih tačaka tijela. Pri tome smo dobili da je tenzor deformacije E jednak simetričnom dijelu matrice gradijenta pomjeranja

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

tj.

$$E = \frac{1}{2}(U + U^T). \quad (2)$$

Antisimetrični dio matrice gradijenta pomjeranja

$$\Omega = \frac{1}{2} (U - U^T) \quad (3)$$

jednak je

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{xy} & \Omega_{xz} \\ -\Omega_{xy} & 0 & \Omega_{yz} \\ -\Omega_{xz} & -\Omega_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

i predstavlja tenzor lokalne rotacije okoline uočene tačke. Dakle, gradijent pomjeranja U se može razložiti na dva dijela

$$U = E + \Omega, \quad (5)$$

od kojih E odgovara čistoj deformaciji (promjeni dužina i uglova), a Ω čistoj rotaciji uočene okoline tačke.

Izrazimo na kraju komponente relativnog pomjeranja \vec{du} preko komponenti tenzora deformacije i tenzora rotacije. Komponenta relativnog pomjeranja du_x je:

$$\begin{aligned} du_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dy + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz - \\ &= \varepsilon_{xx} dx + \varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz + \Omega_{xy} dy + \Omega_{xz} dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Analogno se dobija:

$$du_y = \varepsilon_{yx} dx + \varepsilon_{yy} dy + \varepsilon_{yz} dz + \Omega_{yz} dz + \Omega_{yx} dx \quad (7)$$

$$du_z = \varepsilon_{zx} dx + \varepsilon_{zy} dy + \varepsilon_{zz} dz + \Omega_{zx} dx + \Omega_{zy} dy. \quad (8)$$

Primjer 2.2.

Napisati izraz za vektor relativnog pomjeranja tačke Q u odnosu na tačku P , ako duž PQ zarotira oko ose z za mali ugao ω_z (sl. P 2.2).

Rješenje:

Komponente vektora relativnog pomjeranja $\overline{QQ'}$ su, kao što vidimo sa sl. P 2.2.:

$$du_x = dr \cos(\omega_z + \theta) - dr \cos \theta = dr [(\cos \omega_z - 1) \cos \theta - \sin \omega_z \sin \theta]$$

$$du_y = dr \sin(\omega_z + \theta) - dr \sin \theta = dr [(\cos \omega_z - 1) \sin \theta - \sin \omega_z \cos \theta].$$

Kako je ugao ω_z mali, to je $\sin \omega_z \cong \omega_z$ i $\cos \omega_z \cong 1$, pa su komponente relativnog pomjeranja:

$$du_x = dr (-\omega_z \sin \theta) = -\omega_z dy$$

$$du_y = dr (\omega_z \cos \theta) = \omega_z dx,$$

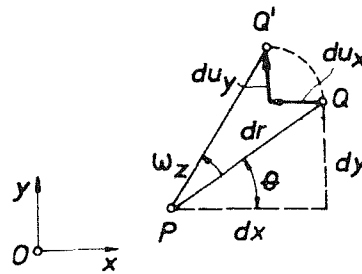
što matricno zapisano glasi

$$\begin{bmatrix} du_x \\ du_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}.$$

Matrica

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix}$$

je očigledno antisimetrična i naziva se matrica rotacije.



Sl. P 2.2.

Primjer 2.3.

Data je matrica gradijenta pomjeranja

$$U = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 10 & -4 \\ -10 & 18 & -18 \\ -14 & -18 & 27 \end{bmatrix}.$$

Određiti matricu tenzora deformacije E i matricu rotacije Ω .

Rješenje:

Saglasno izrazima (2.4:2) i (2.4:3) imamo:

$$E = \frac{1}{2} (U + U^T) = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 18 & -18 \\ -9 & -18 & 27 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \frac{1}{2} (U - U^T) = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -10 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.5. Promjena komponenti tenzora deformacije pri rotaciji koordinatnog sistema

Komponente tenzora deformacije mijenjaju se pri rotaciji koordinatnog sistema saglasno operaciji

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} & \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\xi\zeta} \\ \varepsilon_{\eta\xi} & \varepsilon_{\eta\eta} & \varepsilon_{\eta\zeta} \\ \varepsilon_{\zeta\xi} & \varepsilon_{\zeta\eta} & \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_\xi & \cos \beta_\xi & \cos \gamma_\xi \\ \cos \alpha_\eta & \cos \beta_\eta & \cos \gamma_\eta \\ \cos \alpha_\zeta & \cos \beta_\zeta & \cos \gamma_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_\xi & \cos \alpha_\eta & \cos \alpha_\zeta \\ \cos \beta_\xi & \cos \beta_\eta & \cos \beta_\zeta \\ \cos \gamma_\xi & \cos \gamma_\eta & \cos \gamma_\zeta \end{bmatrix}, \quad (1)$$

tj.
$$E' = A \cdot E \cdot A^T, \quad (2)$$

gdje je E matrica tenzora deformacije u (x, y, z) koordinatnom sistemu, E' matrica tenzora deformacije u koordinatnom sistemu (ξ, η, ζ) koji je dobijen rotacijom iz (x, y, z) koordinatnog sistema, a A je matrica transformacije definisana u (1). Relacije (1) i (2) su potpuno ekvivalentne i izvode se isto kao i relacije (1.5:10), odnosno (1.5:11), koje se odnose na tenzor napona.

2.6. Glavne dilatacije

Izvođenje analize i nalaženje odgovora na pitanje u kom pravcu kroz datu tačku su ekstremne vrijednosti dilatacije i kolike su te ekstremne vrijednosti, potpuno je analogno analizi kod određivanja glavnih napona (vidi poglavlje 1.6). Ekstremne vrijednosti dilatacije (glavne dilatacije) su rješenja kubne jednačine

$$\varepsilon^3 - j_1\varepsilon^2 + j_2\varepsilon - j_3 = 0, \quad (1)$$

gdje su:

$$j_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$j_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2 \quad (2)$$

$$j_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2,$$

redom, prva, druga i treća invarijanta tenzora deformacije.

Korespondentni glavni pravci deformacije (dilatacije) dobijaju se rješavanjem sistema:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_i) n_x + \varepsilon_{yx} n_y + \varepsilon_{zx} n_z &= 0 \\ \varepsilon_{xy} n_x + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_i) n_y + \varepsilon_{zy} n_z &= 0 \\ \varepsilon_{xz} n_x + \varepsilon_{yz} n_y + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_i) n_z &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1,$$

gdje se, zbog linearne zavisnosti, uzimaju samo dvije nezavisne od prve tri jednačine sistema (3). Za svako ε_i ($i=1, 2, 3$) nalazimo iz (3) korespondentni pravac n_i ($i=1, 2, 3$). Ovi pravci zovu se glavni pravci dilatacije. Ako je $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, glavni pravci dilatacije su međusobno upravni. Između glavnih pravaca dilatacije nema klizanja, tj. $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$.

Ako se za koordinatne ose uzmu glavne ose dilatacije, tada tenzor deformacije glasi

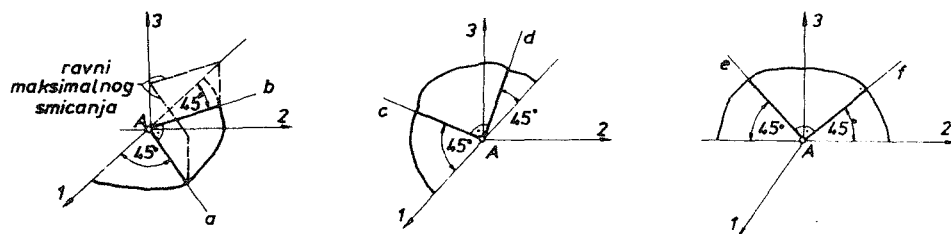
$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

2.7. Maksimalna klizanja

Određivanje maksimalnog klizanja koje se javlja između dva upravna pravca kroz datu tačku analogno je određivanju maksimalnih smičućih napona (poglavlje 1.7). Dobija se da su maksimalna klizanja u datoj tački jednaka:

$$\varepsilon_{ab} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_{cd} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}, \quad \varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}, \quad (1)$$

a javljaju se između pravaca koji polove uglove između glavnih pravaca dilatacije (sl. 2:7).



Sl. 2:7.

Pretpostavljajući da je $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$, apsolutni maksimum je

$$\varepsilon_{kl}^{\max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}. \quad (2)$$

Iz (1) je takođe očigledno

$$\varepsilon_{ab} + \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ef} = 0. \quad (3)$$

Slično kao i kod analize napona, geometrijsku interpretaciju stanja deformacije možemo dati pomoću Mohrovih krugova deformacije koji su potpuno analogni Mohrovim krugovima napona (poglavlje 1.8).

2.8. Sferni i devijatorski dio tenzora deformacije

Tenzor deformacije se može razložiti na sferni i devijatorski dio na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_s & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_s & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{bmatrix} = E_{dev} + E_{sf}, \quad (1)$$

gdje je

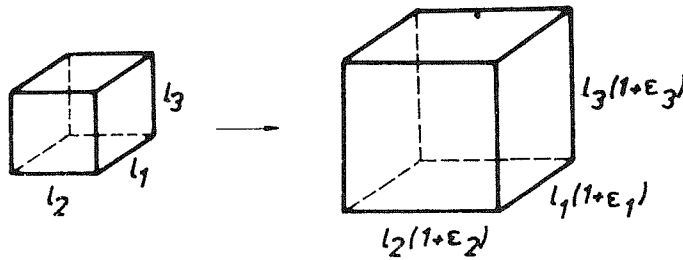
$$\varepsilon_s = \frac{1}{3} j_1 = \frac{1}{3} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (2)$$

srednja dilatacija. Geometrijsku interpretaciju veličine ε_s dobićemo pomoću sl. 2:8. Kubna dilatacija prikazanog bloka je

$$e = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \frac{l_1(1+\varepsilon_1)l_2(1+\varepsilon_2)l_3(1+\varepsilon_3) - l_1l_2l_3}{l_1l_2l_3} \cong \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = j_1. \quad (3)$$

Prema tome, ε_s je jednako 1/3 kubne dilatacije e .

Sferni dio tenzora deformacije, dakle, mijenja samo zapreminu elementa tijela ($e_{sf} = 3e$) i nema klizanja ni između kojih pravaca, dok devijatorski dio tenzora deformacije mijenja samo oblik ($e_{dev} = 0$), tj. nema kubne dilatacije elementa tijela.



Sl. 2:8.

Primjer 2.4.

Stanje deformacije u tački definisano je tenzorom deformacije

$$E = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odrediti glavne pravce i glavne dilatacije u toj tački.

Rješenje:

Glavne dilatacije dobijamo kao rješenje kubne jednačine (2.6:1), gdje se prema izrazima (2.6:2) dobija:

$$j_1 = 4 \cdot 10^{-4}, \quad j_2 = -1 \cdot 10^{-4}, \quad j_3 = -4 \cdot 10^{-4}.$$

Dakle, kubna jednačina glasi

$$\varepsilon^3 - 4 \cdot 10^{-4} \varepsilon^2 - 10^{-4} \varepsilon + 4 \cdot 10^{-4} = 0,$$

odakle nalazimo: $\varepsilon_1 = 4 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 1 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = -1 \cdot 10^{-4}$.

Korrespondentne pravce dobijamo rješavanjem sistema (2.6:3), potpuno analogno kao u primjeru 1.3. Dobija se:

$$\vec{n}_1 = \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\}, \quad \vec{n}_2 = \{1, 0, 0\}, \quad \vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left\{ 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Primjer 2.5.

U datoj tački tijela stanje deformacije je definisano tenzorom deformacije

$$E = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Naći glavne pravce i glavne dilatacije.

Rješenje :

U ovom slučaju je $j_1 = 0$, $j_2 = -3a^2$, $j_3 = 2a^3$, pa kubna jednačina glasi

$$\varepsilon^3 - 3a^2\varepsilon - 2a^3 = 0,$$

odakle se dobijaju glavne dilatacije:

$$\varepsilon_1 = 2a, \quad \varepsilon_2 = -a, \quad \varepsilon_3 = -a.$$

Glavni pravac \vec{n}_1 korespondentan glavnoj dilataciji $\varepsilon_1 = 2a$ dobijamo rješavanjem sistema (2.6:3), koji u ovom slučaju glasi:

$$\begin{aligned} -2an_x + an_y + an_z &= 0 \\ an_x - 2an_y + an_z &= 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1, \end{aligned}$$

tako da se dobija $\vec{n}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.

Kako je $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -a$, \vec{n}_2 i \vec{n}_3 su bilo koja dva upravna pravca u ravni normalnoj na \vec{n}_1 .

2.9. Jednačine kompatibilnosti

Vidjeli smo da je veza između komponentalnih deformacija i komponentalnih pomjeranja data izrazima:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Ako su poznata pomjeranja kao neprekidne i diferencijabilne funkcije koordinata:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z) \\ u_y &= u_y(x, y, z) \\ u_z &= u_z(x, y, z), \end{aligned} \quad (2)$$

tada komponentalne deformacije jednoznačno određujemo iz (1) prostim diferenciranjem. Međutim, ako je dato šest neprekidnih i diferencijabilnih funkcija za komponentalne deformacije, može se dogoditi slučaj da ne postoje funkcije pomje-

ranja u_x , u_y , u_z koje daju ove deformacije. To znači da zadatih šest funkcija za komponentalne deformacije ne mogu da predstavljaju polje deformacije. Matematički je to zato što imamo šest jednačina sa tri nepoznate, što je preodređen sistem, te rješenje ne postoji osim ako komponentalne deformacije zadovoljavaju određene uslove međusobno. Ovi uslovi su, u stvari, uslovi integrabilnosti sistema od šest parcijalnih diferencijalnih jednačina po u_x , u_y , u_z , i zovu se uslovi ili jednačine kompatibilnosti. Oni, dakle, osiguravaju da za dato polje deformacije postoji jednoznačno, neprekidno i diferencijabilno polje pomjeranja koje odgovara tim deformacijama.

Iz jednačina (1) očigledno imamo:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2} \right),$$

pa je

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}, \quad (3)$$

tj. ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} ne mogu biti zadati nezavisno, već između njih postoji veza (3).

Analogno se dobija:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Nadalje imamo:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right), \quad \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right),$$

pa je

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right). \quad (6)$$

Slično se dobijaju još dvije jednačine:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Dobijenih šest jednačina zovu se Saint-Venantove jednačine (uslovi) kompatibilnosti deformacija. Ovih šest jednačina moraju biti zadovoljene u svakoj tački tijela da bi zadate komponentalne deformacije bile stvarno moguće, tj. da za njih postoje korespondentna jednoznačna pomjeranja.

Fizičko značenje jednačina kompatibilnosti je sljedeće. Zamislimo da smo isjekli tijelo na male dijelove prije deformacije. Sada zadajmo svakom dijelu deformaciju ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{zx} . U opštem slučaju poslije deformacije ovi dijelovi se neće moći složiti u jednu cjelinu bez šupljina i preklapanja (sl. 2:9). Oni će se složiti u jednu kontinualnu (neprekidnu) cjelinu, tj. tijelo ako su komponentalne deformacije u svakom dijelu vezane sa komponentalnim deformacijama okolnih dijelova preko jednačina kompatibilnosti.



Sl. 2:9.

2.10. Određivanje pomjeranja pri zadatim komponentalnim deformacijama

Kao što smo vidjeli, ako su zadata komponentalna pomjeranja, komponentalne deformacije možemo direktno izračunati prostim diferenciranjem koristeći jednačine (2.9:1). Ako su, međutim, zadate komponentalne deformacije koje zadovoljavaju jednačine kompatibilnosti, onda pomjeranja određujemo dvostrukom integracijom. Na primjer, komponenta pomjeranja u_x određuje se dvostrukom integracijom nakon što se odrede drugi izvodi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x}, & \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}, & \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}, & \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}, & \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

Slično se polazeći od:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}, & \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} &= \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y}, & \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}, & \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y}, & \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}, & \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z}, & \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}, & \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x}, & \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

dvostrukom integracijom određuju i komponentalna pomjeranja u_y i u_z .

Nakon dvostruke integracije javlja se šest integracionih konstanti, tako da imamo:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^{\text{def}} + a + by - cz \\ u_y &= u_y^{\text{def}} + d - bx + ez \\ u_z &= u_z^{\text{def}} + f + cx - ey. \end{aligned} \quad (4)$$

Očigledno, integracione konstante a, d, f u izrazima (4) odgovaraju translacionom kretanju tijela kao cjeline, a konstante b, c, e predstavljaju tri male rotacije cijelog tijela oko tri koordinatne ose. Kada postoji dovoljno veza da se spriječi kretanje tijela kao cjeline (kao krutog tijela), onda se ovih šest konstanti lako određuju iz zahtjeva da su zadovoljeni uslovi veze. Sa $u_x^{\text{def}}, u_y^{\text{def}}$ i u_z^{def} u (4) su označena komponentalna pomjeranja od čiste deformacije, ne računajući kretanje tijela kao cjeline (kao krutog tijela).

Napomena: Ako znamo parcijalne izvode funkcije $\varphi = \varphi(x, y, z)$, tj. ako znamo $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z$, tada se funkcija φ određuje pomoću obrasca

$$\varphi = \int_{x_0}^x \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial\varphi(x_0, y, z)}{\partial y} dy + \int_{z_0}^z \frac{\partial\varphi(x_0, y_0, z)}{\partial z} dz + C. \quad (5)$$

Integraciona konstanta C određuje se iz uslova da je $\varphi = \varphi_0$ u tački (x_0, y_0, z_0) .

Primjer 2.6.

Pokazati da komponentalne deformacije:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= k_1(x^2 + y^2), & \varepsilon_{yy} &= k_1(y^2 + z^2), & \varepsilon_{xy} &= k_2xy, \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zz} = 0. \end{aligned}$$

gdje su k_1 i k_2 (male) konstante, ne predstavljaju kompatibilne deformacije.

Rješenje:

Komponentalne deformacije u ovom primjeru ne predstavljaju kompatibilne deformacije jer ne zadovoljavaju jednačine kompatibilnosti. Zaista, već prva od jednačina (2.9:3) - (2.9:8) nije zadovoljena, jer je

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 2k_2 \neq \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2k_1.$$

Primjer 2.7.

Dane su komponentalne deformacije:

$$\varepsilon_{xx} = -vay, \quad \varepsilon_{yy} = -vay, \quad \varepsilon_{zz} = ay, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0, \quad (a)$$

gdje su v i a konstante. Odrediti komponentalna pomjeranja koja odgovaraju ovim deformacijama. Integracione konstante odrediti iz uslova da su u tački $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ pomjeranja jednaka nuli, da je u tački $(0, 0, l)$: $u_x = u_y = 0$ i da je u tački $(0, 0, 0)$ rotacija $\Omega_{xy} = 0$.

Rješenje:

S obzirom da su komponentalne deformacije (a) linearne funkcije koordinata, očigledno je da su jednačine kompatibilnosti automatski zadovoljene. Komponentalna pomjeranja odredićemo primjenom obrazaca (2.10:1)–(2.10:5). Odredimo prvo komponentu u_x . Prema formuli (2.10:5) je

$$u_x = \int_0^x \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial x} dx + \int_0^y \frac{\partial u_x(0, y, z)}{\partial y} dy + \int_0^z \frac{\partial u_x(0, 0, z)}{\partial z} dz + C_1. \quad (b)$$

No,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} = -vay \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \int_0^x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]_{(x, y, z)} dx + \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]_{(0, y, z)} dy + \\ &+ \int_0^z \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]_{(0, 0, z)} dz + C_2. \end{aligned} \quad (d)$$

Koristeći formule (2.10:1) je:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} = -va, \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = 0,$$

što zamjenom u (d) daje

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -vax + C_2. \quad (e)$$

Analogno slijedi

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = C_3. \quad (f)$$

Zamjenom izraza (c), (e) i (f) u (b), dobijamo nakon integracije

$$u_x = -vaxy + C_2y + C_3z + C_1. \quad (g)$$

Na isti način se određuju preostale dvije komponente pomjeranja:

$$u_y = \frac{va}{2} \left(x^2 - y^2 - \frac{1}{v} z^2 \right) - C_2x + C_4z + C_5 \quad (h)$$

$$u_z = ayz - C_3x - C_4y + C_6. \quad (i)$$

Integracione konstante $C_1 - C_6$ u izrazima (g)–(i) određujemo iz graničnih uslova. Iz uslova da je $u_x = u_y = u_z = 0$ u tački $(0, 0, 0)$ slijedi da je $C_1 = C_5 = C_6 = 0$. Iz uslova da je $u_x = u_y = 0$ u tački $(0, 0, l)$ slijedi da je $C_3 = 0$, $C_4 = \frac{a}{2}l$. Konačno, iz uslova da je $\Omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0$ u tački $(0, 0, 0)$ slijedi $C_2 = 0$, pa izrazi za pomjeranja glase:

$$\begin{aligned} u_x &= -vaxy \\ u_y &= \frac{va}{2} \left(x^2 - y^2 - \frac{1}{v} z^2 \right) + \frac{al}{2} z \\ u_z &= ayz - \frac{al}{2} z. \end{aligned}$$

2.11. Ravno stanje deformacije

U tački tijela imamo ravno stanje deformacije u ravni (x, y) ako je u toj tački:

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zz} = 0, \quad (1)$$

tj. ako tenzor deformacije glasi

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Umjesto (2), iz očiglednih razloga tenzor napona se u slučaju ravnog stanja deformacije zapisuje u obliku

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Određivanje dilatacije u proizvoljnom pravcu pri zadanom tenzoru deformacije (3), kao i određivanje glavnih dilatacija i maksimalnog klizanja, potpuno je analogno odgovarajućoj analizi datoj za ravno stanje napona (odjeljak 1.12.1). Tako je dilatacija u posmatranoj tački u pravcu $\vec{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ (sl. 2:10) jednaka

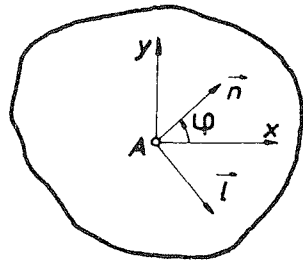
$$\varepsilon_n = \varepsilon_{xx} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{yy} \sin^2 \varphi + \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi, \quad (4)$$

dok je klizanje između pravaca $\vec{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ i $\vec{l} = \{\sin \varphi, -\cos \varphi\}$ jednako

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin 2\varphi - \varepsilon_{xy} \cos 2\varphi. \quad (5)$$

Ekstremne vrijednosti dilatacije su u pravcu α definisanom sa

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \quad (6)$$



Sl. 2:10.

i iznose

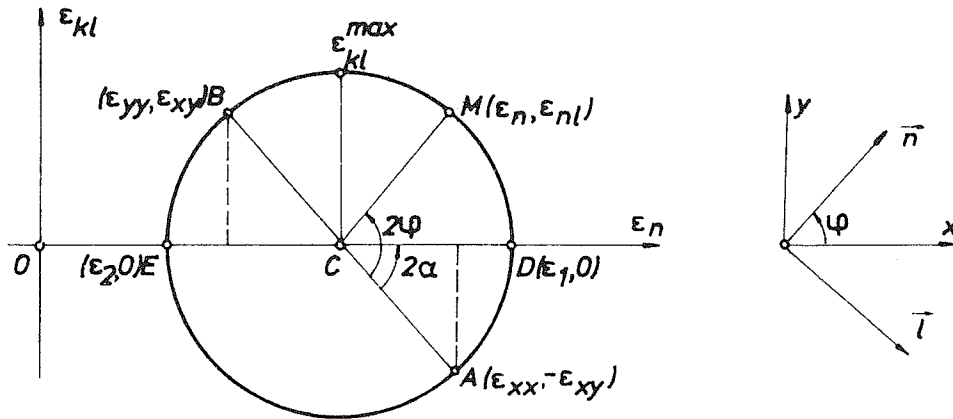
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}, \quad (7)$$

dok je klizanje između glavnih pravaca dilatacije jednako nuli.

Maksimalno klizanje se javlja između pravaca koji su pod uglom od 45° u odnosu na glavne pravce dilatacije, i iznosi

$$\varepsilon_{kl}^{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (8)$$

Geometrijska interpretacija dobijenih rezultata je moguća pomoću Mohrovog kruga deformacije (sl. 2:11) koji je potpuno analogan Mohrovom krugu napona (sl. 1:28). Koordinate tačke M na sl. 2:11 su ε_n – dilatacija u pravcu \vec{n} koji zaklapa ugao φ sa x osom, i ε_{nl} , koje predstavlja klizanje između pravca \vec{n} i njemu upravnog pravca \vec{l} . Očigledno je $\varepsilon_{nl}(\varphi=0) = \varepsilon_{x(-y)} = -\varepsilon_{xy}$. Zaista, ukoliko se ugao između x i y vlakna smanjio ($\varepsilon_{xy} > 0$), onda se između x i $(-y)$ vlakna povećao, pa je $\varepsilon_{x(-y)} < 0$.



Sl. 2:11.

Primjer 2.8.

Matrica gradijenta pomjeranja u problemu ravnog stanja deformacije je:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0 & 0,01 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & -0,01 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,02 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za svaki od ovih slučajeva skicirati deformisani oblik elementa koji je u nedeformisanoj konfiguraciji bio kvadrat u (x, y) ravni sa stranicama paralelnim x i y osi.

Rješenje:

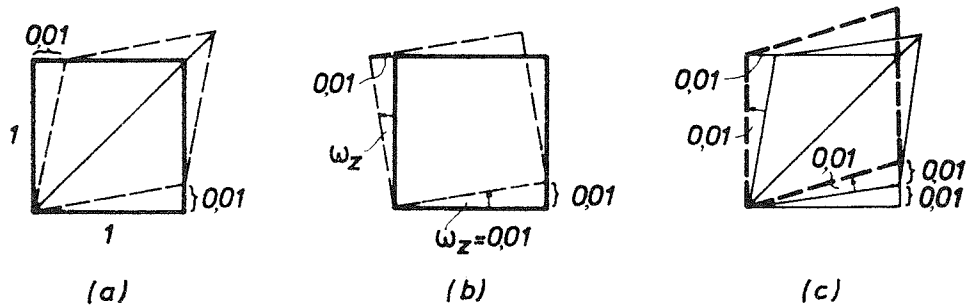
a) Kako je matrica gradijenta pomjeranja u ovom slučaju simetrična, to je tenzor rotacije $\Omega=0$, a tenzor deformacije $E=U$. Očigledno $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0,01$, $\frac{\partial u_y}{\partial x} = 0,01$,

$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0,01$. Deformisani oblik elementa prikazan je na sl. P 2.8 (a).

- b) U ovom slučaju je matrica gradijenta pomjerenja antisimetrična, pa je tenzor deformacije identički jednak nuli i $U = \Omega$. Dakle, $\Omega_{xy} = -0,01$ i $\Omega_{yx} = -\Omega_{xy} = 0,01$, pa se deformisani oblik elementa dobija rotacijom za mali ugao $\omega_z = 0,01$ (rad), bez promjene dužina i uglova (sl. P 2.8 (b)).
- c) U ovom slučaju imamo i deformaciju i rotaciju. Zaista,

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,02 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,01 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,01 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix} = E + \Omega.$$

Deformisani oblik elementa dobija se superpozicijom, deformacijom E praćenom rotacijom Ω (sl. P 2.8 (c)). Očigledno: $\varepsilon_{xy} = 0,01$, $\Omega_{xy} = -0,01 = \omega_z$, $\frac{\partial u_y}{\partial x} = 0,02$.



Sl. P 2.8.

Primjer 2.9.

Blok materijala se deformiše kao na sl. P 2.9 (a), pri čemu je α mali ugao.

- Napisati izraze za komponentalna pomjerenja.
- Izračunati tenzore deformacije i rotacije.
- Da li je ovo homogena deformacija?
- Odrediti glavne pravce dilatacije i glavne dilatacije.
- Odrediti maksimalno klizanje.

Rješenje:

- a) Sa sl. P 2.9 (a) je očigledno da su komponentalna pomjerenja:

$$u_x = 0, \quad u_y = \alpha z, \quad u_z = 0.$$

- b) Tenzore deformacije i rotacije dobijamo saglasno izrazima (2.3:8) i (2.4:4):

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

što, u stvari, definiše ravnu deformaciju u ravni (y, z) , pa je u toj ravni:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

- c) S obzirom da su komponente tenzora deformacije nezavisne od x, y, z koordinata, stanje deformacije je homogeno.
 d) Glavne dilatacije u ravni (y, z) dobijamo iz izraza (2.11:7)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(0+0) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0-0)^2 + 4 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \pm \frac{\alpha}{2},$$

pa s obzirom da je jedna glavna dilatacija jednaka nuli, imamo:

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\alpha}{2}.$$

Korespondentni glavni pravci su $\vec{n}_2 = \vec{i}$, a preostala dva su određena sa

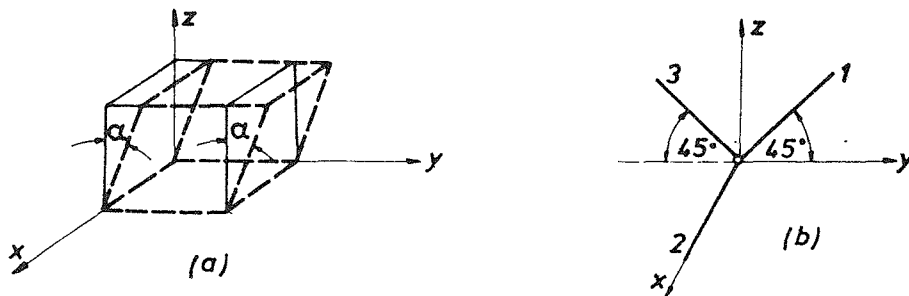
$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot \frac{\alpha}{2}}{0-0} = \infty, \quad \varphi = 45^\circ$$

što je prikazano na sl. P 2.9(b).

- e) Maksimalno klizanje je

$$\varepsilon_{kl}^{\max} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{\alpha}{2},$$

i dešava se između pravaca y i z (sl. P 2.9(b)).



Sl. P 2.9.

Primjer 2.10.

Tenzor ravne deformacije u tački definisan je sa: $\varepsilon_{xx} = 1 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{yy} = 4 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{xy} = 2 \cdot 10^{-3}$. Odrediti:

- a) dilataciju u pravcu koji zaklapa ugao od 30° sa x osom,
- b) klizanje između tog pravca i njemu upravnog pravca,
- c) glavne dilatacije i njihove pravce,
- d) maksimalno klizanje,
- e) Mohrov krug deformacije.

Rješenje:

- a) Koristeći izraz (2.11:4), dilatacija u pravcu \vec{n} je

$$\varepsilon_n = 1 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3,48 \cdot 10^{-3}.$$

- b) Klizanje između pravaca \vec{n} i \vec{l} (sl. P 2.10(a)) je prema izrazu (2.11:5)

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} (1 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-3}) \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2} = -2,3 \cdot 10^{-3}.$$

Dakle, ugao od 90° između pravaca \vec{n} i \vec{l} se povećao za vrijednost $4,6 \cdot 10^{-3}$ rad.

- c) Glavne dilatacije dobijamo iz izraza (2.11:7):

$$\varepsilon_{1,2} = 10^{-3} \cdot \left[\frac{1}{2} (1+4) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1-4)^2 + 4 \cdot 2^2} \right] = (2,5 \pm 2,5) \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_2 = 0.$$

Korespondentni glavni pravci su definisani uglom α određenim sa (2.11:6):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{(1-4) \cdot 10^{-3}} = -1,333, \quad \alpha = -26,5^\circ.$$

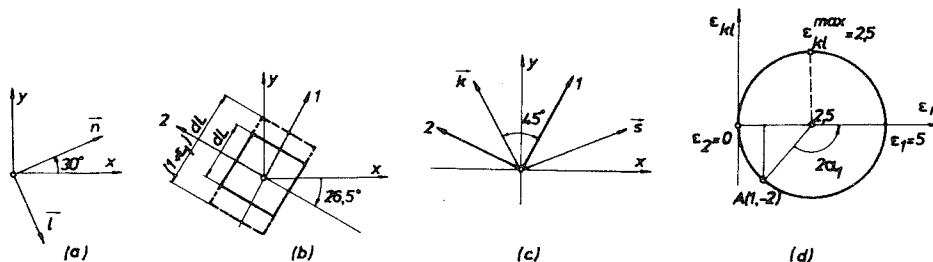
Kako je $\varepsilon_{xy} = 2 \cdot 10^{-3} > 0$, \vec{n}_1 prolazi kroz prvi i treći kvadrant (sl. P 2.10(b)).

- d) Maksimalno klizanje slijedi iz izraza (2.11:8)

$$\varepsilon_{kl}^{\max} = \frac{1}{2} (5-0) \cdot 10^{-3} = 2,5 \cdot 10^{-3},$$

i javlja se između upravnih pravaca \vec{k} i \vec{s} na sl P 2.10(c). Dakle, ugao između \vec{k} i \vec{s} se smanjio za $5 \cdot 10^{-3}$ rad.

- e) Mohrov krug deformacije prikazan je na sl. P 2.10(d).



Sl. P.2.10.

Primjer 2.11.

U tački A tijela u kojoj je stanje deformacije ravno, pomoću mjernih traka izmjerene su dilatacije $\varepsilon_l = 2 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_m = -3 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_n = 4 \cdot 10^{-5}$ za tri pravca \vec{l} , \vec{m} i \vec{n} , koji međusobno grade uglove od 60° , kao na sl. P 2.11 (a). Odrediti veličinu i pravac glavnih dilatacija u tački A . Nacrtati Mohrov krug deformacije.

Rješenje:

Da bismo definisali tenzor deformacije, koristimo se uslovima koji slijede iz izraza (2.11:4):

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{xx}$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{xx} \cos^2 60^\circ + \varepsilon_{yy} \sin^2 60^\circ + \varepsilon_{xy} \sin 2 \cdot 60^\circ$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{xx} \cos^2 120^\circ + \varepsilon_{yy} \sin^2 120^\circ + \varepsilon_{xy} \sin 2 \cdot 120^\circ,$$

odakle rješavanjem po ε_{xx} , ε_{yy} i ε_{xy} dobijamo:

$$\varepsilon_{xx} = 2 \cdot 10^{-5}, \quad \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = -4 \cdot 10^{-5}.$$

Glavne dilatacije sada možemo odrediti iz izraza (2.11:7):

$$\varepsilon_{1,2} = \left[\frac{1}{2}(2+0) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2-0)^2 + 4(-4)^2} \right] \cdot 10^{-5} = (1 \pm 4,12) \cdot 10^{-5}$$

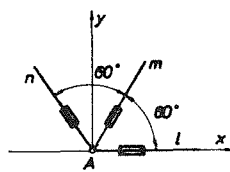
$$\varepsilon_1 = 5,12 \cdot 10^{-5}, \quad \varepsilon_2 = -3,12 \cdot 10^{-5}.$$

Glavni pravci su definisani sa (2.11:6):

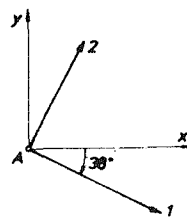
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot (-4)}{2-0} = -4, \quad \alpha = -38^\circ.$$

Kako je $\varepsilon_{xy} = -4 \cdot 10^{-5} < 0$, glavni pravac \vec{n}_1 prolazi kroz drugi i četvrti kvadrant (sl. P 2.11(b)).

Mohrov krug deformacije prikazan je na sl. P 2.11(c).

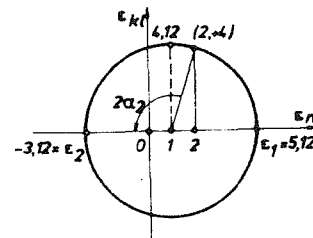


(a)



(b)

Sl. P 2.11.



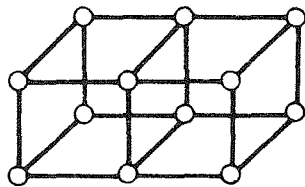
(c)

3. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE

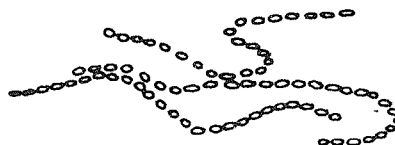
3.1. Uvodne napomene

U prethodnim dvjema glavama upoznali smo se sa pojmom napona i pojmom deformacije. Analiza koju smo sprovedi važi za sva tijela (materijale) koja se mogu smatrati kontinualnim tijelima. Međutim, različiti materijali se različito ponašaju pod djejtvom spoljašnjeg opterećenja, tj. jednom naprezanju odgovaraju različite deformacije za različite materijale. Naš je sada zadatak da za svaki materijal formulišemo jednačine koje opisuju njegovo ponašanje pod djejtvom spoljašnjeg opterećenja, tj. koje vezuju napon sa korespondentnom deformacijom. Ove jednačine nazivaju se konstitutivne jednačine materijala. Nazivaju se tako jer makroskopsko ponašanje (deformacija) materijala pod djejtvom spoljašnjeg opterećenja zavisi od unutrašnje konstitucije materijala. No, realni materijali imaju najčešće toliko složenu unutrašnju konstituciju (strukturu) da je tačno opisivanje njihovog ponašanja, pogotovo u složenim uslovima (promjenljivom opterećenju, povišenim temperaturama itd.), toliko složen zadatak da je nemoguće formulisati jednu jednačinu ili skup jednačina koje će u potpunosti opisati ponašanje tog materijala u svim uslovima. Zato se posebno formiraju jednačine koje opisuju ponašanje materijala u jednim uslovima, a posebno u drugim. Na primjer, za opterećenje ispod određene granice, komad materijala, recimo od aluminijuma, deformiše se elastično (povratno), pa se za taj opseg deformacija i opterećenja formulišu jedne jednačine koje povezuju napon i deformaciju. Kada, međutim, opterećenje pređe određenu granicu, materijal počinje da se i plastično (nepovratno) deformiše, pa u tom opsegu napona i deformacije važi drugi skup jednačina koje povezuju napon sa deformacijom. Osim toga, bitne razlike se pojavljuju zavisno od toga da li je materijal zagrijan ili ne, zavisno od brzine opterećenja, itd.

Da bi se formirale jednačine koje opisuju složeno ponašanje materijala, potrebno je poznavati i razumjeti unutrašnju strukturu materijala. Čvrsta tijela uglavnom posjeduju ili kristalnu ili amorfnu strukturu. Kod materijala sa kristalnom strukturom



(a)

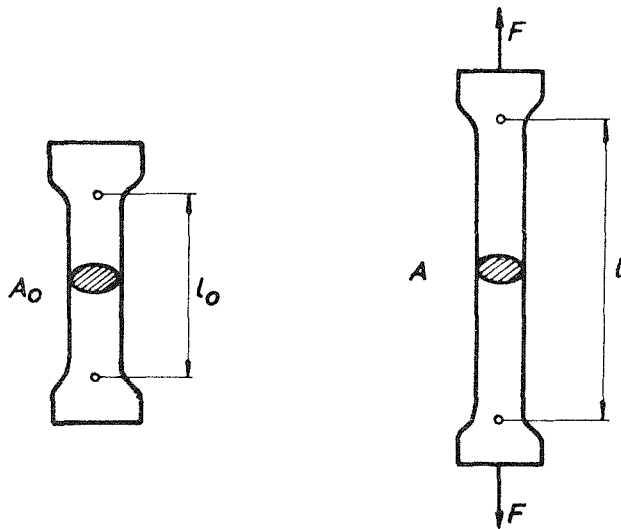


(b)

Sl. 3:1.

atomi (molekuli) su raspoređeni u regularnom, ponovljenom, trodimenzionalnom rasporedu, kao što je skicirano na sl. 3:1(a), dok su kod materijala sa amorfnom strukturom molekuli raspoređeni u duge lance koji se isprepliću i nadovezuju, kao što je skicirano na sl. 3:1(b). Kristalne su strukture svi metali i njihove legure, dok su amorfne strukture polimeri kao što su staklo, plastične mase, guma (elastomeri), celuloza itd. Posebno mjesto zauzimaju materijali organskog porijekla koji se koriste u industriji, kao što su drvo i koža. Ponašanje materijala, naravno, suštinski zavisi od unutrašnje strukture materijala. Neki fenomeni su karakteristični za amorfne materijale a manje za kristalne. Na primjer, viskozni efekti i uticaj vremena na ponašanje materijala veoma su izraženi kod amornih supstanci, a malo kod kristalnih na običnim temperaturama. Međutim, na povišenim temperaturama i kristalna tijela pokazuju viskozne (reološke) efekte (viskoelastičnost, viskoplastičnost, itd.).

Materijal po svojoj građi može biti homogen i nehomogen. Homogeni materijal ima istu strukturu i ista fizička svojstva na svakom mjestu, tj. u svakom dijelu. Pojedinačni kristal se može smatrati homogenim tijelom, dok je, recimo, neki metal (ili legura) nehomogen jer se sastoji od mnogo različitih kristala. Beton je takođe, očigledno, nehomogen jer se sastoji od pijeska, šljunka i cementne mase. Međutim, u tehničkoj praksi se mnogi materijali, iako u suštini nehomogeni, tretiraju kao homogeni bez veće greške. To je zato što, na primjer, u 1 cm^3 čelika ima na milione kristala tako da, iako su oni međusobno različiti, postoji neka prosječna mjera fizičkih svojstava čelika koja je konstantna u svim malim dijelovima materijala. Druga važna osobina materijala je da u jednoj istoj tački on može imati različite osobine u različitim pravcima. Ovo se zove anizotropija (anizotropnost) materijala. Na primjer, pojedinačni kristal ima izraženu anizotropiju, drvo takođe. Guma i staklo su, recimo, izotropni. Međutim, dok god su dimenzije tijela velike u poređenju sa dimenzijama kristala, i mnoge kristalne materije (čelik i ostali metali) mogu se smatrati izotropnim pod uslovom da su kristali proizvoljno orijentisani u tijelu. Ovo je slično situaciji sa gomilom proizvoljno orijentisanih drva: svako pojedinačno drvo je anizotropno, ali se cjelina može smatrati izotropnom.



Sl. 3:2.

U svakom slučaju, problem iznalaženja (formulisanja) jednačina koje tačno opisuju i predviđaju ponašanje materijala je izuzetno složen problem. Teorijska analiza izlazi van okvira klasične mehanike i uključuje molekularnu fiziku, fiziku čvrstih stanja i metalurgiju. Uprkos tome, ponašanje materijala teorijski nije dovoljno objašnjeno. Suštinski su zato informacije i zaključci koji se dobijaju obilnim eksperimentisanjem sa različitim materijalima i u različitim uslovima.

3.2. Eksperimentalni podaci

3.2.1. Test istezanja

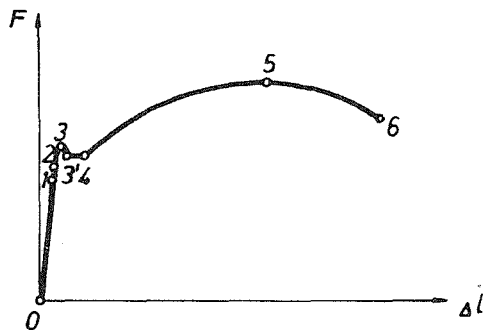
Pri formulisanju konstitutivnih jednačina obimno se koriste rezultati, iskustva i saznanja stečena nizom eksperimenata različite vrste. Klasičan eksperiment, koji otkriva dosta o ponašanju materijala, je test istezanja. Epruveta početne dužine l_0 i površine poprečnog presjeka A_0 (sl. 3:2) od materijala koji se ispituje, isteže se u mašini za istezanje (kidalici). Pri porastu sile F raste i izduženje epruvete Δl . Mašina za ispitivanje obično ima napravu koja u toku sprovođenja eksperimenta crta dijagram $(F, \Delta l)$. Na primjer, u eksperimentu sa čelikom dobija se kriva prikazana na sl. 3:3. U tački 6 dogodio se lom epruvete i eksperiment je završen. Obično se, međutim, rezultati dobijeni eksperimentom obrazlažu i interpretiraju crtajući umjesto dijagrama (sila, izduženje), dijagram (napon, deformacija). Pri tome se za mjeru deformacije uzima tzv.

inžinjerska deformacija $\varepsilon_0 = \frac{\Delta l}{l_0}$, a za napon inžinjerski napon $\sigma_0 = \frac{F}{A_0}$, pa se crta

dijagram $(\sigma_0, \varepsilon_0)$, ili se pak koriste prirodna (logaritamska) mjera deformacije $\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$.

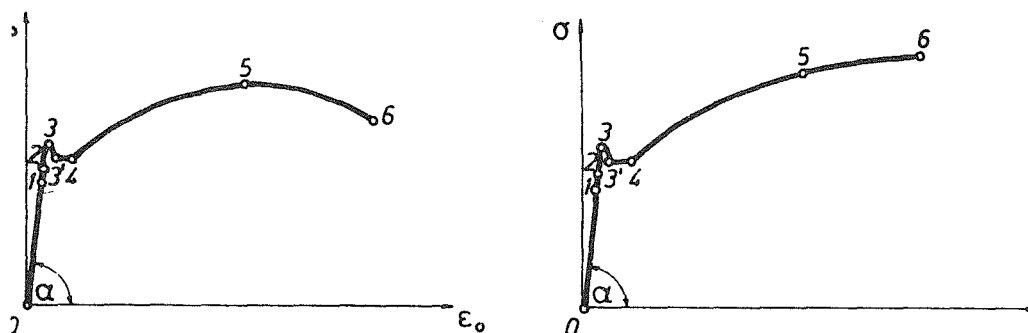
i stvarni napon $\sigma = \frac{F}{A}$, pa se crta dijagram (σ, ε) . Razlika je ovdje, naravno, suštinska

jer se epruveta može znatno isteći prije loma, tj. deformacije nisu male, pa se l znatno razlikuje od l_0 , i A od A_0 , te nije svejedno da li se napon definiše kao sila po početnoj ili



Sl. 3:3.

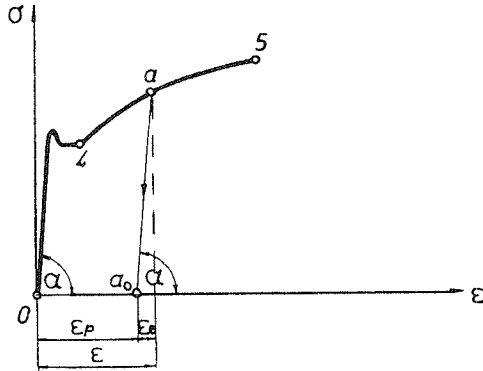
trenutnoj površini poprečnog presjeka, a deformacija kao promjena dužine u odnosu na početnu ili trenutnu dužinu epruvete. Na sl. 3:4 prikazani su dijagrami (σ_0, ϵ_0) i (σ, ϵ). Od tačke 0–1 na sl. 3:4 imamo linearnu vezu između napona i deformacije $\sigma = E \cdot \epsilon$, tj. napon i deformacija su proporcionalni sa koeficijentom proporcionalnosti E koji se naziva Youngov modul elastičnosti. Napon koji odgovara tački 1 naziva se napon na granici proporcionalnosti (σ_p). Očigledno je $E = \text{tg } \alpha$, gdje je α ugao prikazan na sl. 3:4. Deformacija od 0–1 je elastična, tj. povratna. Elastična deformacija se nastavlja još neznatno iza tačke proporcionalnosti 1, po nelinearnom dijelu krive, do



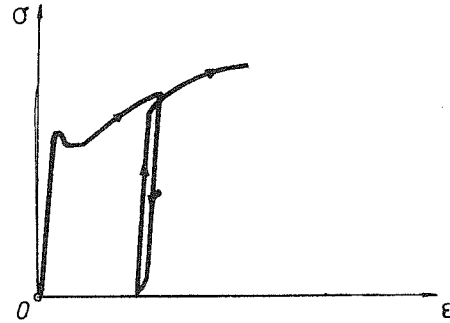
Sl. 3:4.

tačke 2. Dakle, od tačke 0 do tačke 2 imamo elastične deformacije koje su okarakterisane time da su povratne, tj. ako rasteretimo epruvetu, ona se vraća u svoj prvobitni oblik. S obzirom da su tačke 1 i 2 vrlo bliske, obično se uzima da se one poklapaju, tj. da je granica elastičnosti tačka proporcionalnosti 1, gdje se završava linearni dio krive. Za metale je deformacija na granici elastičnosti reda veličine 10^{-3} . Napon koji odgovara tački 2 naziva se napon na granici elastičnosti (σ_E). Iza granice elastičnosti počinju takođe i plastične deformacije. Nagli pad napona poslije tačke 3 i horizontalni dio krive 3'–4 karakterističan je samo za čelik i neke legure, ali ne za sve metale (recimo, ne za aluminijum ili bakar). Tačka 3 se zove gornja granica plastičnog tečenja, a tačka 3' donja granica plastičnog tečenja. Napon koji odgovara tački 3' obično se označava sa σ_T (napon tečenja). Od tačke 4 pa nadalje ka tački 5, deformacija se nastavlja sa porastom napona. Tu se događa tzv. očvršćavanje materijala koje je posljedica unutrašnjih promjena u strukturi materijala, tj. dislokacionog mehanizma koji se odvija u materijalu u toku plastične deformacije. U proizvoljnom trenutku deformacije, negdje između tačaka 4 i 5, ukupna deformacija ϵ sastavljena je iz elastične komponente deformacije i plastične komponente deformacije, kao što je prikazano na sl. 3:5, tako da je $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$. Naime, ako bismo iz tačke a izvršili rasterećenje, tj. uklanjanje sile, tada bi napon i deformacija opali linearno, saglasno elastičnom zakonu $\sigma = E \cdot \epsilon$, do tačke a_0 , gdje imamo da je sila (i napon) jednaka nuli, a zaostala (trajna) plastična deformacija ϵ_p . Dakle, od ukupne deformacije ϵ u tački a rasterećenjem se povratio elastični dio deformacije ϵ_e , a ostao je plastični dio deformacije ϵ_p . Ovdje treba istaći da pretpostavljamo da plastična deformacija koja se dogodila od tačke 4 do tačke a ne mijenja znatno elastična svojstva materijala, tako da smatramo da je rasterećenje sa istim nagibom $\text{tg } \alpha = E$, kao što je i na početku eksperimenta. Ako bi sada iz tačke a_0 ponovo opteretili epruvetu, vratili bi se do tačke a po pravoj $a_0 - a$, a zatim nastavili po krivoj $a - 5$. Pri tome zanemarujemo malu petlju koja se javlja pri rasterećivanju i ponovnom opterećivanju (sl. 3:6), a koja se može registrovati pri pažljivo vršenom eksperimentu. Ova petlja naziva se elastični

histerezis, a površina njome omeđena predstavlja rad koji se u ciklusu rasterećenja i opterećenja izgubio na toplotu. Ovo postaje od značaja i mora se uključiti u analizu kada su u pitanju ciklična, više puta ponovljena, opterećenja.



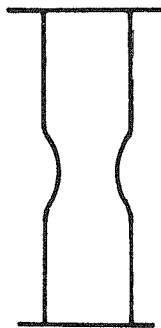
Sl. 3:5.



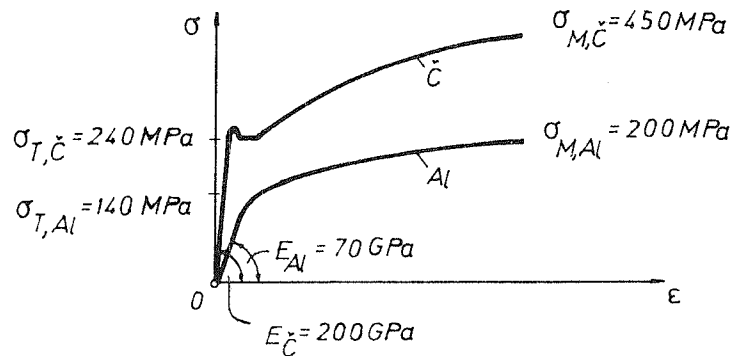
Sl. 3:6.

Sa daljim porastom sile dolazimo do tačke 5 u kojoj se javlja fenomen nestabilnosti, tj. epruveta se naglo sužava na nekom mjestu (kontrakcija epruvete), sl. 3:7. Deformacija koja odgovara tački 5 je za čelik oko $\epsilon = 0,2$. Dalja deformacija se lokalizuje u predjelu suženja i može se odvijati pri smanjenju sile (dio 5–6 na dijagramu). Uskoro, u tački 6 dolazi do loma epruvete i završetka eksperimenta. Dakle, maksimalna sila koju epruveta može izdržati odgovara tački 5, pa se korespondentni napon $\sigma_M = \frac{F_{\max}}{A_0}$ naziva jačina materijala na kidanje.

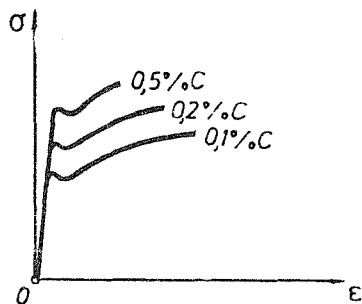
Za različite materijale dijagram (σ, ϵ) je različit. Na primjer, aluminijum nema izraženu gornju i donju tačku tečenja i, naravno, znatno je manje otporan na deformaciju od čelika (sl. 3:8). (Za materijale koji nemaju izraženu gornju i donju tačku tečenja, napon tečenja σ_T se definiše kao napon kome odgovara trajna (plastična) deformacija u iznosu od 0,2%). Osim toga, jedan isti materijal se ponaša različito zavisno od sastava. Na primjer, zavisno od sadržaja ugljenika u čeliku, dijagram (σ, ϵ) za čelik izgleda kao na sl. 3:9.



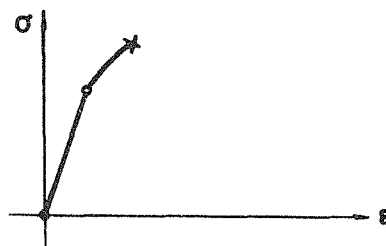
Sl. 3:7.



Sl. 3:8.

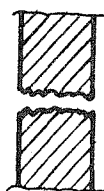


Sl. 3:9.

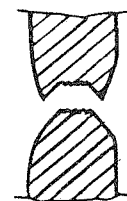


Sl. 3:10.

Aluminijum i čelik, kao i mnogi drugi metali, imaju u normalnim uslovima izraženu sposobnost ka plastičnoj deformaciji. To su tzv. žilavi materijali. Postoje, međutim, i materijali (kao što su kamen, beton, staklo) koji imaju malu sposobnost za plastičnu deformaciju, tj. poslije granice elastičnosti, sa porastom sile deformacija malo poraste i ubrzo nastaje lom. Ovo su tzv. kruti materijali. Dijagram (σ , ϵ) za kruti materijal prikazan je na sl. 3:10. I izgled loma se razlikuje kod krstog i žilavog materijala (sl. 3:11). Osim toga, dok žilavi materijali pokazuju približno iste osobine na pritisak kao i na istežanje, kruti materijali pokazuju slabu izdržljivost na istežanje a dobru izdržljivost na pritisak (sl. 3:12). To je zato što usljed prisustva malih pukotina kod krutih materijala, sila istežanja nastoji da otvori i proširi ove pukotine, pa time i da ubrza lom, dok sila pritiska nema takvu tendenciju. Zato se kruti materijali uglavnom i koriste za elemente konstrukcija koji treba da budu opterećeni samo na pritisak (na primjer, betonski stubovi). Međutim, kod metala (dakle, u normalnim uslovima, žilavih materijala) javlja se jedan poseban fenomen. Naime, ako metalnu epruvetu opteretimo na istežanje ili na pritisak

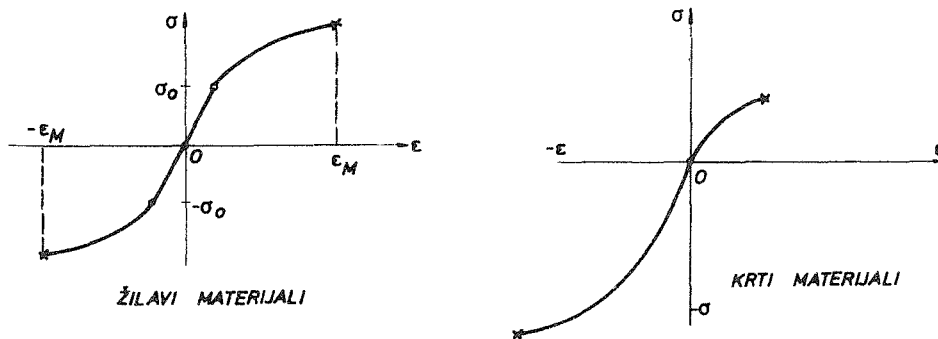


KRTI LOM

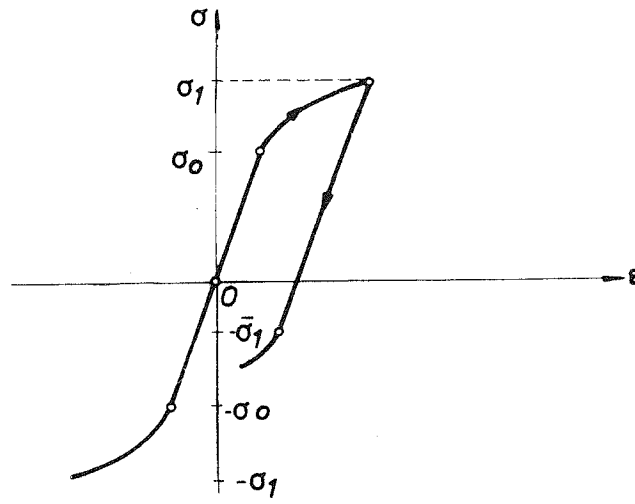


ŽILAVI LOM

Sl. 3:11.

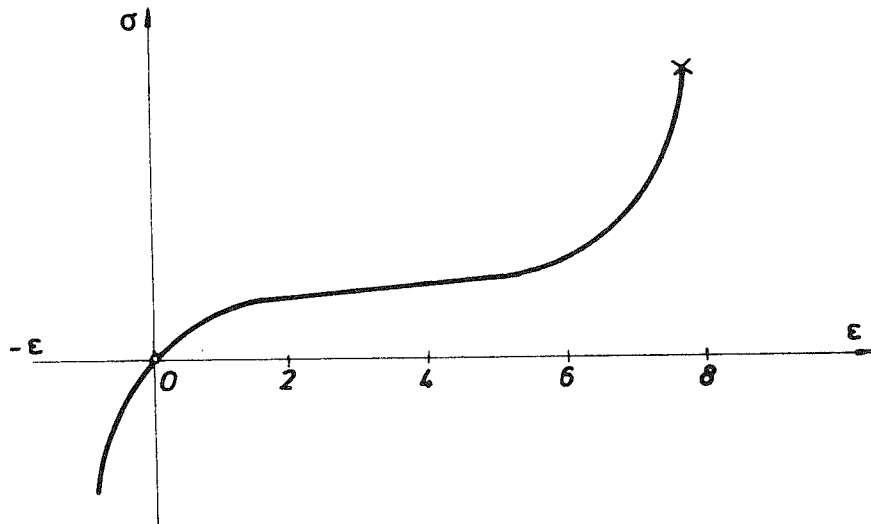


Sl. 3:12.



Sl. 3:13.

iz nenapregnutog stanja, onda su joj osobine na istežanje i pritisak iste, tj. plastična deformacija pri istežanju počinje pri naponu σ_0 , a kod pritiska pri naponu $-\sigma_0$, a kriva (σ, ϵ) je simetrična u odnosu na koordinatni početak 0. Ali, ako smo epruvetu prvo opteretili do napona σ_1 , zatim je rasteretili pa opteretili na pritisak, plastična deformacija počinje ne pri naponu $-\sigma_1$, već pri znatno manjem naponu: $-\bar{\sigma}_1$ (sl. 3:13). Ovo smanjenje granice elastičnosti na pritisak nastalo nakon prethodne plastične deformacije na istežanje naziva se Bauschingerov efekat. On je posljedica složenog mehanizma koji se javlja u materijalu pri odvijanju plastične deformacije i koji mijenja unutrašnju strukturu materijala i čini fenomen plastične deformacije izuzetno složenim.



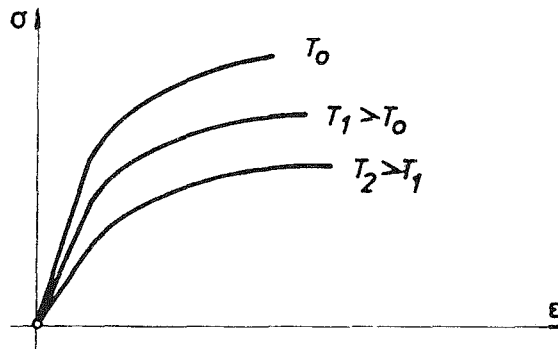
Sl. 3:14.

Dok metali i mnogi drugi materijali pružaju otpor deformisanju (tj. za veću deformaciju potreban je veći napon), dotle postoje neki materijali koji gotovo ne daju otpor deformisanju. Takvi su glina, asfalt, razne plastične mase itd. Najzad, postoje i materijali koji se mogu veoma mnogo povratno (elastično) deformisati. Takva je, na primjer, guma. Mekani gumeni štap se može isteći na dužinu 7–8 puta veću od početne dužine prije nego dođe do prekida (sl. 3:14). Pri tome je najveći dio deformacije elastičan.

3.2.2. Uticaj temperature i vremena na ponašanje materijala

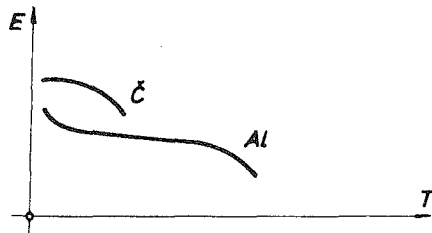
Izgled krive (σ, ϵ) dobijene u testu istezanja zavisi od temperature pri kojoj je test izveden, tj. od zagrijanosti epruvete koja se isteže. Za različite temperature dobijaju se različite krive, kao što je prikazano na sl. 3:15. Dakle, temperatura bitno utiče na ponašanje materijala. Sa dijagrama je očigledno da se pri povišenju temperature smanjuje granica elastičnosti, tj. početak plastične deformacije, te smanjuje otpor ka deformaciji, tj. povećava žilavost materijala. Modul elastičnosti se takođe smanjuje (sl. 3:16).

Brzina deformacije (tj. brzina s kojom se opterećuje i isteže epruveta) ima sličan uticaj na krivu (σ, ϵ), pri čemu smanjenje brzine deformacije ($\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$) ima isti uticaj kao povišenje temperature, tj. pri malim brzinama deformacije (sporim deformacijama) raste žilavost materijala, a pri brzim opada (sl. 3:17).

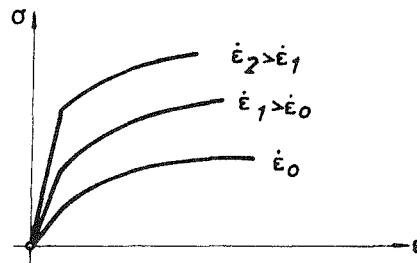


Sl. 3:15.

Poseban fenomen koji se javlja u ponašanju materijala su tzv. viskozni efekti. Viskoznost je osobina da se deformacija nastavlja (raste) sa vremenom i pri konstantnoj sili (naponu). To je, dakle, različito od svojstva elastičnosti gdje za jedan napon imamo jednu (konstantnu) deformaciju bez obzira koliko dugo vremena držali taj napon. Viskozni su, na primjer, fluidi, a kod čvrstih tijela viskoznost se uglavnom javlja zajedno sa elastičnim i plastičnim svojstvima materijala, pa govorimo o tzv. viskoelastičnim i viskoplastičnim materijalima (ili materijalima u uslovima viskoelastičnih, odnosno viskoplastičnih deformacija). Dijagramski, uticaj viskoznosti (tj.

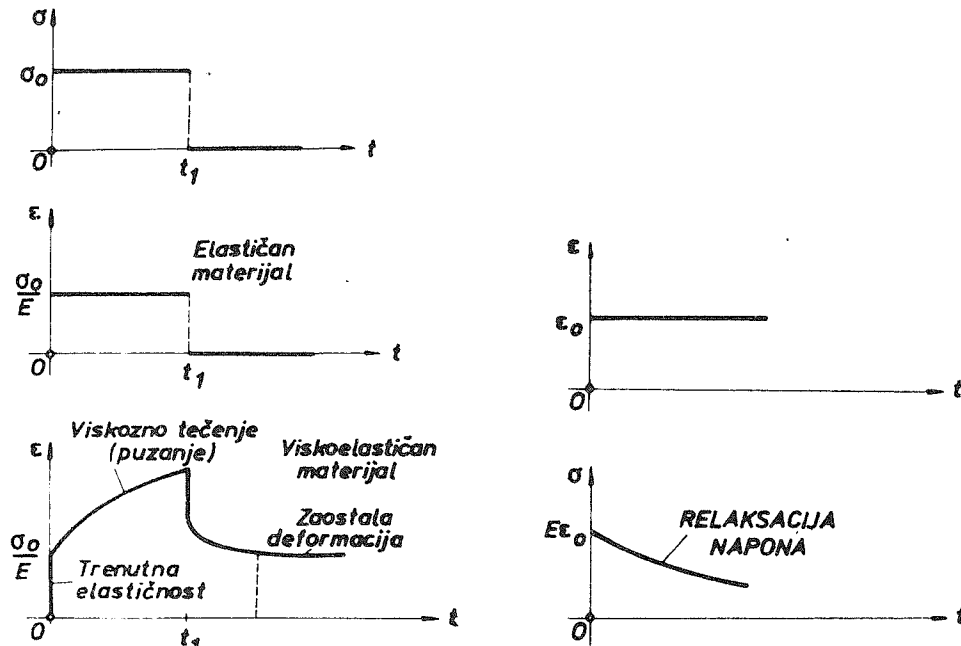


Sl. 3:16.



Sl. 3:17.

uticaj vremena) na ponašanje materijala prikazan je na sl. 3:18. Slika 3:18 odgovara tzv. testu puzanja, gdje držimo konstantan napon, a pratimo korespondentnu deformaciju. Postoji takođe i test relaksacije kada naglo isteglimo epruvetu do deformacije ϵ i držimo tu deformaciju konstantnom, a pratimo koliki je napon potreban za tu deformaciju. Za elastičan materijal napon je, naravno, konstantan, a za viskoelastičan on opada (relaksacija napona) (sl. 3:19).



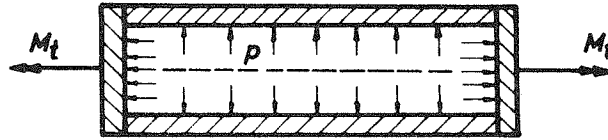
Sl. 3:18.

Sl. 3:19.

Na običnim (sobnim) temperaturama metali ne pokazuju viskozne (viskoelastične) efekte. Pokazuju ih u većoj ili manjoj mjeri samo na povišenim temperaturama ili pri velikim brzinama deformisanja. Polimeri, međutim, pokazuju izražene viskozne efekte i na običnim temperaturama. Beton takođe.

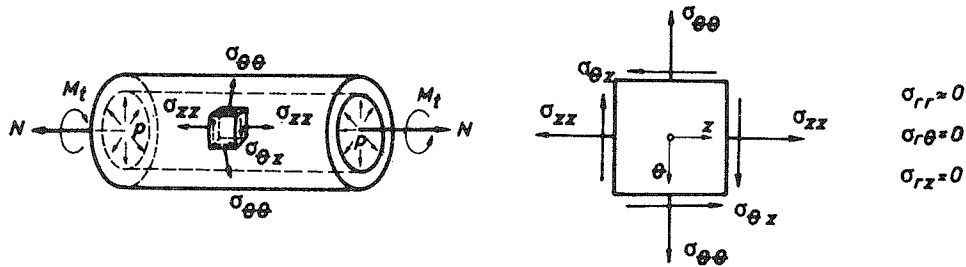
3.2.3. Testiranje materijala u uslovima kombinovanog naprezanja

Iako test istezanja pruža dosta informacija koje se koriste pri formulaciji teorije koja treba da objasni i predvidi ponašanje materijala u složenim uslovima, neophodno je vršiti i složenije testove (u uslovima kombinovanog naprezanja) da bi se provjerila teorija koju razvijamo i predlažemo, kao i da bi se stekla nova saznanja i iskustva o ponašanju i prirodi materijala. Jedan od klasičnih testova ovakve vrste je test sa tankozidnom cijevi koja je opterećena na kombinovano (složeno) naprezanje aksijalnom silom, unutrašnjim pritiskom i momentom torzije (sl. 3:20). Stanje napona u tačkama cijevi je približno ravno, kao što je prikazano na sl. 3:21. Mnogo korisnih informacija o ponašanju materijala je dobijeno iz rezultata ovog testa. Na primjer, on ukazuje da je smičuća komponenta napona najuticajnija na izazivanje plastične deformacije.



Sl. 3:20.

Pored ovog, značajni su testovi u kojima se materijal ispituje pod jednolikim hidrostatičkim pritiskom. Ovi testovi pokazuju da pod hidrostatičkim pritiskom homogeni materijali mogu da izdrže ogromne pritiske a da pri tom ostanu elastični. Dakle, sam hidrostatički pritisak ne izaziva plastičnu deformaciju, ali ako djeluje zajedno sa drugim opterećenjem koje izaziva plastičnu deformaciju, hidrostatički pritisak povećava sposobnost materijala da se plastično deformiše, tj. odlaže lom materijala.



Sl. 3:21.

Napominjemo, na kraju, da se vrše i mnogi drugi testovi različite prirode, na primjer, testovi ispitivanja materijala udarom, promjenljivim opterećenjem itd.

3.3. Konstitutivne jednačine za materijal u uslovima malih elastičnih deformacija

U prethodnom poglavlju vidjeli smo da je početni dio krive (σ, ϵ) linearan, a deformacija povratna, tj. elastična. Nakon prelaska određene granice, kriva postaje nelinearna a deformacije nepovratne – plastične (za slučaj metala), ili i dalje povratne – elastične (za slučaj gume). Mi ćemo se, međutim, ograničiti u ovom poglavlju samo na slučaj kada su deformacije elastične i male (reda veličine do 10^{-3}), što je i najčešći slučaj u građevinskim i mašinskim konstrukcijama. Naš je sada zadatak da uspostavimo vezu između napona i deformacije, tj. formulišemo konstitutivne jednačine u uslovima malih elastičnih deformacija.

3.3.1. Konstitutivne jednačine za izotropan materijal (Hookeov zakon)

Vidjeli smo da je početni dio krive (σ, ϵ) u testu istezanja linearan (sl. 3:22), tj. ako je osa z uzdužna osa epruvete, tada je dilatacija u pravcu z ose ϵ_{zz} proporcionalna sa naponom, tj.

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz}, \quad (1)$$

gdje je $E = \text{const.}$ karakteristika materijala koja se zove Youngov modul elastičnosti. Eksperimenti pokazuju da je za izotropan materijal poprečna deformacija, tj. dilatacija u bilo kom pravcu upravnom na uzdužnu z osu, proporcionalna longitudinalnoj deformaciji

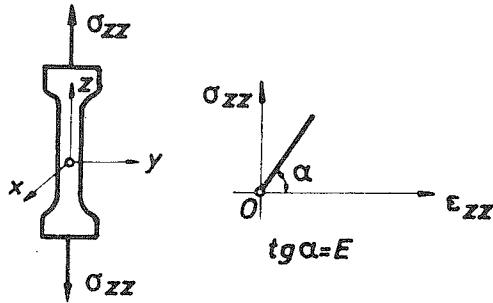
$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{zz}, \quad (2)$$

gdje je $\nu = \text{const.}$ takođe karakteristika materijala koja se zove Poissonov koeficijent ili koeficijent bočne kontrakcije. Prema tome je

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}, \quad (3)$$

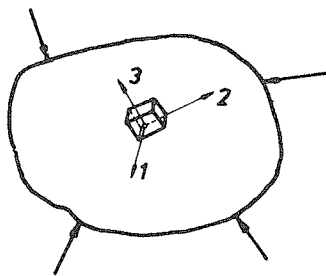
tj. u jednodimenzionom testu istezanja sve tri dilatacije (ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz}) su proporcionalne (linearno povezane) sa naponom σ_{zz} . Youngov modul ima dimenziju napona i obično je oko 1000 puta veći od napona na granici elastičnosti (na primjer, za čelik je $E \cong 200 \text{ GPa}$, $\sigma_E \cong 200 \text{ MPa}$), dok je Poissonov koeficijent bezdimenzionalan broj i za većinu metala je $\nu \cong 1/3$. Inače je uvijek $E > 0$, $0 < \nu < 1/2$.

Naš je sada zadatak da iskoristimo ove eksperimentalne činjenice i da proširimo vezu između napona i deformacije na trodimenzionalan slučaj, tj. na opšte prostorno stanje napona i deformacije. Pri tome, kao što smo rekli, smatraćemo da je materijal izotropan (ima iste osobine u svim pravcima). Tada se glavni pravci deformacije poklapaju sa glavnim pravcima napona, tj. maksimalne dilatacije su u pravcima maksimalnih (glavnih) napona i nema klizanja između pravaca glavnih napona. Dakle, uočimo u proizvolj-

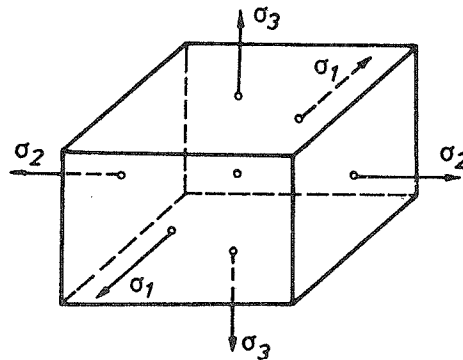


Sl. 3:22.

noj tački napregnutog tijela mali kvadar sa ivicama paralelnim pravcima glavnih napona u toj tački (sl. 3:23). Izdvojimo taj kvadar. Na stranama kvadra djeluju glavni naponi σ_1 , σ_2 , σ_3 , kao što je prikazano na sl. 3:24.



Sl. 3:23.



Sl. 3:24.

Ekperimenti su pokazali da za male elastične deformacije važi princip superpozicije, tj. da je deformacija od ukupnog opterećenja jednaka zbiru deformacija od pojedinih opterećenja. Zato je, na primjer,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3,$$

odnosno

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (4)$$

Analogno je:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu (\sigma_3 + \sigma_1)] \quad (5)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (6)$$

Klizanja između pravaca 1, 2 i 3 nema jer su pravci 1, 2 i 3 istovremeno i glavni pravci deformacije, s obzirom da je materijal izotropan. Dakle, sa jednačinama (4) – (6) uspostavili smo vezu između glavnih napona i glavnih dilatacija. Lako je sada naći veze između komponentalnih napona i deformacija za proizvoljno orijentisan trijedrar (x, y, z) . Zaista, koristeći se izrazima iz poglavlja 1.3 i 2.3, nalazimo da je:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= n_{1x}^2 \sigma_1 + n_{2x}^2 \sigma_2 + n_{3x}^2 \sigma_3 \\ \varepsilon_{xx} &= n_{1x}^2 \varepsilon_1 + n_{2x}^2 \varepsilon_2 + n_{3x}^2 \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (7)$$

gdje su $\vec{n}_i = \{n_{ix}, n_{iy}, n_{iz}\}$, $i=1, 2, 3$, ortovi glavnih pravaca. Ako sada pomnožimo jednačine (4), (5) i (6) redom sa n_{1x}^2 , n_{2x}^2 , n_{3x}^2 i saberemo, dobijamo

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - n_{1x}^2 \sigma_1 - n_{2x}^2 \sigma_2 - n_{3x}^2 \sigma_3)],$$

s obzirom da je $n_{1x}^2 + n_{2x}^2 + n_{3x}^2 = 1$, tj.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_{xx})],$$

odnosno, s obzirom na invarijantnost $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]. \quad (8)$$

Analogno se dobija:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \quad (9)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]. \quad (10)$$

Vežu između smičućih napona i klizanja za pravce x , y , z dobijamo polazeći od izraza:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= n_{1x}n_{1y}\sigma_1 + n_{2x}n_{2y}\sigma_2 + n_{3x}n_{3y}\sigma_3 \\ \varepsilon_{xy} &= n_{1x}n_{1y}\varepsilon_1 + n_{2x}n_{2y}\varepsilon_2 + n_{3x}n_{3y}\varepsilon_3.\end{aligned}$$

Množeći jednačine (4), (5) i (6) sa $n_{1x}n_{1y}$, $n_{2x}n_{2y}$ i $n_{3x}n_{3y}$ redom, i sabiranjem dobijamo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{E} \{ \sigma_{xy} - v [\sigma_1 (n_{2x}n_{2y} + n_{3x}n_{3y}) + \sigma_2 (n_{3x}n_{3y} + n_{1x}n_{1y}) + \\ &+ \sigma_3 (n_{1x}n_{1y} + n_{2x}n_{2y})],\end{aligned}$$

ili, s obzirom da je $\vec{i} \cdot \vec{j} = n_{1x}n_{1y} + n_{2x}n_{2y} + n_{3x}n_{3y} = 0$,

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{E} (\sigma_{xy} + v\sigma_{xy}),$$

tj. konačno

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+v}{E} \sigma_{xy}. \quad (11)$$

Analogno se dobija:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1+v}{E} \sigma_{yz} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1+v}{E} \sigma_{zx}. \quad (13)$$

Jednačine (8)–(13) daju vežu između komponenti napona i deformacije za proizvoljan trijedar osa (x , y , z). Ove veže su uopštenje Hookeovog zakona za jednodimenzioni slučaj $\sigma = E \cdot \varepsilon$, pa se zovu generalisani Hookeov zakon. To su, dakle, konstitutivne jednačine za izotropan materijal u uslovima malih elastičnih deformacija. Evidentno je da su to linearne veže između napona i deformacije (linearna elastičnost). Dvije konstante E i ν koje se pri tome javljaju su koeficijenti proporcionalnosti. Često se, međutim, pogodnosti radi, uvode i druge konstante koje su, u stvari, kombinacija od E i ν . Na primjer, modul smicanja (ili klizanja) je

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (14)$$

tako da se jednačine (11)–(13) kraće zapisuju u obliku:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \sigma_{yz} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G} \sigma_{zx}. \quad (17)$$

Geometrijsko-fizička interpretacija konstitutivnih jednačina (8)–(13) je sljedeća: pod djejtvom normalnih napona σ_{xx} , σ_{yy} i σ_{zz} javiće se dilatacije ε_{xx} , ε_{yy} i ε_{zz} date sa (8)–(10), a pod djejtvom smičućih napona σ_{xy} , σ_{yz} i σ_{zx} javiće se klizanja ε_{xy} , ε_{yz} i ε_{zx} data sa (11)–(13).

Sabiranjem jednačina (8)–(10) dobijamo da je kubna dilatacija $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ proporcionalna sa srednjim normalnim naponom $\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$, tj.

$$e = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_s, \quad (18)$$

ili uvodeći modul kompresije

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (19)$$

$$e = \frac{1}{K} \sigma_s. \quad (20)$$

S obzirom da se materijali ponašaju tako da se pri pritisku zapremina smanjuje i obrnuto, tj. ako je $\sigma_s < 0$, onda je i $e < 0$, to mora biti $K > 0$, tj. $E > 0$ i $\nu < 1/2$.

Jednačine (8)–(13) daju deformacije izražene preko napona. Lako je naći njima inverzne jednačine koje daju napone izražene preko deformacija:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda e & \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda e & \sigma_{yz} &= 2\mu\varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zz} &= 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda e & \sigma_{zx} &= 2\mu\varepsilon_{zx}, \end{aligned} \quad (21)$$

gdje je $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ kubna dilatacija, a λ i μ su tzv. Laméove konstante koje su, izražene preko E i ν , jednake:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Očigledno je, dakle, da za izotropan materijal u uslovima malih elastičnih deformacija imamo samo dvije nezavisne konstante (karakteristike materijala), jer se ostale mogu izraziti preko te dvije. Najčešće se za te dvije konstante koriste ili E i ν , ili K i G , ili λ i μ . Vrijednosti konstanti E i ν za nekoliko karakterističnih materijala su date u tabeli 3:1.

Tabela 3:1. Fizička svojstva nekih materijala¹

Materijal	Modul elast. E (GPa)	Poissonov k. ν	Granica plast. σ_T (MPa)	Jačina na kidanje σ_M (MPa)	Koef. term. eksp. $\alpha \cdot 10^5$ ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
Aluminijum	70	0,32	140	200	2,34
Bakar	110	0,33	180	300	1,65
Čelik	200	0,30	240	450	1,17
Liveno gvož.	100	0,25	–	800 (pritisak)	1,04
				200 (zatezanje)	
Beton	20	0,15	–	40 (pritisak)	1,08
				4 (zatezanje)	

¹ Vrijednosti date u ovoj tabeli variraju u velikoj mjeri zavisno od sastava materijala i procesa izrade.

Hookeov zakon poprima posebno jednostavan oblik ako se razdvoje napon i deformacija na sferni i devijatorski dio:

$$\sigma' = 2G\varepsilon', \quad \sigma_s = 3K\varepsilon_s, \quad (23)$$

gdje σ' i ε' stoje za devijatorske komponente napona i deformacije, a σ_s i ε_s su sferne komponente.

Primjer 3.1.

Konstitutivne jednačine linearne elastičnosti su:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2G} \sigma_{zx}. \end{aligned} \quad (a)$$

Naći inverzne jednačine koje izražavaju napon preko deformacije.

Rješenje:

Sabirajući prve tri jednačine (a) imamo

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}),$$

tj.

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \frac{E}{1-2\nu} e, \quad e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \quad (b)$$

Iz prve jednačine (a) je

$$E\varepsilon_{xx} - \nu\sigma_{xx} = \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}),$$

pa zamjenom relacije (b) u ovu jednačinu dobijamo

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e.$$

Konstante $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ i $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ su Laméove konstante. Dakle,

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda e. \quad (c)$$

Analogno se dobija:

$$\sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda e \quad (d)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda e. \quad (e)$$

Iz zadnje tri jednačine (a) direktno slijedi:

$$\sigma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy} \quad (f)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz} \quad (g)$$

$$\sigma_{zx} = 2\mu \varepsilon_{zx}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (h)$$

Jednačine (c)–(h) su inverzne jednačine jednačinama (a) i daju komponentalne napone preko komponentalnih deformacija.

Primjer 3.2.

Stanje deformacije u nekoj tački tijela definisano je sa:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 \cdot 10^{-4}, & \varepsilon_{yy} &= 2 \cdot 10^{-4}, & \varepsilon_{zz} &= 0,5 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_{xy} &= 0,25 \cdot 10^{-4}, & \varepsilon_{yz} &= -0,5 \cdot 10^{-4}, & \varepsilon_{zx} &= 0,9 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Koliki su korespondentni komponentalni naponi za materijal sa modulom elastičnosti $E = 210$ GPa i Poissonovim koeficijentom $\nu = 0,3$? Odrediti modul kompresije i srednji normalni napon.

Rješenje:

Kubna dilatacija je

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (1 + 2 + 0,5) \cdot 10^{-4} = 3,5 \cdot 10^{-4},$$

a Laméove konstante:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210}{2(1+0,3)} = 80,8 \text{ GPa},$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{0,3 \cdot 210}{(1+0,3)(1-2 \cdot 0,3)} = 121,2 \text{ GPa},$$

pa je

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda e = 2 \cdot 80,8 \cdot 1 \cdot 10^{-4} + 121,2 \cdot 3,5 \cdot 10^{-4} = \\ &= 585,7 \cdot 10^{-4} \text{ GPa} \cong 58,6 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Analogno se dobija:

$$\sigma_{yy} = 2\mu \varepsilon_{yy} + \lambda e = \dots = 74,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \varepsilon_{zz} + \lambda e = \dots = 50,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy} = \dots = 4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz} = \dots = -8,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zx} = 2\mu \varepsilon_{zx} = \dots = 14,5 \text{ MPa}.$$

Srednji normalni napon je

$$\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(58,6 + 74,7 + 50,5) = 61,3 \text{ MPa},$$

pa je modul kompresije

$$K = \frac{\sigma_s}{e} = \frac{61,3}{3,5 \cdot 10^{-4}} = 17,5 \cdot 10^4 \text{ MPa} = 175 \text{ GPa}.$$

Modul kompresije može se dobiti i iz relacija:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 121,2 + \frac{2}{3} \cdot 80,8 = 175 \text{ GPa},$$

ili

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{210}{3(1-2 \cdot 0,3)} = 175 \text{ GPa}.$$

Primjer 3.3.

Dokazati da je pretpostavka o nekompresibilnosti izotropnog elastičnog tijela ekvivalentna pretpostavci da je Poissonov koeficijent jednak 1/2.

Rješenje:

Kubna dilatacija definisana je sa

$$e = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad (\text{a})$$

a izražena preko napona je

$$e = \frac{\sigma_s}{K}, \quad (\text{b})$$

gdje je σ_s srednji normalni napon, a K modul kompresije. Ako je materijal nekompresibilan (ne mijenja zapreminu prilikom deformacije), tada mora biti $e=0$, a to znači iz (b) da modul kompresije mora biti beskonačno veliki. Kako je

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

to za $K = \infty$ mora biti $\nu = 1/2$, što znači da je Poissonov koeficijent za nekompresibilan materijal jednak 1/2.

Primjer 3.4.

Posmatraj pravougli paralelepiped od izotropnog materijala na sl. P 3.4(a) koji je u stanju čistog smicanja, tj. opterećen sa σ_{xx} , $\sigma_{yy} = -\sigma_{xx}$ i $\sigma_{xy} = 0$. Izdvojiti pravougli element $abcd$ na čijim stranama djeluje maksimalni smičući napon τ .

Koristeći se jednačinom $\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy})$ dokazati da je smičući napon na strani bc proporcionalan smičućoj deformaciji (klizanju) između pravaca bc i cd sa koeficijentom proporcionalnosti $2G = \frac{E}{1+\nu}$.

Rješenje:

Smičući napon na stranama elementa $abcd$ je

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = \frac{1}{2}2\sigma_{xx} = \sigma_{xx}. \quad (a)$$

Sa sl. P 3.4(b) je očigledno:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\overline{Oc + \Delta} - \overline{Oc}}{\overline{Oc}} = \frac{\Delta}{Oc}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\overline{Ob - \Delta} - \overline{Ob}}{\overline{Ob}} = -\frac{\Delta}{Ob} = -\varepsilon_{xx}.$$

Klizanje između pravaca bc i cd je po definiciji

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) \cong \frac{1}{2} \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right). \quad (b)$$

No, sa sl. P 3.4(b) je

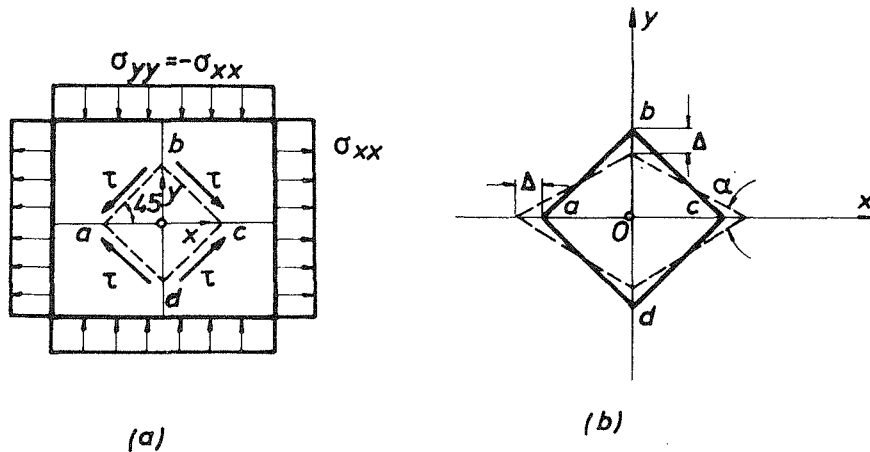
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{Ob - \Delta}}{\overline{Oc + \Delta}} = \frac{1 - \frac{\Delta}{Ob}}{1 + \frac{\Delta}{Oc}} = \frac{1 - \varepsilon_{xx}}{1 + \varepsilon_{xx}}, \quad (c)$$

što zamjenom u (b) daje

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{xx}. \quad (d)$$

Sada iz

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx}.$$



Sl. P 3.4.

nakon zamjene (a) i (d), imamo

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1+\nu}{E} \tau, \quad (e)$$

tj. smičući napon po strani bc je proporcionalan smičućoj deformaciji sa koeficijentom proporcionalnosti $\frac{E}{1+\nu}$.

Primjer 3.5.

Formulisati Hookeov zakon linearne elastičnosti koristeći se sfernim i devijatorskim dijelom tenzora napona i deformacije.

Rješenje:

Srednji normalni napon povezan je sa srednjom dilatacijom preko izraza

$$\sigma_s = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_s = 3K \varepsilon_s.$$

Nadimo još vezu između komponenti devijatorskih dijelova tenzora napona i deformacije. Kako je:

$$\varepsilon'_{xx} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_s \quad \text{i} \quad \sigma'_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma_s,$$

imamo

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \sigma_{xx} - \sigma_s = 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda e - 3K \varepsilon_s = \\ &= 2\mu (\varepsilon'_{xx} + \varepsilon_s) + 3\lambda \varepsilon_s - 3K \varepsilon_s = 2\mu \varepsilon'_{xx}. \end{aligned}$$

Analogno se dobija:

$$\sigma'_{yy} = 2\mu \varepsilon'_{yy} \quad \text{i} \quad \sigma'_{zz} = 2\mu \varepsilon'_{zz},$$

dok su smičuće komponente devijatorskih dijelova tenzora napona i deformacije iste kao i smičuće komponente ukupnog tenzora napona i deformacije, pa je:

$$\sigma'_{xy} = 2\mu \varepsilon'_{xy}, \quad \sigma'_{yz} = 2\mu \varepsilon'_{yz}, \quad \sigma'_{zx} = 2\mu \varepsilon'_{zx}.$$

Primjer 3.6.

Blok materijala se sabija kompresivnim naponom $\sigma_{zz} = -50$ MPa. Pri tome blok je slobodan da se širi u x pravcu, a spriječen u y pravcu, kao što je prikazano na sl. P 3.6. Odrediti napon σ_{yy} . Kolika je relativna promjena zapremine bloka? Dato je: $E = 210$ GPa, $\nu = 1/3$.

Rješenje:

Pošto je blok slobodan da se širi u x pravcu, to je $\sigma_{xx} = 0$, a $\varepsilon_{xx} \neq 0$. Pošto je blok spriječen da se širi u y pravcu, to je $\sigma_{yy} \neq 0$, a $\varepsilon_{yy} = 0$. Prema tome iz uslova

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] = 0,$$

dobijamo

$$\sigma_{yy} = \nu \sigma_{zz} = -\frac{1}{3} \cdot 50 = -16,67 \text{ MPa.}$$

Relativna promjena zapremine bloka je

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

Kako je:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \\ &= -\frac{1/3}{210 \cdot 10^3} (-16,67 - 50) = 1,11 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

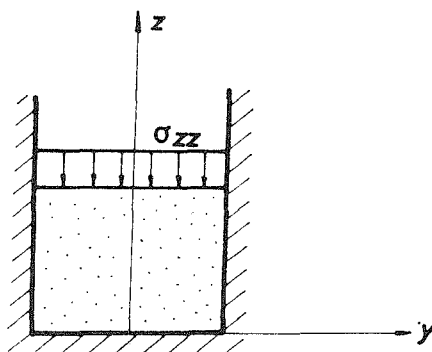
$$\varepsilon_{yy} = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu \sigma_{yy}) = \\ &= \frac{1}{210 \cdot 10^3} \left(-50 + \frac{1}{3} \cdot 16,67 \right) = -2,12 \cdot 10^{-4}, \end{aligned}$$

dobijamo

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (1,11 + 0 - 2,12) \cdot 10^{-4} = -1,01 \cdot 10^{-4}.$$

Znak „-“ znači da se zapremina bloka smanjuje.



Sl. P 3.6.

3.3.2. Konstitutivne jednačine za anizotropan materijal

U prethodnom odjeljku formulisali smo konstitutivne jednačine za izotropan materijal u uslovima malih elastičnih deformacija. Vidjeli smo da su to bile linearne jednačine između komponenti napona i deformacije sa dvije nezavisne konstante kao koeficijentima proporcionalnosti. Matrično se konstitutivne jednačine za izotropan elastičan materijal mogu zapisati u obliku

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Ovo je generalisani Hookeov zakon za izotropan materijal. On se proširuje na proizvoljan anizotropan materijal polazeći od toga da veza između napona i deformacije i dalje mora biti linearna (za slučaj malih deformacija), bez obzira na anizotropiju. Prema tome, za najopštiju anizotropiju konstitutivni zakon za male elastične deformacije glasi

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

ili kratko

$$\{\varepsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\}, \quad (3)$$

gdje je $[C]$ matrica koeficijenata elastičnosti. Može se pokazati da je $[C]$ simetrična matrica, pa su od njenih 36 elemenata samo 21 međusobno nezavisni. Dakle, za anizotropan materijal u uslovima malih elastičnih deformacija veza između napona i deformacija je linearna uz 21 različitu konstantu (karakteristike materijala) kao koeficijentima proporcionalnosti. Ako je materijal nehomogen, ove konstante su funkcije tačke u tijelu, a ako je homogen, one ne zavise od položaja tačke u tijelu. Često, međutim, materijal posjeduje određenu simetriju u elastičnim svojstvima u odnosu na izvjesne ravni ili pravce u datoj tački. Kaže se da je ravan kroz datu tačku u materijalu ravan elastične simetrije za materijal u toj tački, ako su elastične osobine materijala u toj tački iste za svaka dva pravca koja su jedan drugom lik kroz datu ravan kao ogledalo. Može se pokazati ako materijal ima jednu ravan

elastične simetrije u datoj tački, tada postoji 13 nezavisnih koeficijenata elastičnosti u konstitutivnim jednačinama. Na primjer, ako je ravan (x, y) ravan elastične simetrije, tada je

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

gdje, zbog simetričnosti matrice $[C]$, u (4) ima samo 13 nezavisnih konstanti. Treba primijetiti da i u ovom, kao i u opštem anizotropnom slučaju, normalni naponi σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} mogu izazvati klizanje ε_{xy} i ako nema smičućih napona σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} . Zaista, $\varepsilon_{xy} = C_{41}\sigma_{xx} + C_{42}\sigma_{yy} + C_{43}\sigma_{zz}$. Takođe treba primijetiti da se pravci glavnih napona i glavnih dilatacija ne poklapaju, jer je, na primjer:

$$\varepsilon_{xy} = C_{41}\sigma_{xx} + C_{42}\sigma_{yy} + C_{43}\sigma_{zz} + C_{44}\sigma_{xy},$$

pa ε_{xy} može biti različito od nule i kad su svi smičući naponi σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} jednaki nuli.

Posebno je važan i u praksi čest slučaj tzv. ortogonalne anizotropije ili ortotropije, kada materijal u datoj tački ima tri ortogonalne ravni elastične simetrije. Može se pokazati da u slučaju ortotropije postoji devet nezavisnih konstanti elastičnosti. Ako su ravni simetrije koordinatne ravni (x, y) , (y, z) i (z, x) , tada je

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

tj.:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= C_{11}\sigma_{xx} + C_{12}\sigma_{yy} + C_{13}\sigma_{zz} & \varepsilon_{xy} &= C_{44}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= C_{21}\sigma_{xx} + C_{22}\sigma_{yy} + C_{23}\sigma_{zz} & \varepsilon_{yz} &= C_{55}\sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} &= C_{31}\sigma_{xx} + C_{32}\sigma_{yy} + C_{33}\sigma_{zz} & \varepsilon_{zx} &= C_{66}\sigma_{zx} \end{aligned} \quad (6)$$

U tehničkoj praksi uobičajeno je prepisati gornje jednačine u obliku:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x}\sigma_{xx} - \frac{\nu_{xy}}{E_y}\sigma_{yy} - \frac{\nu_{xz}}{E_z}\sigma_{zz} & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G_{xy}}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu_{yx}}{E_x}\sigma_{xx} + \frac{1}{E_y}\sigma_{yy} - \frac{\nu_{yz}}{E_z}\sigma_{zz} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G_{yz}}\sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_{zx}}{E_x}\sigma_{xx} - \frac{\nu_{zy}}{E_y}\sigma_{yy} + \frac{1}{E_z}\sigma_{zz} & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2G_{zx}}\sigma_{zx} \end{aligned} \quad (7)$$

gdje su E_x, E_y, E_z moduli elastičnosti u pravcima x, y, z ; $\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{zx}$ su Poissonovi koeficijenti koji karakterišu poprečne kontrakcije (na primjer, ν_{xy} definiše poprečnu kontrakciju u pravcu x ose od napona u pravcu y ose), a G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} su moduli smicanja koji karakterišu promjenu uglova između x i y, y i z, z i x pravaca. Zbog simetričnosti matrice elastičnih koeficijenata, ovdje mora biti:

$$E_x \nu_{yx} = E_y \nu_{xy}, \quad E_y \nu_{zy} = E_z \nu_{yz}, \quad E_z \nu_{xz} = E_x \nu_{zx}. \quad (8)$$

Treba napomenuti da jedino ako se glavni pravci deformacije poklapaju sa osama elastične simetrije, tada se glavni pravci napona i deformacije ortotropnog materijala poklapaju. Međutim, u opštem slučaju opterećenje je takvo da se glavni pravci deformacije ortotropnog materijala ne poklapaju sa osama elastične simetrije, pa se ni glavni pravci napona ne poklapaju sa glavnim pravcima deformacije.

Najzad, ako su elastična svojstva materijala ista u svim pravcima kroz datu tačku, imamo izotropan materijal. Tada postoje samo dvije nezavisne konstante elastičnosti, kao što smo ranije vidjeli, a glavni pravci napona i deformacije se uvijek poklapaju. Pošto smo ranije napisali za ovaj slučaj matričnu jednačinu $\{\varepsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\}$, ovdje dajemo samo njen inverzni oblik $\{\sigma\} = [E] \cdot \{\varepsilon\}$, tj.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Naravno, za homogen materijal Laméove konstante λ i μ ne zavise od položaja tačke u tijelu, tj. konstantne su, a za nehomogen materijal je $\lambda = \lambda(x, y, z)$ i $\mu = \mu(x, y, z)$.

3.3.3. Linearne termoelastične jednačine

Ekspirimenti su pokazali, ako se štap (epruveta) dužine l zagrije za temperaturu ΔT , on će se izdužiti za iznos $\Delta l = \alpha l \Delta T$, tj. javiće se dilatacija $\varepsilon_{zz} = \alpha \Delta T$, gdje je α karakteristika materijala, tzv. koeficijent linearne termičke ekspanzije. Ako je u pitanju termički izotropan materijal, tj. materijal čija je termička ekspanzija izotropna (najčešći slučaj sa metalima), tada je poprečna deformacija (relativna ekspanzija) usljed porasta temperature ΔT jednaka $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \alpha \Delta T$. Koeficijent linearne ekspanzije α je funkcija temperature, $\alpha = \alpha(T)$. U linearnoj teoriji uzimamo da se deformacija usljed porasta temperature može prosto superponirati, tj. sabrati sa deformacijom usljed napona, tako da za mehaničko-termički izotropan elastičan materijal imamo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] + \alpha \Delta T & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha \Delta T & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2G} \sigma_{zx} \end{aligned} \quad (1)$$

Dakle, porast temperature izaziva samo normalnu deformaciju, tj. dilatacije, a ne izaziva smičuću deformaciju, tj. promjene uglova (klizanja). Jednačine (1) su linearne termoelastične jednačine. One se mogu prepisati i u inverznom obliku kao:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda e - 3\alpha K \Delta T & \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda e - 3\alpha K \Delta T & \sigma_{yz} &= 2\mu\varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zz} &= 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda e - 3\alpha K \Delta T & \sigma_{zx} &= 2\mu\varepsilon_{zx}.\end{aligned}\quad (2)$$

Ovo su tzv. Neumann-Duhamelove jednačine linearne termoelastičnosti. Očigledno je takođe da važi:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= K e - 3\alpha K \Delta T \\ e &= \frac{1}{K} \sigma_s + 3\alpha \Delta T,\end{aligned}\quad (3)$$

pri čemu se 3α često naziva koeficijent kubne ekspanzije. Za metale je $\alpha > 0$.

Najzad, treba istaći da se ovdje ΔT uzima kao dato, poznato. Ako se, međutim, dio porasta temperature tijela ΔT javio usljed samog deformisanja, problem postaje spregnut i znatno složeniji. Srećom, u mnogim problemima ovo sprežanje može biti zanemareno, te važe navedene jednačine dobijene prostim superponiranjem, smatrajući ΔT unaprijed poznatim.

Primjer 3.7.

Bloku materijala je omogućeno slobodno širenje u pravcima y i z , tako da je $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, dok je širenje (izduženje) u pravcu x onemogućeno. Izračunati napon σ_{xx} koji se javlja u bloku ako se blok zagrije za $\Delta T = 50^\circ\text{C}$. Materijal bloka je čelik, $E = 200\text{ GPa}$, $\nu = 1/3$, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Napisati tenzor napona i tenzor deformacije.

Rješenje:

Iz prve od jednačina (3.3.3:1) je

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T = 0,$$

odakle je, s obzirom da je $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$,

$$\sigma_{xx} = -E\alpha\Delta T = -200 \cdot 10^3 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = -125\text{ MPa}.$$

Dilatacije u pravcima y i z su sada:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] + \alpha \Delta T = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \alpha \Delta T = \dots = 0,83 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy} = 0,83 \cdot 10^{-3}.$$

Dakle, tenzori napona i deformacije su:

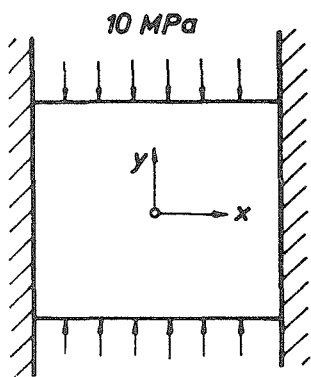
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\text{MPa}), \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,83 & 0 \\ 0 & 0 & 0,83 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Primjer 3.8.

Za ploču koja je ukliještena između dva kruta idealno glatka zida i koja je opterećena pritiskom od 10 MPa kao na sl. P 3.8, odrediti napone i deformaciju u ploči ako se ona zagrije za $\Delta T = 50^\circ\text{C}$. Dato je: $E = 210\text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Rješenje:

Stanje napona i deformacije u ploči je homogeno. Pošto se ploča može slobodno širiti u z pravcu, imamo $\sigma_{zz} = 0$. Takođe je $\sigma_{yy} = -10\text{ MPa}$. Kako nema širenja u pravcu x ose, mora biti



10 MPa
10 MPa
Sl. P 3.8.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T = 0,$$

odakle je

$$\sigma_{xx} = \nu \sigma_{yy} - E \alpha \Delta T =$$

$$= 0,3 \cdot (-10) - 210 \cdot 10^3 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = -134\text{ MPa}.$$

Kako nema klizanja između pravaca x , y , z nema ni smičućih napona σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} . Prema tome tenzor napona je:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -134 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

Komponentalne deformacije ε_{yy} i ε_{zz} određujemo iz:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] + \alpha \Delta T = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + \alpha \Delta T = \dots = 0,77 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha \Delta T = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha \Delta T = \dots = 0,83 \cdot 10^{-3},$$

tako da je tenzor deformacije

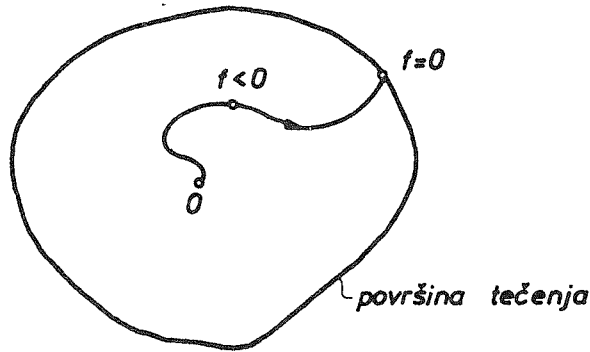
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0,83 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

3.4. Konstitutivne jednačine za materijal u uslovima plastičnih deformacija

3.4.1. Uslov plastičnog tečenja

Ako se epruveta u testu istezanja optereti dovoljno velikom silom da napon u njoj postane veći od napona na granici elastičnosti, epruveta počinje da se plastično deformiše. No, dok je u jednodimenzionom testu istezanja (linearno stanje napona) jasno kad počinje plastična deformacija u tački tijela (počinje prosto za $\sigma = \sigma_T$, gdje se napon koji odgovara početku plastične deformacije – tečenja σ_T eksperimentalno određuje), u slučaju trodimenzionog (prostornog) stanja napona to postaje veliki

problem. Naime, pitanje je koja kombinacija komponenti napona izaziva plastičnu deformaciju u tački, a koja ne. Do sada razvijena teorija plastičnosti koristi pretpostavku da u svakom trenutku deformisanja postoji skalarna funkcija f koja zavisi od komponenti tenzora napona u tački i parametara koji definišu istoriju deformisanja posmatrane okoline tačke, tako da kad god je $f < 0$ u tački, deformacija je elastična, dok se plastična deformacija može javiti jedino ako je $f = 0$. Slučaj $f > 0$ se ne može dogoditi. Funkcija f sa ovakvim osobinama naziva se funkcija (ili površina) tečenja, a $f = 0$ uslov plastičnog tečenja (sl. 3:25). Funkciju f treba odabrati rukovodeći se eksperimentalnim podacima i iskustvom. U klasičnoj teoriji plastičnosti dva najčešće korišćena uslova plastičnog tečenja su Misesov i Treskin uslov tečenja. Mises je predložio da se za funkciju f uzme



Sl. 3:25.

$$f = J_2 - k_M^2, \quad (1)$$

gdje je

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)] \quad (2)$$

druga invarijanta devijatorskog dijela tenzora napona, a k_M je konstanta koja zavisi od materijala. Dakle, ako je stanje napona u tački takvo da je $J_2 < k_M^2$, deformacija je elastična, a ako je $J_2 = k_M^2$, deformacija je elastoplastična. Da bismo fizički definisali konstantu k_M , koristimo test istezanja kod kog je samo jedna komponenta napona različita od nule, pa je $J_2 = \frac{1}{3} \sigma_{zz}^2$. U testu istezanja plastična deformacija počinje za $\sigma_{zz} = \sigma_T$, pa iz $\frac{1}{3} \sigma_T^2 = k_M^2$ dobijamo da je konstanta k_M u (1) definisana sa

$$k_M = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}. \quad (3)$$

Tresca je predložio za funkciju f izraz

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k_T, \quad (4)$$

gdje su $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ i $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ maksimalni i minimalni glavni napon u tački, a k_T je konstanta koja zavisi od materijala. Treskin kriterijum plastičnog tečenja, dakle, sugerise da plastična deformacija u tački počinje kada maksimalni smičući napon u toj tački dostigne kritičnu vrijednost, tj. kada je

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k_T. \quad (5)$$

Kako je u jednodimenzionom testu istezanja $\sigma_1 = \sigma_{zz}$, $\sigma_3 = 0$, to je konstanta k_T u (4), odnosno (5), definisana sa

$$k_T = \frac{\sigma_T}{2}. \quad (6)$$

Obadva kriterijuma, Misesov i Treskin, slažu se sa eksperimentalnim podacima da umjereni hidrostatički pritisak ne utiče na izazivanje plastične deformacije. Međutim, ni jedan ni drugi nisu ni približno potpuno zadovoljavajući kriterijumi, iako se Misesov kriterijum bolje slaže sa eksperimentalnim rezultatima. Nedostatak Treskinog kriterijuma je, na primjer, da predviđa da srednji glavni napon σ_2 nema uticaj na izazivanje plastične deformacije, što eksperimenti ne potvrđuju.

Jedan od najvažnijih otvorenih problema u teoriji plastičnosti danas je izbor funkcije tečenja koja se dobro slaže sa eksperimentalnim podacima.

Primjer 3.9.

Tri elementa su u naponskom stanju kao na sl. P 3.9. Pri porastu σ koji od ova tri elementa će prvi početi da se plastično deformišu, po:

- a) Treskinom,
- b) Misesovom,

kriterijumu o plastičnom tečenju? Napon na granici plastičnog tečenja materijala je σ_T .

Rješenje:

- a) Po Treskinom kriterijumu o plastičnom tečenju plastična deformacija će početi kada je

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_T}{2}.$$

Za element A ovo daje

$$\frac{28,5\sigma - (-7,5\sigma)}{2} = \frac{\sigma_T}{2},$$

pa će se element A početi plastično deformirati pri vrijednosti $\sigma = \frac{1}{36} \sigma_T = 0,0278 \sigma_T$.

Analogno se dobija da će element B početi plastično da se deformišu pri $\sigma = \frac{1}{30} \sigma_T = 0,033 \sigma_T$, a element C pri $\sigma = \frac{1}{42} \sigma_T = 0,0238 \sigma_T$. Dakle, po Treskinom kriterijumu prvi će dostići plastičnu deformaciju element C.

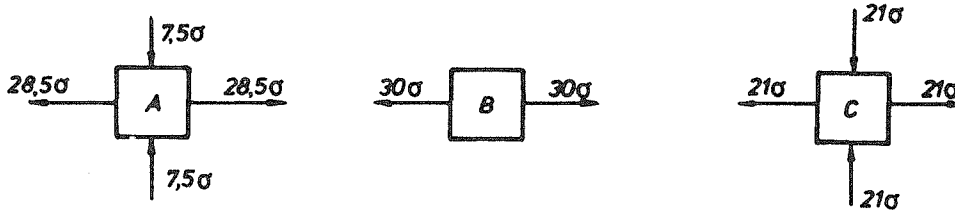
- b) Po Misesovom kriterijumu plastična deformacija počinje ako je

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)] = \frac{\sigma_T^2}{3}.$$

Za element A ovo daje

$$\frac{1}{3} (28,5^2 + 7,5^2 + 28,5 \cdot 7,5) \sigma^2 = \frac{\sigma_T^2}{3},$$

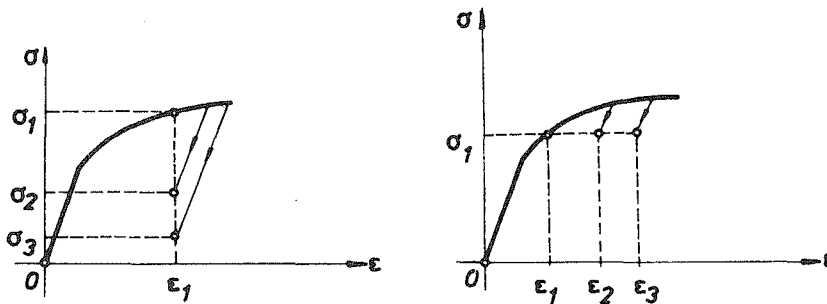
pa će se element *A* početi plastično deformisati pri $\sigma = 0,03 \sigma_T$. Analogno se dobija za element *B* $\sigma = 0,033 \sigma_T$, a za element *C* $\sigma = 0,0275 \sigma_T$. Prema tome, po Misesovom kriterijumu prvi će dostići plastičnost takođe element *C*.



Sl. P 3.9.

3.4.2. Formulacija konstitutivnih jednačina

Proces plastične deformacije je izuzetno komplikovan. U termodinamičkom smislu on predstavlja nepovratan proces jer se najveći dio utrošenog rada na deformaciji gubi u toplotu. Osim toga, proces je nelinearne prirode i zakon superpozicije ne važi. Postaje bitna cijela prethodna istorija deformisanja materijala. Zato napon ne može biti prosto izražen kao jednoznačna funkcija deformacije (ili obrnuto), kao kod elastičnih deformacija (Hookeov zakon), jer jednom naponu može odgovarati više deformacija i obrnuto, kao što vidimo sa sl. 3:26. Prema tome,



Sl. 3:26.

konstitutivne jednačine za materijal u uslovima plastičnih deformacija ne mogu biti „1 – 1“ relacija oblika:

$$\{\varepsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\} \quad \text{ili} \quad \{\sigma\} = [C]^{-1} \cdot \{\varepsilon\},$$

kao za elastične deformacije (vidi 3.3.2:3), već moraju biti u diferencijabilnom (inkrementalnom) obliku kao veza između izvoda napona i izvoda deformacije $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ i $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$, gdje σ i ε stoje za komponente tenzora napona i deformacije, pa se ukupan napon i deformacija određuju integracijom uz praćenje istorije

deformisanja i opterećenja. Bez upuštanja u detaljniju analizu, navodimo da se pri formulaciji konstitutivnih jednačina za materijal u uslovima elasto-plastičnih deformacija polazi od pretpostavke

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_e\} + \{\dot{\epsilon}_p\}, \quad (1)$$

pa se posebno formuliše konstitutivni zakon za $\{\dot{\epsilon}_e\}$, a posebno za $\{\dot{\epsilon}_p\}$. Konstitutivni zakon za $\{\dot{\epsilon}_e\}$ se prosto dobija diferencirajući Hookeov zakon (3.3.2:1), dok se konstitutivni zakon za $\{\dot{\epsilon}_p\}$ dobija složenijom analizom, u koju se nećemo upuštati. U svakom slučaju, ispostavlja se da su $\{\dot{\epsilon}_e\}$ i $\{\dot{\epsilon}_p\}$ proporcionalni sa $\{\dot{\sigma}\}$, tj.:

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}_e\} &= [C_e] \{\dot{\sigma}\} \\ \{\dot{\epsilon}_p\} &= [C_p] \{\dot{\sigma}\}, \end{aligned} \quad (2)$$

što zamjenom u (1) daje konstitutivni zakon za materijal u uslovima elasto-plastičnih deformacija

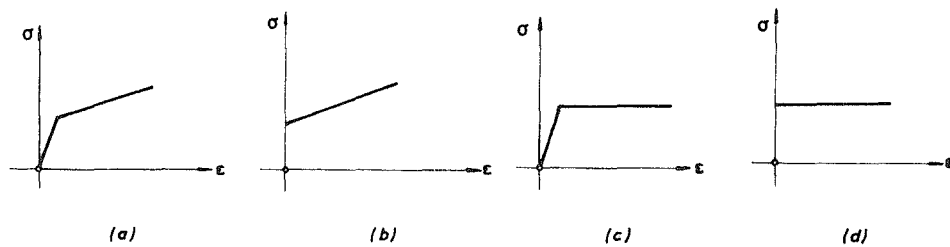
$$\{\dot{\epsilon}\} = [C_{e-p}] \{\dot{\sigma}\}, \quad (3)$$

gdje je $[C_{e-p}] = [C_e] + [C_p]$ tzv. elasto-plastična matrica krutosti. Koeficijenti ove matrice zavise od elastičnih karakteristika materijala, trenutne vrijednosti komponenti napona i parametara koji definišu istoriju deformisanja.

Inverzijom se iz (3) može dobiti i ekvivalentni oblik konstitutivnog zakona za elasto-plastične deformacije

$$\{\dot{\sigma}\} = [C_{e-p}]^{-1} \{\dot{\epsilon}\}. \quad (4)$$

Na kraju ističemo da se zbog izuzetne složenosti fenomena plastične deformacije često vrše uprošćenja u modelu ponašanja materijala. Na primjer, na sl. 3:27(a) uvedena je idealizacija linearnog očvršćavanja, na sl. 3:27(b) zanemarena je elastična komponenta deformacije (model kruto-linearno očvršćavajućeg ponašanja), na sl. 3:27(c) je zanemareno očvršćavanje materijala (tzv. elastično-idealno plastično ponašanje), dok je na sl. 3:27(d) zanemareno i očvršćavanje i elastična komponenta deformacije (kruto-idealno plastično ponašanje).



Sl. 3:27.

3.5. Konstitutivne jednačine za materijal u uslovima viskoelastičnih deformacija

Kod viskoelastičnih deformacija bitnu ulogu igra vrijeme koje je proteklo u toku deformisanja, odnosno opterećenja. Pri tome, da bismo odredili napon koji odgovara trenutnoj deformaciji, neophodno je da znamo čitavu istoriju deformisanja. Za različite istorije, i za iste trenutne deformacije, napon je različit. Kaže se zato da

viskoelastičan materijal ima memoriju, tj. pamti sve što se s njim zbilo u prošlosti, jer se ta prošlost odražava na njegovo trenutno ponašanje, tj. vezu između napona i deformacije. (To, recimo, nije slučaj sa elastičnim materijalom kod koga napon zavisi samo od trenutne deformacije, bez obzira kako se došlo do te deformacije). Formulacija konstitutivnih jednačina za viskoelastičan materijal u uslovima proizvoljnog prostornog stanja napona i deformacije je složen problem u koji se mi ovdje ne možemo upuštati. Mi ćemo samo prodiskutovati jednodimenzionalan slučaj i vidjeti kako se za njega formira konstitutivna jednačina. Pretpostavimo da se ponašanje nekog viskoelastičnog tijela (materijala) može predstaviti modelom koji se sastoji iz opruge krutosti E i klipa u viskoznoj sredini viskoznosti η (sl. 3:28). Ovakav model viskoelastičnog tijela zove se Maxwellov model ili Maxwellov materijal. Poznato je da



Sl. 3:28.

se ponašanje elastične opruge može predstaviti zakonom $\sigma = E \varepsilon$, a viskoznog fluida zakonom $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$. Zato, ako je Maxwellovo tijelo pod dejstvom napona σ , deformacija će se sastojati iz deformacije ε_1 opruge i deformacije ε_2 usljed viskoznosti, tj.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (1)$$

Diferencirajući (1) imamo

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2. \quad (2)$$

No, $\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E} \dot{\sigma}$, $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\eta} \sigma$, pa je

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma. \quad (3)$$

Ovo je diferencijalna jednačina koja daje vezu između napona i deformacije i predstavlja konstitutivnu jednačinu za Maxwellov viskoelastičan materijal.

Zamislimo da smo naglo primijenili napon σ_0 . Opruga će istovremeno reagovati sa izduženjem $\varepsilon_0 = \frac{1}{E} \sigma_0$. Klip još nije stigao da se pomjeri. Potom, ako držimo napon konstantan $\sigma = \sigma_0 = \text{const.}$, opruga se više ne izdužuje, ali klip počinje da se pomjera sve više i više, i deformacija raste (sl. 3:29). Zaista, $\dot{\sigma} = 0$, $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma_0$, tj.

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \sigma_0 t + \frac{1}{E} \sigma_0. \quad (4)$$

Ovo je tzv. test puzanja. Možemo izvršiti i test relaksacije, tj. naglo istegnuti štap do deformacije ε_0 , pa zatim držati tu deformaciju konstantnom ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\dot{\varepsilon} = 0$), a pratiti kako se mijenja napon. Imamo:

$$\frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma = 0, \quad (5)$$

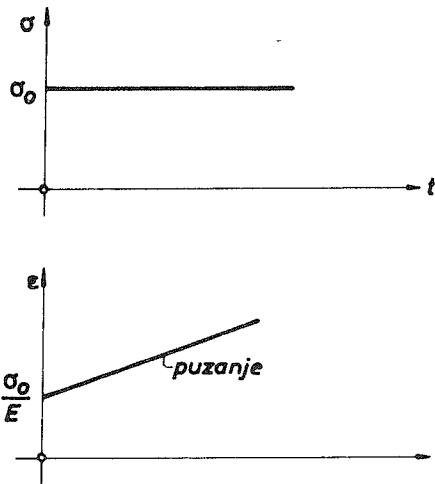
odakle je integracijom

$$\sigma = C e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

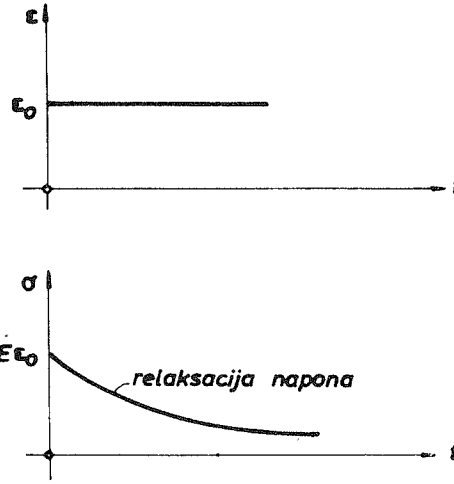
Integracionu konstantu C određujemo iz početnog uslova da je za $t=0$, $\sigma = E \epsilon_0$, odakle je $C = E \epsilon_0$, tj.

$$\sigma = E \epsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta}t}, \quad (6)$$

što je prikazano na sl. 3:30.

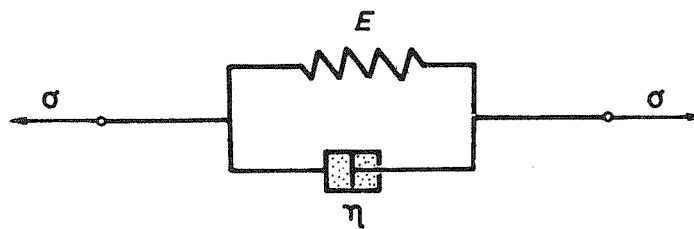


Sl. 3:29.



Sl. 3:30.

Drugi jedan elementarni model viskoelastičnog tijela je Kelvinov (ili Voigtov) model, gdje su elastičan i viskozni element povezani paralelno (sl. 3:31). Ovdje je očigledno da napon σ prihvataju jednim dijelom opruga, a drugim viskozni element, tj.



Sl. 3:31.

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (7)$$

dok je deformacija i jednog i drugog elementa ista, pa je $\sigma_1 = E\epsilon$ i $\sigma_2 = \eta\dot{\epsilon}$. Dakle,

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon}. \quad (8)$$

Ovo je konstitutivna jednačina za Kelvinov model viskoelastičnog materijala.

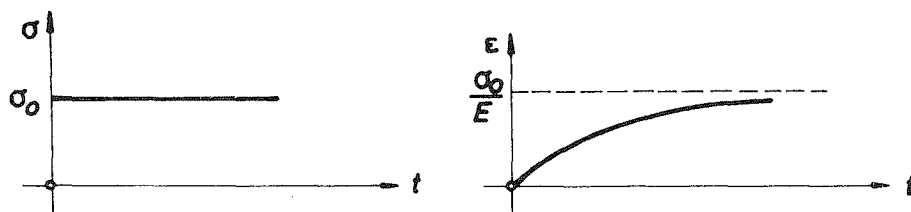
Ako naglo primijenimo napon $\sigma = \sigma_0$ i održavamo ga konstantnim, deformacija lagano raste. Zaista,

$$\sigma_0 = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (9)$$

što integracijom daje

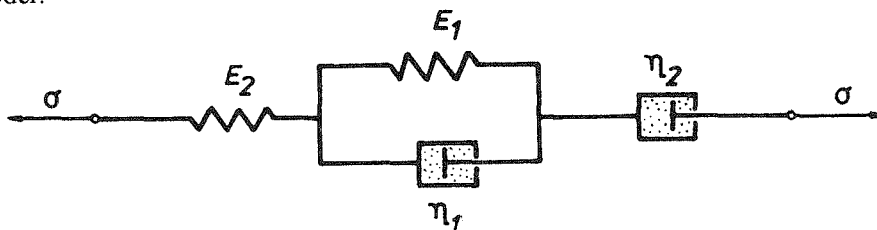
$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right). \quad (10)$$

Očigledno, kada $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow \sigma_0/E$, tj. deformacija teži graničnoj vrijednosti $\frac{\sigma_0}{E}$. Ovo se zove zaostala (naknadna) elastičnost (sl. 3:32).



Sl. 3:32.

Viskoelastični materijali su, međutim, daleko složeniji po svom ponašanju nego što se može predstaviti Maxwellovim ili Kelvinovim modelom. Zato se često vrše kombinacije ova dva modela. Na primjer, na sl. 3:33 je prikazan Maxwell-Kelvinov model.



Sl. 3:33.

U tri dimenzije problem formulacije konstitutivnih jednačina viskoelastičnog materijala je znatno složeniji i izučava se u posebnoj disciplini – teoriji viskoelastičnosti.

Sa ovim završavamo analizu konstitutivnih jednačina različitih materijala u različitim uslovima deformisanja.

4. FORMULACIJA I RJEŠAVANJE PROBLEMA TEORIJE ELASTIČNOSTI

4.1. Rekapitulacija osnovnih jednačina

U glavi 1 (Analiza napona) pokazali smo da je naponsko stanje, tj. mjera naprezanja u tački, definisana tenzorom napona

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Zbog stava o konjugovanosti smičućih napona, samo šest od devet komponenti tenzora napona je međusobno nezavisno: tri normalna napona σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} i tri smičuća napona σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} . Naponsko stanje u napregnutom tijelu u opštem slučaju varira od tačke do tačke u tijelu, tj.

$$[\sigma] = [\sigma(x, y, z)],$$

odnosno $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z)$, $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y, z)$, \dots , $\sigma_{zx} = \sigma_{zx}(x, y, z)$. Iz uslova ravnoteže dalje slijedi da šest funkcija komponentalnih napona u svakoj unutrašnjoj tački tijela mora zadovoljiti tri Cauchyve jednačine ravnoteže:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

gdje su b_x , b_y , b_z komponente specifične zapreminske sile $\vec{b} = \vec{b}(x, y, z)$. Jednačine (1) prate granični uslovi da je na površini tijela:

$$\begin{aligned} n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{xz} &= p_{nx} \\ n_x \sigma_{yx} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{yz} &= p_{ny} \\ n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} + n_z \sigma_{zz} &= p_{nz}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdje su p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} komponente specifične površinske sile $\vec{p}_n = \vec{p}_n(x, y, z)$, koja djeluje po spoljnoj površini tijela čija je normala $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$.

No, šest komponenti tenzora napona se ne može odrediti iz tri parcijalne diferencijalne jednačine (1), pa je problem statički neodređen. Zato smo pristupili analizi deformacije tijela koja se javlja pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja. U glavi 2 (Analiza deformacije) vidjeli smo da se pri deformaciji tijela sve tačke tijela pomjeraju

i da su ta pomjeranja okarakterisana vektorima pomjeranja $\vec{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$, pri čemu različite tačke tijela mogu imati različita pomjeranja, tj. $u = u(x, y, z)$. Definisali smo, takođe, u svakoj tački tijela i mjeru relativnog pomjeranja (deformisanosti), tj. dilatacije i klizanja u tački. Kažemo da znamo stanje deformacije u tački ako znamo tenzor deformacije

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

u toj tački, tj. ako znamo dilatacije $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ i klizanja $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$ i $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$. Stanje deformacije u deformisanom tijelu je različito u različitim tačkama tijela, tj.

$$[\varepsilon] = [\varepsilon(x, y, z)],$$

odnosno $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x, y, z), \dots, \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(x, y, z)$. Komponentalne deformacije (dilatacije i klizanja) povezane su sa komponentalnim pomjeranjima preko izraza:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Naravno, ako bismo znali ili imali određena komponentalna pomjeranja u_x, u_y i u_z , tada komponentalne deformacije određujemo prostim diferenciranjem koristeći izraze (3). No, često u rješavanju konkretnih problema prvo tražimo komponentalne deformacije, pa onda komponentalna pomjeranja. U tom slučaju, komponentalne deformacije moraju zadovoljiti Saint-Venantove jednačine kompatibilnosti:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2}, & \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

U glavi 3 (Konstitutivne jednačine) vidjeli smo da su za male elastične deformacije materijala veze između komponentalnih napona i komponentalnih deformacija linearne i da su za izotropan materijal date Hookeovim zakonom:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \varepsilon_{yy} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \varepsilon_{zz} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 2\mu \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= 2\mu \varepsilon_{zx}. \end{aligned} \quad (5)$$

Za anizotropan materijal, te za plastične i viskoelastične deformacije, umjesto jednačina (5), treba koristiti odgovarajuće konstitutivne jednačine date u glavi 3. Mi ćemo se, međutim, sada ograničiti samo na male elastične deformacije izotropnog materijala.

4.2. Formulacija problema teorije elastičnosti

Osnovni problem teorije elastičnosti (i mehanike deformabilnog tijela) može se formulirati na sljedeći način: za datu geometriju (dimenzije i oblik), dati materijal i dato spoljašnje opterećenje tijela, odrediti napone, deformacije i pomjeranja koja se javljaju u tijelu. Pri rješavanju problema teorije elastičnosti na raspolaganju nam stoje izvedene jednačine (4.1 : 1) – (4.1 : 5). Ukoliko kao nepoznate veličine izaberemo šest komponentalnih napona i šest komponentalnih deformacija, tada imamo dvanaest nepoznatih a petnaest jednačina (4.1 : 1), (4.1 : 4) i (4.1 : 5). Ovo izgleda kao preodređen problem, ali u stvari nije, jer od šest jednačina kompatibilnosti, može se pokazati da su samo tri nezavisne. (No, da bi se iz komponentalnih deformacija dobila jednoznačna pomjeranja, neophodno je zadovoljiti svih šest uslova kompatibilnosti). Ako se, međutim, pri rješavanju problema uključe komponentalna pomjeranja kao nepoznate, tada jednačine kompatibilnosti nisu potrebne (jer se unaprijed pretpostavlja da su pomjeranja jednoznačna), pa imamo petnaest nepoznatih (šest komponentalnih napona, šest komponentalnih deformacija i tri komponentalna pomjeranja) i petnaest jednačina (4.1 : 1), (4.1 : 3) i (4.1 : 5).

Za pravilnu i kompletnu formulaciju problema neophodno je propisati i granične uslove. Zavisno od konkretnog problema, granični uslovi mogu biti granični uslovi po pomjeranjima, granični uslovi po naponima i mješoviti granični uslovi. Granične uslove po pomjeranjima imamo ako znamo sve tri komponente pomjeranja po spoljnoj površini tijela, granične uslove po naponima ako znamo specifične površinske sile po spoljnoj površini tijela, a mješovite granične uslove imamo ako su na jednom dijelu spoljne površine tijela granični uslovi po pomjeranjima a na drugom po naponima. Mješovite granične uslove imamo i kada je u tački spoljne površine poznata neka komponenta pomjeranja i neka komponenta specifične površinske sile, tj. u_x ili p_{nx} , ali ne oboje, u_y ili p_{ny} , ali ne oboje, i u_z ili p_{nz} , ali ne oboje.

Pitanje se sada postavlja da li ovako formulisan problem ima rješenje i da li je rješenje jedinstveno. Može se pokazati (u što mi nećemo ulaziti) da dobijeni sistem od petnaest jednačina sa petnaest nepoznatih ima rješenje i da je ono jedinstveno.

Napominjemo da zbog linearosti dobijenih jednačina, u problemima linearne teorije elastičnosti važi princip superpozicije, tj. naponi, deformacije i pomjeranja u tijelu na koje istovremeno djeluju dva sistema sila mogu se odrediti ako ih odredimo za svaki od ovih sistema posebno i tako dobijene vrijednosti saberemo.

4.3. Rješavanje problema teorije elastičnosti

U konkretnim rješavanjima problema teorije elastičnosti obično se nastoji da se definisani sistem od petnaest jednačina sa petnaest nepoznatih svede na sistem sa manje jednačina i manje nepoznatih. Osim toga, za probleme u kojima su granični uslovi dati po pomjeranjima, poželjno je imati diferencijalne jednačine izražene preko pomjeranja, a za probleme u kojima su granični uslovi dati po naponima, poželjno je imati diferencijalne jednačine izražene preko napona. Zato se pri rješavanju problema

teorije elastičnosti on najčešće formuliše ili kompletno preko pomjeranja ili kompletno preko napona. Formulišimo ga prvo kompletno preko pomjeranja. Uvrstimo izraze (4.1:3) u jednačine (4.1:5), pa zatim ove u jednačine ravnoteže (4.1:1). Dobijamo:

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + b_x &= 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + b_y &= 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + b_z &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ovo su Navierove jednačine ravnoteže. Kao što se vidi to su tri parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda sa tri nepoznate funkcije komponentalnih pomjeranja. Ove tri jednačine, naravno, prate i odgovarajući granični uslovi po pomjeranjima. Rješavanjem ovako dobijenog sistema jednačina nalazimo komponentalna pomjeranja kao funkcije koordinata. Komponentalne deformacije onda dobijamo diferenciranjem saglasno jednačinama (4.1:3), a komponentalne napone zamjenom dobijenih komponentalnih deformacija u konstitutivne jednačine (4.1:5).

Formulišimo sada problem kompletno preko komponentalnih napona kao nepoznatih funkcija. Ranije smo rekli da svako rešenje $[\sigma]$ Cauchyevih jednačina ravnoteže (4.1:1) ne odgovara mogućem stanju deformacije, jer komponentalne deformacije:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2G} \sigma_{zx} \end{aligned} \quad (2)$$

moraju zadovoljiti jednačine kompatibilnosti (4.1:4). Dakle, iz skupa rješenja $[\sigma]$ jednačina ravnoteže (4.1:1) pravo rješenje problema biće ono koje zadovoljava i jednačine kompatibilnosti (4.1:4). Izrazimo ove jednačine preko napona. Zamjenom izraza (2) u Saint-Venantove jednačine kompatibilnosti (4.1:4), nakon odgovarajućih operacija, dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= \\ = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial b_x}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= \\ = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial b_y}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \quad (3)$$

$$= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial b_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -\left(\frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -\left(\frac{\partial b_y}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -\left(\frac{\partial b_z}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial z} \right).$$

Ovo su jednačine kompatibilnosti izražene preko napona. Nazivaju se Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti. Prema tome, da bismo odredili komponentalne napone svuda u tijelu, neophodno je riješiti sistem jednačina koji se sastoji iz Cauchyevih jednačina ravnoteže (4.2:1) i Beltrami-Michellovih jednačina kompatibilnosti (3), uz zadovoljenje graničnih uslova (4.2:2). Ovo može izgledati preodređen sistem (devet jednačina sa šest nepoznatih), ali ne zaboravimo da su samo tri od šest jednačina kompatibilnosti (3) međusobno nezavisne. (Međutim, neophodno je zadovoljiti svih šest jednačina kompatibilnosti za tačno rješenje problema).

Ma koji od navedena dva metoda za rješavanje problema sa matematičke tačke gledišta predstavlja ozbiljan problem. Njegovo egzaktno rješenje skopčano je sa velikim teškoćama, kao što ćemo se uvjeriti u susretu sa konkretnim primjerima. Međutim, od velike je koristi tzv. poluobratni (semi-inverzni) metod, po kome uvijek nastojimo prvo da pretpostavimo dio rješenja (na primjer neke komponente napona ili deformacije), pa sa tim pretpostavkama uđemo u jednačine elastičnosti, koje onda postaju jednostavnije, i iz njih nađemo preostali dio rješenja. Zbog jedinstvenosti rješenja tako nađeno rješenje je pravo (jedino) rješenje problema.

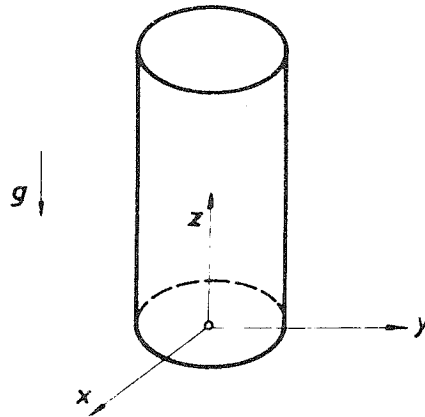
Osim toga, od velike je koristi i tzv. Saint-Venantov princip. Naime, često je moguće dobiti egzaktno rješenje problema elastičnosti ako su granični uslovi nešto malo promijenjeni u odnosu na one koje imamo u našem problemu. To rješenje je onda moguće koristiti i za naš problem, ali uz ograničenje koje daje Saint-Venantov princip: ako je sistem sila koji djeluje na dijelu spoljne površine tijela zamijenjen sa drugim, njemu statički ekvivalentnim sistemom sila koji djeluje na istom dijelu spoljne površine, uticaj ova dva različita sistema sila na dovoljno velikom udaljenju od mjesta njihovog djelovanja je zanemarljivo različit.

Uprkos svemu, u slučajevima složene geometrije tijela, komplikovanog opterećenja i graničnih uslova, rješenje se često ne može naći analitičkim putem, pa se pristupa numeričkom rješavanju jednačina elastičnosti ili, pak, eksperimentalnim metodama. Od numeričkih metoda navodimo metode konačnih razlika i konačnih elemenata koje danas, naročito ova druga, nalaze ogromnu primjenu zahvaljujući razvitku modernih kompjutera. Od eksperimentalnih metoda pominjemo metodu fotoelastičnosti, ekstenzometrijsku metodu (pomoću mjernih traka), metode pomoću krutih lakova, Moiré metodu, metode analogije itd., što predstavlja predmet eksperimentalne mehanike.

4.4. Primjeri rješavanja problema teorije elastičnosti

4.4.1. Deformacija štapa usljed sopstvene težine

Posmatrajmo cilindričan štap dužine l koji visi obješen o gornjem kraju u polju zemljine teže (sl. 4:1). Neka je štap od izotropnog homogenog materijala gustine ρ , modula elastičnosti E i Poissonovog koeficijenta ν . Izaberimo koordinatni sistem tako da se (x, y) ravan poklapa sa donjom osnovom cilindričnog štapa, dok je z osa usmjerena naviše. Pošto je štap u polju zemljine teže, na njega djeluje specifična zapreminska sila $b_z = -\rho g$. To je jedina aktivna spoljašnja sila koja djeluje na štap. Pod njenim dejstvom doći će do naprezanja i deformacije u štapu. Naš je zadatak da odredimo napone i deformaciju svuda u štapu. Primijenimo semi-inverzni metod. S obzirom da je svaki poprečni presjek štapa upravan na osu z opterećen težinom dijela štapa koji se nalazi ispod tog poprečnog presjeka, logično je pretpostaviti da je:



Sl. 4:1.

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \sigma_{zz}(z), \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ove pretpostavke biće prihvaćene ako pokažemo da one zadovoljavaju sve jednačine teorije elastičnosti. Da vidimo prvo Cauchyve jednačine ravnoteže (4.1:1). Prve dvije od jednačina (4.1:1) su identički zadovoljene pretpostavkama (1), dok iz treće slijedi

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} - \rho g = 0,$$

tj.

$$\sigma_{zz} = \rho g z + C_1.$$

Integracionu konstantu C_1 određujemo iz graničnog uslova da je za $z=0$, $\sigma_{zz}=0$, što daje $C_1=0$. Dakle,

$$\sigma_{zz} = \rho g z. \quad (2)$$

Da vidimo dalje Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti (4.3:3). Zamjenom pretpostavki (1) vidimo da je svih šest jednačina (4.3:3) identički zadovoljeno.

Posmatrajmo na kraju i granične uslove. Bočna površina štapa je slobodna (neopterećena), tj. specifične površinske sile po njoj su jednake nuli. Za cilindričnu površinu (omotač) štapa je $n = \{n_x, n_y, 0\}$. Zamjenom ovog, te komponentalnih napona (1), u granične uslove (4.1:2), vidimo da je $0 = p_{nx}$, $0 = p_{ny}$, $0 = p_{nz}$, kao što i mora biti jer je cilindrična površina slobodna. Dakle, granični uslovi po cilindričnoj površini su zadovoljeni pretpostavkama (1).

Donji bazis štapa je takođe slobodan od opterećenja, pa i tamo mora biti $p_{nx} = p_{ny} = p_{nz} = 0$. No, na donjem bazisu štapa je $\vec{n} = \{0, 0, -1\}$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \dots = 0$ i $\sigma_{zz} = 0$, pa je očigledno da su granični uslovi (4.1:2) na donjem bazisu zadovoljeni. Što se tiče preostalog graničnog uslova, na gornjem bazisu, imamo da je $\vec{n} = \{0, 0, 1\}$ i $\sigma_{zz} = \rho gl$, pa iz (4.1:2) slijedi:

$$\begin{aligned} 0 &= p_{nx} \\ 0 &= p_{ny} \\ \rho gl &= p_{nz} \end{aligned} \quad (3)$$

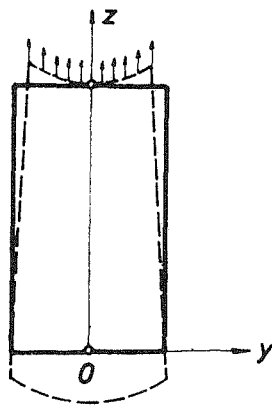
Dakle, ako je gornji kraj štapa obješen tako da ima ravnomjernu specifičnu silu $p_{nz} = \rho gl$ po bazisu, dobili smo tačno rješenje problema.

Odredimo sada komponentalne deformacije i pomjeranja. Zamjenom (1) i (2) u Hookeov zakon (4.1:5) slijedi da su komponentalne deformacije:

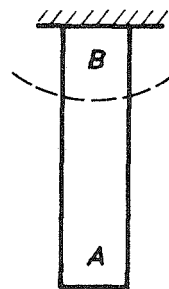
$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \rho gz, & \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E} \rho gz \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Komponentalna pomjeranja dobijamo integracijom iz (4), saglasno proceduri datoj u poglavlju 2.10:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{\nu}{E} \rho g xz - cz + by + a \\ u_y &= -\frac{\nu}{E} \rho g yz + ez - bx + d \\ u_z &= \frac{1}{2E} \rho g [z^2 + \nu (x^2 + y^2)] + cx - ey + f, \end{aligned} \quad (5)$$



Sl. 4:2.



Sl. 4:3.

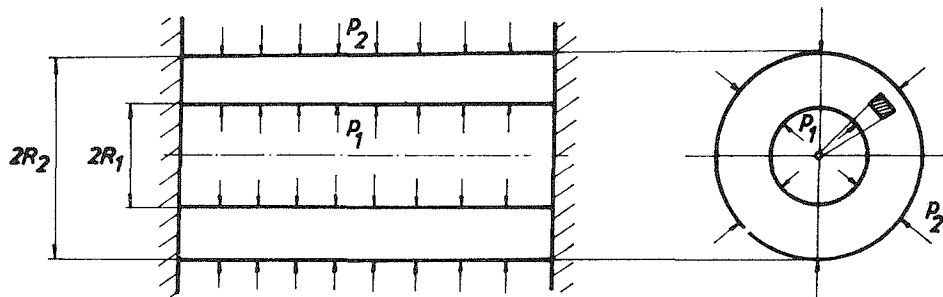
gdje su a, b, \dots, f integracione konstante, od kojih a, d i f odgovaraju translatorskom kretanju tijela kao cjeline, dok b, c, e predstavljaju tri male rotacije cijelog tijela oko tri koordinatne ose. Ako smo spriječili rotaciju, tada je $b=c=e=0$. Ako smo spriječili translaciju u x i y pravcu, tada je $a=d=0$. Najzad, ako se tačka $(0, 0, l)$ ne može pomjerati, tada je i $u_z(0, 0, l)=0$, odakle je $f = -\frac{1}{2} \frac{\rho g l^2}{E}$. Dakle, konačno:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{\nu}{E} \rho g z x \\ u_y &= -\frac{\nu}{E} \rho g z y \\ u_z &= \frac{1}{2E} \rho g [z^2 + \nu(x^2 + y^2)] - \frac{1}{2E} \rho g l^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Ako bismo skicirali deformisani oblik štapa, on bi izgledao kao na sl. 4:2. Ukoliko bismo, međutim, imali uklještenje na gornjem kraju štapa, onda je zbog Saint-Venantovog principa izvedeno rješenje prihvatljivo dovoljno daleko od uklještenja. Jedino u dijelu B oko uklještenja (sl. 4:3) izvedeno rješenje nije zadovoljavajuće, dok je u dijelu A sasvim zadovoljavajuće.

4.4.2. Laméov problem

Odredimo napon i deformaciju okrugle debele cijevi opterećene jednoliko podijeljenim unutrašnjim i spoljašnjim pritiskom. Cijev je postavljena između dva kruta idealno glatka zida koji onemogućuju aksijalnu deformaciju cijevi (sl. 4:4).

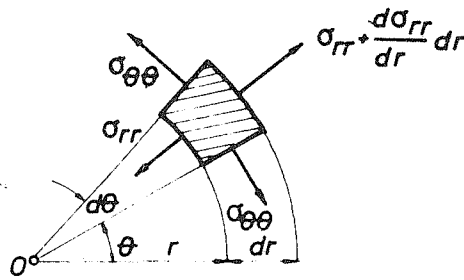


Sl. 4:4.

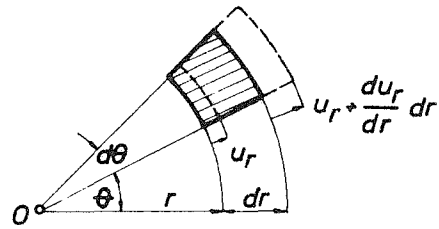
Upitanju je dvodimenzioni problem ravne deformacije, jer je $\epsilon_{zz}=0$, i ni jedna veličina ne zavisi od uzdužne z koordinate, tj. $\frac{\partial}{\partial z}(\)=0$. Problem je takođe aksijalno simetričan, $\frac{\partial}{\partial \theta}(\)=0$, pa ga je najpogodnije rješavati u polarnim koordinatama (r, θ) polazeći od jednačina elastičnosti u polarno-cilindričnim koordinatama. Pošto smo, međutim, izveli jednačine elastičnosti samo u Descartesovim pravolinijskim koordinatama, ovdje ćemo formulisati potrebne jednačine u polarnim koordinatama. U tom

cilju izdvojimo iz cijevi (cilindra) element jedinične debljine definisan radijusima r i $r + dr$, i uglom $d\theta$ (sl. 4:5). Zbog simetričnosti problema, na stranama elementa ne postoje smičući već samo normalni naponi, radijalni σ_{rr} i obručni $\sigma_{\theta\theta}$ napon, kao što je prikazano na sl. 4:5. Ovi naponi zavise samo od koordinate r , a ne i θ . Zato na strani elementa $r + dr$ djeluje napon $\sigma_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}}{dr} dr$, dok na bočnim stranama elementa djeluje isti napon $\sigma_{\theta\theta}$. Takođe na stranama elementa upravno na uzdužnu z osu djeluju, istog intenziteta a suprotnog smjera, normalni naponi σ_{zz} . Iz uslova ravnoteže izdvojenog elementa da je suma svih sila u radijalnom pravcu jednaka nuli slijedi

$$\sigma_{rr} r d\theta + 2\sigma_{\theta\theta} dr \frac{d\theta}{2} - \left(\sigma_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta = 0, \quad (1)$$



Sl. 4:5.



Sl. 4:6.

odakle je, zanemarujući male veličine višeg reda,

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (2)$$

Jednačina (2) je jednačina ravnoteže u polarnim koordinatama za posmatrani aksisimetrični problem debele cijevi. Ona sadrži dvije nepoznate, σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$, pa je za dalje rješavanje problema neophodno posmatrati i deformaciju cijevi. Od tri komponente vektora pomjeranja proizvoljne tačke cijevi u polarno-cilindričnim koordinatama, samo je radijalna komponenta pomjeranja različita od nule, tj.

$$\vec{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\} = \{u_r, 0, 0\}. \quad (3)$$

Pri tome je $u_r = u_r(r)$, a uočeni element cijevi nakon deformacije ima oblik prikazan isprekidanom linijom na sl. 4:6. Pomjeranje tačaka cijevi na radijusu r je u_r , a na radijusu $r + dr$ je $u_r + \frac{du_r}{dr} dr$. Relativne deformacije (dilatacije) u pravcima r i θ su prema tome:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\left(u_r + \frac{du_r}{dr} dr \right) - u_r}{dr} = \frac{du_r}{dr} \quad (4)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{(r + u_r) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u_r}{r}. \quad (5)$$

Jednačine (4) i (5) su veze između dilatacija ε_{rr} i $\varepsilon_{\theta\theta}$ i pomjeranja u_r . Na raspolaganju još stoji i Hookeov zakon, tj. veza između deformacije i napona. S obzirom da su r, θ, z glavni pravci napona, odnosno deformacije u uočenoj tački cijevi, Hookov zakon glasi:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \quad (6)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{rr})] \quad (7)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})]. \quad (8)$$

Kako je $\varepsilon_{zz} = 0$, iz (8) imamo

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}), \quad (9)$$

što zamjenom u (6) i (7), nakon rješavanja po σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$, daje:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}] \quad (10)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}], \quad (11)$$

ili, koristeći (4) i (5):

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{du_r}{dr} + \nu \frac{u_r}{r} \right] \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \frac{du_r}{dr} + (1-\nu) \frac{u_r}{r} \right]. \quad (13)$$

Zamjenom jednačina (12) i (13) u (2) dobijamo diferencijalnu jednačinu za pomjeranje u_r ,

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (14)$$

Jednačina (14) je, u stvari, Navierova jednačina ravnoteže u polarnim koordinatama za posmatrani problem. Rješenje ove jednačine je

$$u_r = Ar + \frac{B}{r}, \quad (15)$$

pri čemu integracione konstante A i B određujemo iz graničnih uslova:

$$\sigma_r(r=R_1) = -p_1 \quad (16)$$

$$\sigma_r(r=R_2) = -p_2.$$

odakle dobijamo, nakon korišćenja (15), (12) i (13):

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[A - (1-2\nu) \frac{B}{R_1^2} \right] = -p_1$$

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[A - (1-2\nu) \frac{B}{R_2^2} \right] = -p_2. \quad (17)$$

Rješavanjem sistema jednačina (17) po A i B dobijamo:

$$A = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{R_1^2 p_1 - R_2^2 p_2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$B = \frac{1+\nu}{E} \frac{R_1^2 R_2^2 (p_1 - p_2)}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (18)$$

Prema tome, konačno imamo:

$$u_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{R_1^2 p_1 - R_2^2 p_2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{R_1^2 R_2^2 (p_1 - p_2)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad (19)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{R_1^2 p_1 - R_2^2 p_2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{R_1^2 R_2^2 (p_1 - p_2)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2} \quad (20)$$

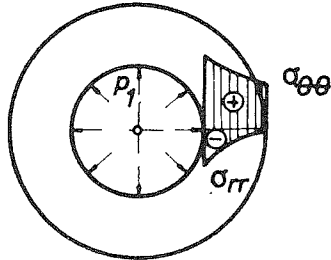
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R_1^2 p_1 - R_2^2 p_2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{R_1^2 R_2^2 (p_1 - p_2)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}. \quad (21)$$

Normalni napon σ_{zz} slijedi zamjenom (20) i (21) u (9)

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{R_1^2 p_1 - R_2^2 p_2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (22)$$

Kao što vidimo, napon σ_{zz} je jednak u svim tačkama cijevi.

U specijalnom slučaju, kada je cijev opterećena samo unutrašnjim pritiskom ($p_2 = 0$), dobijamo iz (20) i (21):



Sl. 4:7.

$$\sigma_{rr} = \frac{R_1^2 p_1}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right) \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R_1^2 p_1}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right). \quad (24)$$

Raspodjela napona (23) i (24) skicirana je na sl. 4:7.

Ako je u pitanju tankozidna cijev ($\delta = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$), napon $\sigma_{\theta\theta}$ je približno konstantan po debljini cijevi, a napon σ_{rr} se može zanemariti. Zaista, stavljajući u (23) i (24) $R_1 \cong R_2 = R$ i $R_2^2 - R_1^2 \cong 2R\delta$ (sl. 4:8), dobijamo:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{Rp_1}{2\delta} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cong 0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{Rp_1}{2\delta} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \cong \frac{Rp_1}{\delta}.\end{aligned}\quad (25)$$

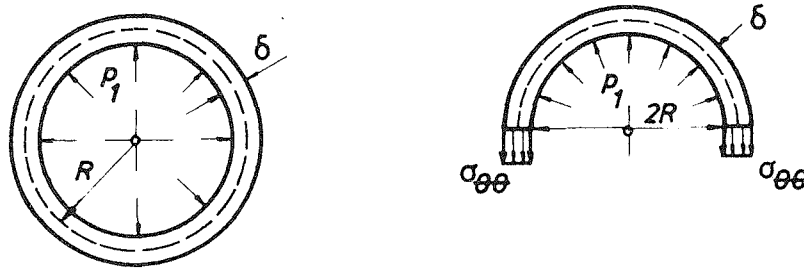
Vrijednost napona $\sigma_{\theta\theta}$ datu u (25) možemo i direktno dobiti iz uslova ravnoteže polovine cijevi prikazane takođe na sl. 4:8

$$2R p_1 = 2\sigma_{\theta\theta} \delta, \quad (26)$$

odakle je

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{Rp_1}{\delta}. \quad (27)$$

Jasno je da je napon $\sigma_{\theta\theta}$ znatno veći od napona σ_{rr} , koji zato možemo zanemariti. Zaista, $\sigma_{rr}^{\max} = \sigma_{rr} \left(r = R - \frac{\delta}{2}\right) = -p_1$, što je, kao što vidimo iz (27), za $\left(\frac{R}{\delta}\right)$ puta manje od napona $\sigma_{\theta\theta}$.



Sl. 4:8.

5. DEFORMACIONI RAD

5.1. Pojam deformacionog rada

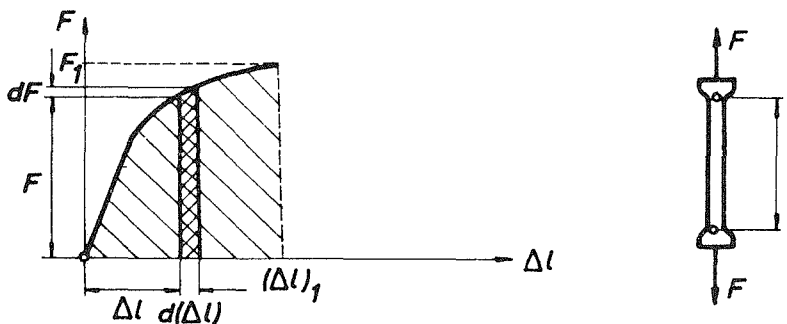
Posmatrajmo materijalnu tačku koja iz položaja M prelazi u obližnji položaj M' , tako da je $d\vec{u}$ vektor njenog infinitezimalnog pomjeranja. Neka je \vec{F} sila koja djeluje na tačku u položaju M . Tada se rad sile \vec{F} na pomjeranju $d\vec{u}$ definiše sa

$$d\mathcal{A} = \vec{F} \cdot d\vec{u}. \quad (1)$$

Rad sile \vec{F} na pomjeranju \vec{u} , od tačke M do M_1 , pri čemu se sila \vec{F} mijenja u toku tog pomjeranja, je

$$\mathcal{A} = \int_M^{M_1} \vec{F} \cdot d\vec{u}. \quad (2)$$

Pod dejstvom spoljašnjih sila tijelo se deformiše, pa se i napadne tačke spoljašnjih sila pomjeraju, te spoljašnje sile vrše rad na tim pomjeranjima. Rad spoljašnjih sila prilikom deformacije tijela nazivamo deformacioni rad. Saglasno zakonu o održanju energije (I zakon termodinamike), dio ovog rada se akumulira u tijelu kao elastična – povratna energija (koju možemo dobiti nazad ako rasteretimo tijelo), dio rada se troši na promjenu kinetičke energije tijela, a preostali dio se pretvara u toplotnu energiju, tj. predstavlja tzv. „izgubljeni“ rad. U našim razmatranjima ograničićemo se na slučaj statičkog opterećenja, tj. opterećenja koje raste veoma polako od nule do svoje ukupne vrijednosti. U tom slučaju su brzine i ubrzanja svih djelića tijela zanemarljivo male, pa se i kinetička energija tijela može zanemariti. Osim toga, ako je tijelo u ravnoteži nakon primjene ukupnog opterećenja, brzine su identički jednake nuli, pa je i kinetička energija tijela tada jednaka

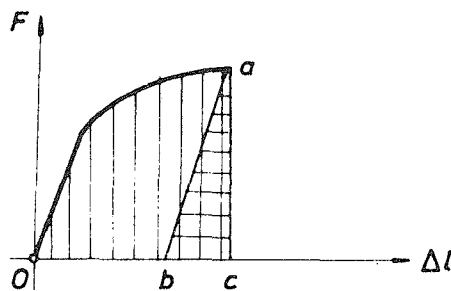


Sl. 5:1.

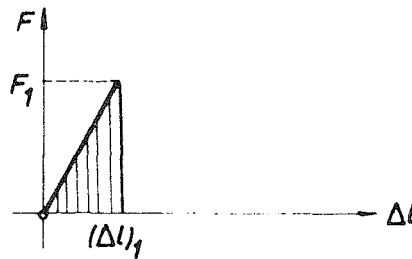
nuli. Dakle, rad spoljašnjih sila (deformacioni rad) pretvara se onda u elastičnu povratnu i toplotnu energiju. Da bismo ovo ilustrovali, posmatrajmo dijagram (sila, izduženje) dobijen u testu istezanja (sl. 5:1). U nekom trenutku deformisanja izduženje epruvete je Δl , a korespondentna sila F . Povećajmo silu za malu veličinu dF . Izduženje će se povećati za $d(\Delta l)$. Rad utrošen na izduženju $d(\Delta l)$ je $d\mathcal{A} = F d(\Delta l)$, tj. jednak je površini šrafiranog pravougaonika na sl. 5:1. Ukupan rad utrošen da bi se epruveta izdužila za $(\Delta l)_1$ je

$$\mathcal{A} = \int_0^{(\Delta l)_1} F d(\Delta l), \quad (3)$$

tj. jednak je površini ispod krive $F = F(\Delta l)$ na sl. 5:1. Dio ovog rada se akumulira u epruveti kao elastična – povratna energija, koja se može dobiti nazad rasterećenjem epruvete (dio abc na sl. 5:2), a drugi dio se pretvara u toplotnu energiju (dio Oab na sl. 5:2), tj. troši se na zagrijavanje epruvete i predstavlja „izgubljeni“ rad.



Sl. 5:2.



Sl. 5:3.

Naravno, ako je opterećenje takvo da imamo samo elastične deformacije, rad spoljašnjih sila se sav akumulira u tijelu u vidu elastične energije. U slučaju istezanja epruvete sila je proporcionalna izduženju, $F = k \Delta l$ (sl. 5:3), pa je rad na izduženju $(\Delta l)_1$ jednak

$$\mathcal{A} = \int_0^{(\Delta l)_1} F d(\Delta l) = \int_0^{(\Delta l)_1} k \Delta l d(\Delta l) = k \frac{(\Delta l)_1^2}{2} = \frac{1}{2} F_1 (\Delta l)_1, \quad (4)$$

tj. jednak je površini šrafiranog trougla na sl. 5:3.

Izraz za deformacioni rad elastično istegnute epruvete možemo dobiti i na sljedeći način. Izdvojimo elemenat epruvete dužine dz . Na njega djeluju naponi σ_{zz} (sl. 5:4), pod čijim dejstvom se javlja deformacija $\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz}$. Ukupna sila kojom se isteže uočeni element je $\sigma_{zz} A$, gdje je A površina poprečnog presjeka epruvete, a izduženje elementa je $\epsilon_{zz} dz$. Prema tome, rad utrošen na deformaciji elementa je

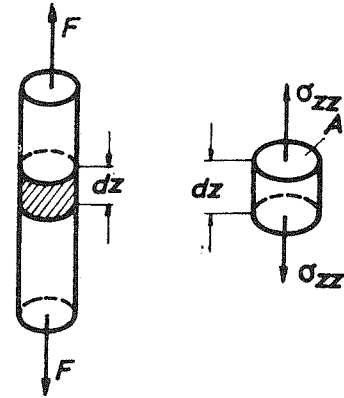
$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sigma_{zz} A \epsilon_{zz} dz = \frac{1}{2} \sigma_{zz} \epsilon_{zz} dV, \quad (5)$$

gdje je $dV = Adz$ zapremina elementa. Veličina

$$\mathcal{A}^* = \frac{d\mathcal{A}}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} \quad (6)$$

naziva se specifični deformacioni rad, ili rad po jedinici zapremine. Ukupan rad na deformaciji epruvete je onda

$$\mathcal{A} = \int_V \mathcal{A}^* dV = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} dV. \quad (7)$$



Sl. 5:4.

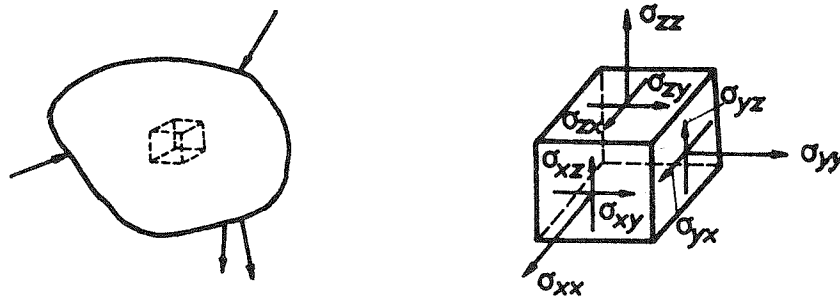
Ako je epruveta pod dejstvom sile F_1 izdužena za $(\Delta l)_1$, tada je $\sigma_{zz} = \frac{F_1}{A}$ i $\varepsilon_{zz} = \frac{(\Delta l)_1}{l}$, pa iz (7) dobijamo ponovo (4)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{F_1}{A} \frac{(\Delta l)_1}{l} Al = \frac{1}{2} F_1 (\Delta l)_1. \quad (8)$$

Dakle, i (4) i (7) daju deformacioni rad utrošen na istezanje epruvete, s tim što je u (4) on izražen preko spoljašnje sile F i pomjeranja napadne tačke te sile, a u (7) preko unutrašnjih sila, tj. napona i korespondentnih deformacija. U narednom poglavlju uopšticeemo izraze (4) i (7) na slučaj proizvoljne geometrije i opterećenja tijela.

5.2. Izraz za deformacioni rad elastično deformisanog tijela

Posmatrajmo tijelo opterećeno spoljašnjim površinskim silama \vec{p}_n i zapreminskim silama \vec{b} . Pod dejstvom ovog opterećenja tijelo prelazi u napregnutu, deformisanu konfiguraciju. Izdvojimo na proizvoljnom mjestu mali paralelepiped iz tijela (dovoljno mali da se stanje napona u njemu može smatrati homogenim), kao što je



Sl. 5:5.

prikazano na sl. 5:5. Ovaj element je pod dejstvom normalnih napona σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} dobio dilataciju ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} (saglasno Hookeovom zakonu), a pod dejstvom smičućih napona σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} klizanja ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{zx} . Kako su u pitanju elastične deformacije, utrošeni rad na deformisanju ovog elementa je

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + 2\sigma_{zx}\varepsilon_{zx}) dV, \quad (1)$$

gdje je $dV = dx dy dz$ zapremina elementa. U (1) je očigledno primijenjen princip superpozicije, tj. ukupan rad je dobijen sabirajući radove na komponentalnim deformacijama. Pri tome je, recimo, rad na dilataciji ε_{xx} (ne zaboravimo da ε_{xx} zavisi od σ_{xx} , σ_{yy} i σ_{zz})

$$\frac{1}{2} (\sigma_{xx} dy dz) (\varepsilon_{xx} dx) = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV,$$

a na klizanju, na primjer ε_{xy} ,

$$\frac{1}{2} (\sigma_{xy} dx dy) (2 \varepsilon_{xy} dz) = \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} dV.$$

Veličina

$$\mathcal{A}^* = \frac{d\mathcal{A}}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + 2\sigma_{zx}\varepsilon_{zx}) \quad (2)$$

naziva se specifični deformacioni rad elastičnog tijela (ili rad po jedinici zapremine). Ukupan deformacioni rad čitavog tijela je

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_V \mathcal{A}^* dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + 2\sigma_{zx}\varepsilon_{zx}) dV. \end{aligned} \quad (3)$$

Naravno, ovaj rad je ostvaren dejstvom spoljašnjeg opterećenja, tj. površinskim silama \vec{p}_n i zapreminskim silama \vec{b} , pa (3) mora biti isto što i rad ovih sila na pomjeranjima njihovih napadnih tačaka, tj.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_S (\vec{p}_n \cdot \vec{u}) dS + \frac{1}{2} \int_V (\vec{b} \cdot \vec{u}) dV, \quad (4)$$

gdje je $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ vektor pomjeranja tačaka tijela. Da je (3) i (4) identično jednako, može se i formalno pokazati transformacijom površinskog integrala u (4) u zapreminski, i korićenjem Cauchyevih jednačina ravnoteže, u što se mi nećemo upuštati. Bilo (3) ili (4), dakle, predstavlja ukupan utrošeni rad na elastičnoj deformaciji tijela. Ovaj rad se akumulira u tijelu kao elastična – povratna (deformaciona) energija, koja se može dobiti nazad u vidu rada ako se tijelo postepeno rastereti od spoljašnjeg opterećenja.

Koristeći Hookeov zakon možemo deformacioni rad izraziti kompletno ili preko napona ili preko deformacije, tako da dobijamo:

$$\mathcal{A}^*(\sigma) = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \frac{1}{2G} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \quad (5)$$

$$\mathcal{A}^*(\varepsilon) = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + \mu (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + 2\mu (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2), \quad (6)$$

što predstavlja kvadratne forme po komponentalnim naponima, odnosno deformacijama.

Lako je sada pokazati da iz (5) i (6) slijedi:

$$\frac{\partial \mathcal{A}^*(\sigma)}{\partial \sigma_{xx}} = \varepsilon_{xx}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}^*(\sigma)}{\partial \sigma_{xy}} = 2\varepsilon_{xy}, \quad \text{itd.} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}^*(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{xx}} = \sigma_{xx}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}^*(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{xy}} = 2\sigma_{xy}, \quad \text{itd.}, \quad (8)$$

tj. izvod specifičnog deformacionog rada po komponentalnom naponu jednak je korespondentnoj deformaciji, i obrnuto, što predstavlja važnu osobinu deformacionog rada elastično deformisanog tijela.

Od interesa je, na kraju, izračunati dio rada koji se troši na promjenu zapremine i dio koji se troši na promjenu oblika tijela, jer se u opštem slučaju prilikom deformacije mijenjaju i oblik i zapremina. Dio rada koji se troši na promjenu zapremine (koju definiše kubna dilatacija $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$) je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{sf}^* &= \frac{1}{2} \sigma_s e = \frac{1}{2} \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \\ &= \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 = \frac{1}{2K} \sigma_s^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Ovaj dio deformacionog rada naziva se sferni dio. Preostali dio se naziva devijatorski dio, i troši se na promjenu oblika

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{dev}^* &= \mathcal{A}^* - \mathcal{A}_{sf}^* = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \\ &+ \frac{1}{2G} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Razdvajanje deformacionog rada na sferni i devijatorski dio ima naročito značenje u teoriji plastičnosti, gdje se početak plastičnog deformisanja definiše preko devijatorskog dijela deformacionog rada, tj. smatra se da će materijal početi da se plastično deformiše u nekoj tački ako devijatorski dio deformacionog rada dostigne određenu kritičnu vrijednost (Misesov kriterijum o početku plastičnog tečenja, odjeljak 3.4.1).

5.3. Teorema o minimumu potencijalne energije

Neka je tijelo u ravnoteži pod djelstvom spoljašnjih i zapreminskih sila. Površinske sile su zadane na dijelu S_p omotača tijela, dok su na preostalom dijelu S_u poznata pomjeranja. Neka su pomjeranja koja odgovaraju ravnotežnom stanju tijela $u = u(x, y, z)$. Posmatrajmo dodatno polje pomjeranja δu koje je diferencijabilno i takvo da je $\delta u = 0$ na dijelu S_u , a proizvoljno infinitezimalno u ostalim tačkama tijela. Pomjeranja δu zovemo virtualnim pomjeranjima. To nisu stvarna, fizička pomjeranja koja se javljaju pod djelstvom datog opterećenja, već zamišljena, kinematički moguća pomjeranja.

Virtualni rad $\delta \mathcal{A}$ spoljašnjih površinskih sila \vec{p}_n i zapreminskih sila \vec{b} na virtualnim pomjeranjima δu , pri čemu se pretpostavlja da sile ostaju konstantne pri nanošenju pomjeranja δu , jednak je

$$\delta \mathcal{A} = \int_S \vec{p}_n \cdot \delta \vec{u} dS + \int_V \vec{b} \cdot \delta \vec{u} dV. \quad (1)$$

No, virtualnim pomjeranjima δu odgovaraju virtualne deformacije $\delta \epsilon_{xx}, \dots, \delta \epsilon_{zx}$. Virtualni rad izvršen na elementarno malom dijelu tijela je očigledno

$$d(\delta \mathcal{A}) = (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + 2\sigma_{xy} \delta \epsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \delta \epsilon_{yz} + 2\sigma_{zx} \delta \epsilon_{zx}) dV, \quad (2)$$

pa je ukupan virtualni rad

$$\delta \mathcal{A} = \int_V (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + 2\sigma_{xy} \delta \epsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \delta \epsilon_{yz} + 2\sigma_{zx} \delta \epsilon_{zx}) dV. \quad (3)$$

Naravno, (1) i (3) moraju biti identički jednaki, pa imamo

$$\int_S \vec{p}_n \cdot \delta \vec{u} dS + \int_V \vec{b} \cdot \delta \vec{u} dV = \int_V (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + 2\sigma_{xy} \delta \epsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \delta \epsilon_{yz} + 2\sigma_{zx} \delta \epsilon_{zx}) dV. \quad (4)$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} \delta \left(\int_V \mathcal{A}^*(\epsilon) dV \right) &= \int_V \delta \mathcal{A}^*(\epsilon) dV = \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \epsilon_{xx}} \delta \epsilon_{xx} + \frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \epsilon_{yy}} \delta \epsilon_{yy} + \dots + \frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \epsilon_{zx}} \delta \epsilon_{zx} \right) dV = \\ &= \int_V (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + 2\sigma_{xy} \delta \epsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \delta \epsilon_{yz} + 2\sigma_{zx} \delta \epsilon_{zx}) dV. \end{aligned} \quad (5)$$

Prema tome, umjesto (4) sada možemo pisati

$$\int_S \vec{p}_n \cdot \delta \vec{u} dS + \int_V \vec{b} \cdot \delta \vec{u} dV = \delta \left(\int_V \mathcal{A}^*(\varepsilon) dV \right). \quad (6)$$

Kako se sile \vec{p}_n i \vec{b} ne mijenjaju u toku varijacije $\delta \vec{u}$, i s obzirom da je S i V fiksno, možemo znak varijacije izvući ispred integrala na lijevoj strani u (6), tj.

$$\delta \left(\int_S \vec{p}_n \cdot \vec{u} dS + \int_V \vec{b} \cdot \vec{u} dV \right) = \delta \left(\int_V \mathcal{A}^*(\varepsilon) dV \right), \quad (7)$$

pa konačno imamo

$$\delta I = 0, \quad (8)$$

gdje je

$$I = \int_V \mathcal{A}^*(\varepsilon) dV - \int_S \vec{p}_n \cdot \vec{u} dS - \int_V \vec{b} \cdot \vec{u} dV \quad (9)$$

tzv. potencijalna energija elastično deformisanog tijela.

Dakle, od svih kinematički dopuštenih polja pomjeranja stvarno polje pomjeranja koje odgovara ravnotežnoj konfiguraciji je ono za koje potencijalna energija ima ekstremum (jer je $\delta I = 0$). Može se pokazati da je taj ekstremum, u stvari, minimum. (Teorema o minimumu potencijalne energije).

Obrnuto, ako je $\delta I = 0$ za pretpostavljeno kinematički dopušteno polje pomjeranja, tada je to polje stvarno rješenje koje odgovara ravnoteži, jer se ispostavlja da su zadovoljene Cauchyve jednačine ravnoteže i granični uslovi po naponima. Ova teorema se često koristi pri (približnom) rješavanju konkretnih problema teorije elastičnosti kada se rješenje traži preko pomjeranja.

5.4. Teorema o minimumu komplementarne energije

U prethodnom poglavlju pokazali smo da od svih kinematički mogućih pomjeranja stvarna pomjeranja koja odgovaraju ravnoteži su ona koja čine potencijalnu energiju minimalnom. Posmatrajmo sada, umjesto pomjeranja, napone koji odgovaraju ravnoteži. Kao što znamo, postoji mnogo različitih raspodjela napona koje zadovoljavaju uslove ravnoteže (jer sistem od tri Cauchyve diferencijalne jednačine ravnoteže nije dovoljan za određivanje šest nepoznatih komponenti napona) pa se postavlja pitanje koje je polje napona, od svih statički mogućih, stvarno rješenje problema.

Pretpostavimo da je $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ stvarno rješenje koje, dakle, zadovoljava jednačine ravnoteže, granične uslove po naponima i Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti. Neka su $\delta\sigma_{xx}, \delta\sigma_{yy}, \dots, \delta\sigma_{zx}$ male varijacije napona takve da naponi $\sigma_{xx} + \delta\sigma_{xx}, \sigma_{yy} + \delta\sigma_{yy}, \dots, \sigma_{zx} + \delta\sigma_{zx}$ takođe zadovoljavaju jednačine ravnoteže i granične uslove po naponima. Virtualnim priraštajima napona $\delta\sigma_{xx}, \dots, \delta\sigma_{zx}$ odgovaraće virtualne površinske sile na dijelu S_u omotača gdje su zadata pomjeranja:

$$\begin{aligned} n_x \delta\sigma_{xx} + n_y \delta\sigma_{xy} + n_z \delta\sigma_{xz} &= \delta p_{nx} \\ n_x \delta\sigma_{yx} + n_y \delta\sigma_{yy} + n_z \delta\sigma_{yz} &= \delta p_{ny} \\ n_x \delta\sigma_{zx} + n_y \delta\sigma_{zy} + n_z \delta\sigma_{zz} &= \delta p_{nz}. \end{aligned} \quad (1)$$

Virtualni rad ovih sila na stvarnim pomjeranjima \vec{u} je

$$\delta \mathcal{A} = \int_{S_u} \delta \vec{p}_n \cdot \vec{u} dS. \quad (2)$$

Ovo mora biti jednako sa

$$\delta \mathcal{A} = \int_V (\delta \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \delta \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \delta \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2\delta \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\delta \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + 2\delta \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) dV. \quad (3)$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} \delta \left(\int_V \mathcal{A}^*(\sigma) dV \right) &= \int_V \delta \mathcal{A}^*(\sigma) dV = \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \sigma_{xx}} \delta \sigma_{xx} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \sigma_{yy}} \delta \sigma_{yy} + \dots + \frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \sigma_{zx}} \delta \sigma_{zx} \right) dV = \\ &= \int_V (\varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \delta \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} \delta \sigma_{zz} + 2\varepsilon_{xy} \delta \sigma_{xy} + \\ &\quad + 2\varepsilon_{yz} \delta \sigma_{yz} + 2\varepsilon_{zx} \delta \sigma_{zx}) dV, \end{aligned} \quad (4)$$

pa je

$$\int_{S_u} \delta \vec{p}_n \cdot \vec{u} dS = \delta \left(\int_V \mathcal{A}^*(\sigma) dV \right). \quad (5)$$

Kako su \vec{u} zadata (fiksna) pomjeranja na S_u i nezavisna od $\delta \vec{p}_n$, znak varijacije možemo izvući ispred integrala na lijevoj strani u (5), tj.

$$\delta \left(\int_{S_u} \vec{p}_n \cdot \vec{u} dS \right) = \delta \left(\int_V \mathcal{A}^*(\sigma) dV \right), \quad (6)$$

pa konačno imamo

$$\delta I_c = 0, \quad (7)$$

gdje je

$$I_c = \int_V \mathcal{A}^*(\sigma) dV - \int_{S_u} \vec{p}_n \cdot \vec{u} dS \quad (8)$$

tzv. komplementarna energija elastično deformisanog tijela.

Dakle, od svih statički mogućih napona, stvarno rješenje čini komplementarnu energiju ekstremnom (minimalnom), što je teorema o minimumu komplementarne energije.

Obrnuto, ako je $\delta I_c = 0$ za pretpostavljeno statički dopušteno polje napona, tada je to polje napona stvarno rješenje problema, jer se pokazuje da ono zadovoljava Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti. Ovo se često koristi u (približnom) rješavanju konkretnih problema teorije elastičnosti, kada se rješenje traži preko napona.

3.3. Bettiev stav o recipročnosti

Neka na elastično tijelo djeluje sistem spoljašnjih sila ①, tj. površinske sile $\vec{p}_n^{\textcircled{1}}$ i zapreminske sile $\vec{b}^{\textcircled{1}}$, i neka su rezultujuća pomjeranja $\vec{u}^{\textcircled{1}}$. Pri tome izvršeni rad je

$$\mathcal{A}^{1,1} = \frac{1}{2} \int_S \vec{p}_n^{\textcircled{1}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{1}} dS + \frac{1}{2} \int_V \vec{b}^{\textcircled{1}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{1}} dV. \quad (1)$$

Neka je sada na tako deformisano tijelo (koje je pod dejstvom sistema sila ①), primijenjen sistem spoljašnjih sila ②, tj. površinske sile $\vec{p}_n^{\textcircled{2}}$ i zapreminske sile $\vec{b}^{\textcircled{2}}$, i neka su korespondentna pomjeranja usljed sistema sila ②, $\vec{u}^{\textcircled{2}}$. Dodatni izvršeni rad na pomjeranjima $\vec{u}^{\textcircled{2}}$ sastoji se iz dva dijela, rada sistema sila ② na pomjeranjima $\vec{u}^{\textcircled{2}}$, koji je jednak

$$\mathcal{A}^{2,2} = \frac{1}{2} \int_S \vec{p}_n^{\textcircled{2}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{2}} dS + \frac{1}{2} \int_V \vec{b}^{\textcircled{2}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{2}} dV, \quad (2)$$

i rada sistema sila ① na pomjeranjima $\vec{u}^{\textcircled{2}}$, koji je jednak

$$\mathcal{A}^{1,2} = \int_S \vec{p}_n^{\textcircled{1}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{2}} dS + \int_V \vec{b}^{\textcircled{1}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{2}} dV. \quad (3)$$

Primijeti da u (3) nema koeficijenta 1/2 u izrazu za rad jer su sile ① već bile primijenjene u punom iznosu i tako djelovale na pomjeranju $\vec{u}^{\textcircled{2}}$. Ukupan rad izvršen nanošenjem oba sistema je, dakle,

$$\mathcal{A}^{1,1} + \mathcal{A}^{2,2} + \mathcal{A}^{1,2}. \quad (4)$$

Da smo prvo primijenili sistem sila ② pa ①, ukupan rad bi bio

$$\mathcal{A}^{2,2} + \mathcal{A}^{1,1} + \mathcal{A}^{2,1}. \quad (5)$$

No, završno deformisano stanje tijela je nezavisno od redosljeda opterećenja, pa prema tome mora biti isti izvršeni deformacioni rad

$$\mathcal{A}^{1,1} + \mathcal{A}^{2,2} + \mathcal{A}^{1,2} = \mathcal{A}^{2,2} + \mathcal{A}^{1,1} + \mathcal{A}^{2,1}, \quad (6)$$

odakle je

$$\mathcal{A}^{1,2} = \mathcal{A}^{2,1}, \quad (7)$$

odnosno

$$\int_S \vec{p}_n^{\textcircled{1}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{2}} dS + \int_V \vec{b}^{\textcircled{1}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{2}} dV = \int_S \vec{p}_n^{\textcircled{2}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{1}} dS + \int_V \vec{b}^{\textcircled{2}} \cdot \vec{u}^{\textcircled{1}} dV. \quad (8)$$

Jednačina (7), odnosno (8), predstavlja Bettiev stav o recipročnosti: ako na elastično tijelo djeluju dva sistema sila ① i ②, tada je rad sistema sila ① na pomjeranjima usljed sistema sila ② jednak radu sistema sila ② na pomjeranjima usljed sistema sila ①.

Bettiev stav možemo zapisati i u obliku izraženom preko napona i deformacija

$$\int_V (\sigma_{xx}^{\textcircled{1}} \varepsilon_{xx}^{\textcircled{2}} + \sigma_{yy}^{\textcircled{1}} \varepsilon_{yy}^{\textcircled{2}} + \dots + 2\sigma_{zx}^{\textcircled{1}} \varepsilon_{zx}^{\textcircled{2}}) dV =$$

$$= \int_V (\sigma_{xx}^{\textcircled{2}} \varepsilon_{xx}^{\textcircled{1}} + \sigma_{yy}^{\textcircled{2}} \varepsilon_{yy}^{\textcircled{1}} + \dots + 2\sigma_{zx}^{\textcircled{2}} \varepsilon_{zx}^{\textcircled{1}}) dV. \quad (9)$$

Napominjemo da smo Bettiev stav izveli pod pretpostavkom da važi princip superpozicije, što je uvijek slučaj u infinitezimalnoj elastičnosti. Bettiev stav, međutim, ne bi važio ako princip superpozicije ne važi, na primjer, ako bi pomjeranja $\vec{u}^{\textcircled{2}}$ zavisila ne samo od sila $\textcircled{2}$ već i od prethodno nanijetih sila $\textcircled{1}$. U plastičnosti, recimo, Bettiev stav ne važi.

5.5.1. Maxwellov stav o uzajamnosti pomjeranja

Posmatrajmo elastično tijelo opterećeno sa dvije koncentrisane sile F_i i F_j . Ravnoteža tijela obezbijeđena je osloncima kao što je prikazano na sl. 5:6. Pod dejstvom sile F_j napadna tačka $\textcircled{1}$ sile F_i imaće izvjesno pomjeranje. Ako sa δ_{ij} označimo projekciju pomjeranja tačke $\textcircled{1}$ na pravac sile F_i usljed dejstva jedinične sile $F_j=1$, tada je projekcija pomjeranja tačke $\textcircled{1}$ na pravac sile F_i usljed dejstva sile $F_j \neq 1$ jednaka $F_j \delta_{ij}$, a rad sile F_i na ovom pomjeranju je $F_i (F_j \delta_{ij})$. Analogno je rad sile F_j na pomjeranju napadne tačke $\textcircled{1}$ usljed dejstva sile F_i jednak $F_j (F_i \delta_{ji})$. Ako silu F_i sa odgovarajućim oslonačkim reakcijama shvatimo kao sistem sila $\textcircled{1}$, a silu F_j sa odgovarajućim oslonačkim reakcijama kao sistem sila $\textcircled{2}$, tada je saglasno Bettievom stavu

$$F_i F_j \delta_{ij} = F_j F_i \delta_{ji}, \quad (1)$$

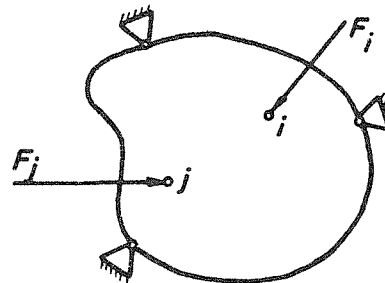
tj.

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \quad (2)$$

Ovo je Maxwellov stav o uzajamnosti pomjeranja: ako na tijelo djeluju dvije jedinične sile, onda je pomjeranje napadne tačke prve sile u pravcu te sile usljed dejstva druge sile jednako pomjeranju napadne tačke druge sile u pravcu te sile usljed dejstva prve sile.

Veličine δ_{ij} nazivaju se Maxwellovi uticajni koeficijenti (brojevi) i često se koriste u analizi konstrukcija. Ako na tijelo djeluje više sila F_1, F_2, \dots, F_n , tada se pomjeranje napadne tačke sile F_i u pravcu te sile može izraziti koristeći Maxwellove koeficijente u obliku

$$f_i = F_1 \delta_{i1} + F_2 \delta_{i2} + \dots + F_n \delta_{in}. \quad (3)$$



Sl. 5:6.

5.5.2. Castiglianovi stavovi

Vidjeli smo ranije da je rad spoljašnjih (površinskih i zapreminskih) sila na odgovarajućim pomjeranjima jednak

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_S \vec{p}_n \cdot \vec{u} dS + \frac{1}{2} \int_V \vec{b} \cdot \vec{u} dV. \quad (1)$$

U specijalnom slučaju, ako na tijelo djeluje samo sistem koncentrisanih sila \vec{F}_i ($i=1, 2, \dots, n$), izvršeni rad je

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{u}_i, \quad (2)$$

gdje su \vec{u}_i pomjeranja napadnih tačaka sila \vec{F}_i . Ako sa f_i označimo projekciju pomjeranja \vec{u}_i na pravac sile \vec{F}_i , (2) možemo zapisati kao

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i f_i. \quad (3)$$

No, koristeći Maxwellove koeficijente pomjeranje f_i možemo izraziti u obliku

$$f_i = F_1 \delta_{i1} + F_2 \delta_{i2} + \dots + F_n \delta_{in} = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{ij}, \quad (4)$$

tako da (3) postaje

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j \delta_{ij}, \quad (5)$$

odakle vidimo da je deformacioni rad kvadratna forma po silama F_i ($i=1, 2, \dots, n$)

Nađimo sada izvod deformacionog rada po sili F_j . Diferencirajući (5), dobijamo

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F_j} = \frac{1}{2} f_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial f_i}{\partial F_j}. \quad (6)$$

No, iz (4) je $\frac{\partial f_i}{\partial F_j} = \delta_{ij}$, pa (6) postaje

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F_j} = \frac{1}{2} f_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_{ij} = \frac{1}{2} f_j + \frac{1}{2} f_j = f_j. \quad (7)$$

Dakle, ako deformacioni rad izrazimo u funkciji sila koje djeluju na tijelo tada je izvod deformacionog rada po jednoj od sila jednak projekciji pomjeranja napadne tačke te sile u pravcu te sile, tj.

$$f_j = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F_j} \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Ovo je prvi Castiglianov stav. Ako se za pomjeranje sračunato po (8) dobije pozitivna vrijednost, smjer pomjeranja se poklapa sa smjerom sile, i obrnuto.

Iako smo prvi Castiglianov stav izveli za slučaj da na tijelo djeluje sistem koncentrisanih spoljašnjih sila, on važi i ako imamo proizvoljno spoljašnje opterećenje, tj. površinske sile p_n , zapreminske sile b i koncentrisane sile F_i ($i=1, 2, \dots, n$). Zaista, tada se deformacioni rad može izraziti kao funkcija tog opterećenja, tj. $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}_n, \vec{b}, F_1, F_2, \dots, F_n)$, i ako pretpostavimo da smo povećali samo silu F_j za dF_j , \mathcal{A} je poraslo za $d\mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F_j} dF_j$. No, $d\mathcal{A}$ je takođe jednako $d\mathcal{A} = dF_j \cdot f_j$, pa slijedi ponovo $f_j = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F_j}$.

Ako želimo odrediti pomjeranje u nekoj tački gdje ne djeluje koncentrisana sila, možemo zamisliti fiktivnu silu u toj tački u pravcu u kome želimo da odredimo komponentu pomjeranja, pa primijeniti prvi Castiglianov stav i u završni rezultat staviti da je fiktivna sila jednaka nuli.

Formulišimo sada i drugi Castiglianov stav. Ako sa β_{ij} (tzv. recipročni Maxwellovi koeficijenti) označimo silu koja treba da djeluje u tački ① u pravcu pomjeranja f_j , pa da bi u tački ① nastupilo jedinično pomjeranje u pravcu f_j , a da u svim ostalim tačkama budu pomjeranja jednaka nuli, tada se deformacioni rad može izraziti, analogno sa (5), u obliku

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} f_i f_j. \quad (9)$$

Diferencirajući ovo po f_j dobijamo, slično kao i prije, da je

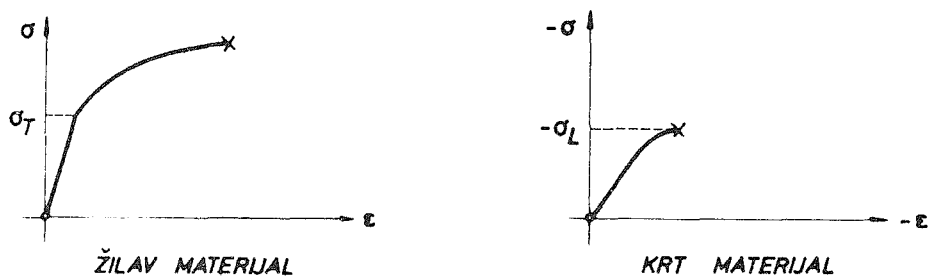
$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial f_j} = F_j, \quad (10)$$

što predstavlja drugi Castiglianov stav: ako deformacioni rad izrazimo u funkciji pomjeranja napadnih tačaka sila u pravcu tih sila, onda je izvod deformacionog rada po jednom od ovih pomjeranja jednak odgovarajućoj sili.

6. HIPOTEZE O SLOMU

6.1. Uvodne napomene

U inženjerskim konstrukcijama ne smije se dopustiti pojava intenzivne plastične deformacije niti pojava pukotine jer to može voditi lomu konstruktivnog elementa ili čitave konstrukcije. Zato se proračun konstruktivnih elemenata mora izvršiti tako da pod djelovanjem spoljašnjeg opterećenja ne dođe do pojave plastične deformacije ili pukotine. Kod žilavih materijala, kao što su čelik, aluminijum i sl., lomu prethodi znatna plastična deformacija, dok kod krutih materijala kao što su liveno gvožđe, beton ili kamen, lomu prethodi pojava pukotine bez pojave znatnije plastične deformacije. Jednim imenom pojavu plastične deformacije ili pukotine nazivamo slomom. Zadatak je inženjera da obezbijedi da ne dođe do sloma u konstruktivnom elementu, odnosno konstrukciji, u složenim uslovima opterećenja. Na žalost, ni do danas ne postoji razvijena teorija koja pouzdano može predvidjeti kada će u uslovima proizvoljnog, složenog (trodimenzionalnog) naponskog stanja doći do sloma. Eksperimenti su pokazali da u slučaju aksijalnog naprezanja do sloma dolazi kada normalni napon σ dostigne granicu tečenja σ_T u testu istezanja (za žilave materijale), odnosno granicu loma σ_L u testu pritiska (za krte materijale) (sl. 6:1). Postoji takođe izvjestan broj eksperimentalnih podataka o nastanku sloma

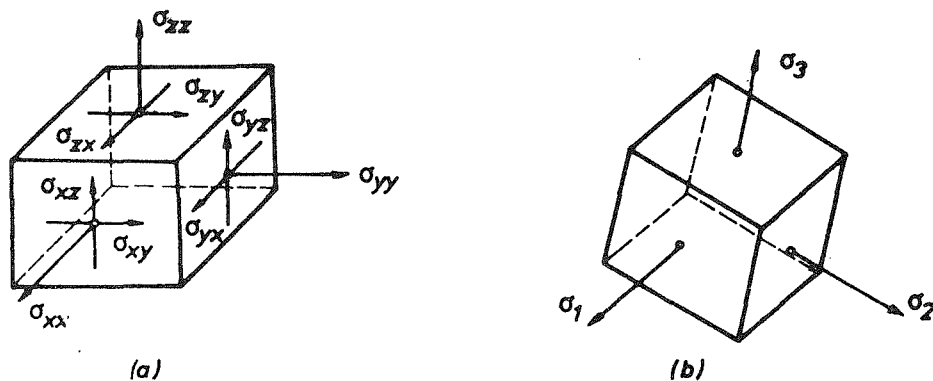


Sl. 6:1.

u slučaju čistog smicanja i dvodimenzionalnog naponskog stanja, ali je vrlo malo eksperimentalnih podataka o nastanku i prirodi sloma u slučaju trodimenzionalnog naponskog stanja zbog komplikovanosti eksperimenta i nemogućnosti da se ispituju sve moguće kombinacije složenog trodimenzionalnog naponskog stanja. Zato su predložene, sa manje ili više uspjeha, različite hipoteze o slomu čiji je zadatak da se, na osnovu poznatog ponašanja materijala u testu istezanja ili pritiska, predvidi ponašanje, tj. slom materijala u uslovima proizvoljnog složenog opterećenja. Ni jedna od ovih hipoteza ne slaže se u potpunosti sa raspoloživim eksperimentalnim podacima; no u nedostatku prave teorije o slomu, ove hipoteze i danas predstavljaju osnovu u složenim inženjerskim proračunima.

6.2. Hipoteze o slomu

U slučaju proizvoljnog opterećenja stanje napona u tački definisano je sa šest komponenti tenzora napona, tri normalna σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} i tri smičuća σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} napona. Ako se za koordinatne pravce izaberu glavni pravci napona u uočenoj tački, tada je stanje napona u toj tački u potpunosti određeno sa tri glavna napona σ_1 , σ_2 , σ_3 (sl. 6:2). Hipoteze o slomu materijala formulisaćemo preko glavnih napona. Pri tome ćemo smatrati da su glavni pravci izabrani tako da je po algebarskoj vrijednosti $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.



Sl. 6:2.

6.2.1. Hipoteza najvećeg normalnog napona

Prema ovoj hipotezi do sloma dolazi kada najveći normalni napon dostigne granicu sloma σ_0 (tečenja σ_T za žilave materijale ili loma σ_L za krte materijale) pri aksijalnom naprezanju, tj. kada je

$$\sigma_1 = \sigma_0. \quad (1)$$

σ_0 se eksperimentalno određuje za dati materijal testom istežanja, odnosno pritiska.

Ako materijal ima različite osobine na istežanje i pritisak, tj. ako je granica sloma pri istežanju σ_0^+ , a pri pritisku σ_0^- (po apsolutnoj vrijednosti), neophodno je izvršiti provjeru otpornosti i na istežanje i na pritisak. Na primjer, ako je $\sigma_1 > 0$, a $\sigma_3 < 0$, do sloma dolazi ako je

$$\sigma_1 = \sigma_0^+ \quad \text{ili} \quad |\sigma_3| = \sigma_0^-. \quad (2)$$

Hipotezu o najvećem normalnom naponu (koja se još zove i I hipoteza) ne potvrđuju eksperimentalni podaci, naročito ako su u pitanju žilavi materijali. Na primjer, metali mogu da izdrže izvanredno veliki hidrostatički pritisak ($|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\sigma_3| \gg \sigma_0$) a da ne dođe do plastičnog tečenja, odnosno sloma. Prema tome, samo veličina najvećeg normalnog napona ne može biti pouzdan kriterijum o nastanku sloma. Za krte materijale ova hipoteza se bolje slaže sa eksperimentalnim rezultatima nego za žilave materijale.

6.2.2. Hipoteza najveće dilatacije

Po ovoj hipotezi do sloma dolazi kada najveća dilatacija dostigne vrijednost dilatacije pri slomu u testu aksijalnog naprezanja, tj. kada je (pretpostavljajući izotropnost materijala)

$$\frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_0}{E}, \quad (1)$$

odnosno kada je

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0. \quad (2)$$

Ako su osobine materijala na istezanje i pritisak različite, tada do sloma može doći ako najveće relativno izduženje dostigne graničnu vrijednost, tj. ako je

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0^+, \quad (3)$$

ili ako najveće relativno skraćanje dostigne graničnu vrijednost, tj. ako je

$$|\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| = \sigma_0^-. \quad (4)$$

I ova hipoteza, kao i prethodna, bolje se slaže sa eksperimentalnim podacima za krte nego žilave materijale. Hipoteza najveće dilatacije se još naziva i II hipoteza.

6.2.3. Hipoteza najvećeg smičućeg napona

Ova hipoteza se dobro slaže sa nizom eksperimentalnih podataka za žilave materijale. Po njoj do sloma, odnosno tečenja, dolazi kada najveći napon smicanja u materijalu (τ_{\max}) dostigne vrijednost najvećeg napona smicanja na granici tečenja pri aksijalnom istezanju (τ_0). Kako je

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (1)$$

i

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\sigma_0, \quad (2)$$

po ovoj hipotezi do sloma dolazi ako je

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0. \quad (3)$$

U gornjim izrazima σ_0 je, u stvari, σ_T jer se hipoteza dobro slaže sa eksperimentalnim podacima za žilave materijale (za koje je $\sigma_0 = \sigma_T$), pa se samo za njih i koristi. Za krte materijale ova hipoteza ne daje zadovoljavajuće rezultate. Hipoteza najvećeg smičućeg napona (ili III hipoteza) je zapravo Treskin uslov plastičnog tečenja, koji smo već upoznali u odjeljku 3.4.1. Mana ovog uslova je, međutim, da pretpostavlja da srednji glavni napon σ_2 ne utiče na početak plastičnog tečenja, što eksperimenti ne potvrđuju. Ipak, hipoteza najvećeg smičućeg napona se veoma često koristi za žilave materijale i često daje zadovoljavajuće rezultate.

6.2.4. Hipoteza najvećeg deformacionog rada na promjeni oblika

Po ovoj hipotezi do sloma dolazi kada (specifični) deformacioni rad na promjeni oblika (\mathcal{A}_{dev}^*) dostigne vrijednost deformacionog rada na promjeni oblika na granici sloma pri aksijalnom naprezanju ($\mathcal{A}_{dev,0}^*$). Kako je (vidi 5.2:10):

$$\mathcal{A}_{dev}^* = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (1)$$

i

$$\mathcal{A}_{dev,0}^* = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_0^2, \quad (2)$$

do sloma dolazi ako je

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_0. \quad (3)$$

Ova hipoteza se najbolje slaže sa eksperimentalnim podacima za žilave materijale, pa se za njih smatra najtačnijom hipotezom. Ona je, u stvari, ranije pominjani Misesov uslov plastičnog tečenja (odjeljak 3.4.1). U mnogim slučajevima su, međutim, rezultati dobijeni korišćenjem ove i hipoteze o najvećem smičućem naponu približno jednaki, pa se u proračunima, zbog veće jednostavnosti primjene, češće koristi hipoteza o najvećem smičućem naponu. Hipoteza najvećeg deformacionog rada na promjeni oblika zove se često i IV hipoteza.

Primjer 6.1.

Uporediti navedene četiri hipoteze o slomu (žilavog materijala, $\sigma_0 = \sigma_T$) u slučajevima:

- a) aksijalnog naprezanja,
- b) čistog smicanja,
- c) ravnog stanja napona,

i dati grafičku interpretaciju rezultata.

Rješenje:

a) U slučaju aksijalnog naprezanja (sl. P 6.1(a)) glavni naponi su $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, pa je:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } \sigma = \sigma_T & \text{III: } \sigma = \sigma_T \\ \text{II: } \sigma = \sigma_T & \text{IV: } \sigma = \sigma_T, \end{array}$$

tj. sve četiri hipoteze daju isti rezultat da do sloma dolazi ako je napon $\sigma = \sigma_T$.

b) U slučaju čistog smicanja (sl. P 6.1(b)) je $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, pa je:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } \tau = \sigma_T & \text{III: } \tau = \frac{1}{2} \sigma_T \\ \text{II: } \tau = \frac{1}{1+\nu} \sigma_T & \text{IV: } \tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T. \end{array}$$

c) U slučaju ravnog stanja napona na sl. P 6.1(c) je:

$$\text{I: } \sigma_1 = \sigma_T$$

$$\text{III: } \sigma_1 = \sigma_T$$

$$\text{II: } \sigma_1 - \nu \sigma_2 = \sigma_T$$

$$\text{IV: } (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2} = \sigma_T.$$

Ako je, međutim, $\sigma_2 < 0$, tada je:

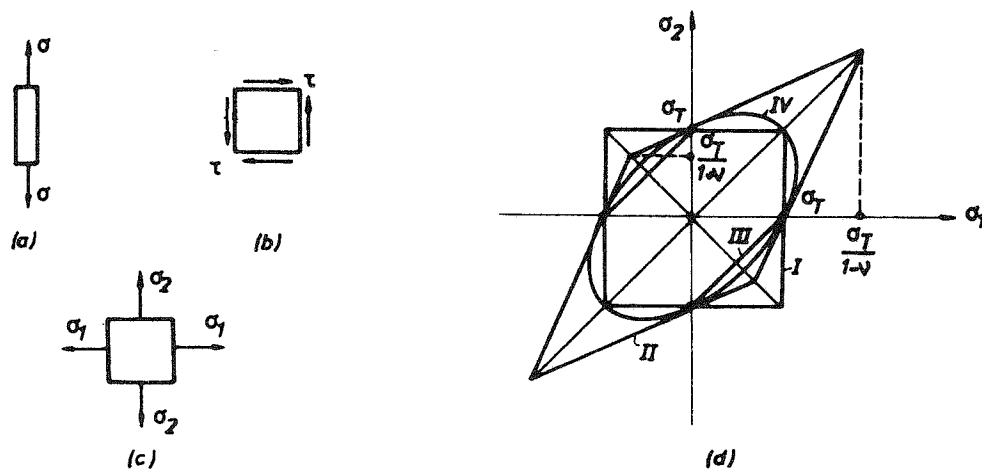
$$\text{I: } \sigma_1 = \sigma_T$$

$$\text{III: } \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T$$

$$\text{II: } \sigma_1 - \nu \sigma_2 = \sigma_T$$

$$\text{IV: } (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2} = \sigma_T.$$

Grafička interpretacija dobijenih rezultata je data na sl. P 6.1(d).



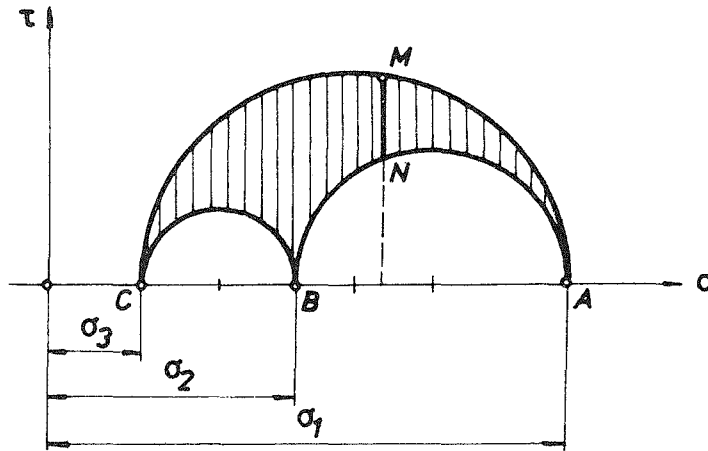
Sl. P 6.1.

Kao što se sa slike vidi, ako su σ_1 i σ_2 istog znaka, I i III hipoteza se poklapaju, a ako su suprotnog znaka, onda se znatno razlikuju. III i IV hipoteza se dobro slažu (najveće odstupanje između njih javlja se u slučaju čistog smicanja).

6.2.5. Mohrova hipoteza o slomu

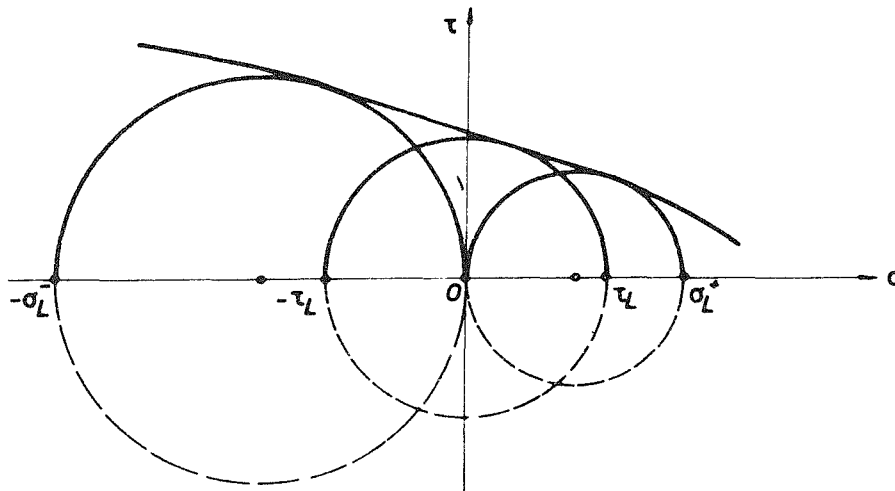
Za krte materijale najviše se koristi Mohrova hipoteza o slomu materijala. Pri formulisanju ove hipoteze Mohr se poslužio grafičkim prikazom stanja napona pomoću krugova. Normalni i smičući napon u nekoj ravni kroz uočenu tačku materijala dati su sa koordinatama neke tačke unutar šrafirane površine na sl. 6:3. Tačke koje se nalaze na istoj vertikali (kao što je MN) odgovaraju ravnima sa istim normalnim naponom i sa različitim smičućim naponom. Prirodno je pretpostaviti da je najkritičnije stanje, od svih ovih ravni, u onoj u kojoj je smičući napon najveći, tj. u ravni kojoj odgovara tačka M. Ako posmatramo sve moguće ravni kroz uočenu tačku, onda je jasno da će kritično stanje biti u jednoj od ravni kojoj odgovara tačka na spoljašnjem krugu AMC. Dakle, spoljašnji krug (određen sa σ_1 i σ_3) je sam dovoljan za određivanje kritičnog stanja napona. Ovo je iskoristio Mohr i predložio sljedeći postupak kao kriterijum o nastanku sloma. Eksperimentalno se odrede kritična stanja pri kojima nastaje slom u slučajevima više prostih napreza-

nja, kao što su aksijalno zatezanje, pritisak i čisto smicanje, pa se nacrtaju odgovarajući krugovi napona. Zatim se konstruiše obvojnica tih krugova (sl. 6:4). Da bi se ispitalo da li je neko stanje napona (σ_1 , σ_2 , σ_3) kritično u smislu nastanka



Sl. 6:3

sloma, konstruiše se krug određen sa σ_1 i σ_3 , pa ako ovaj krug tangira ili siječe obvojnica, stanje napona izaziva slom, a ako je unutar obvojnice, stanje napona ne izaziva slom.



Sl. 6:4.

Kao što smo rekli, Mohrova hipoteza se koristi za krte materijale, iako pretpostavka da srednji glavni napon ne utiče na slom, nije uvijek potvrđena eksperimentima. Mohrova hipoteza takođe nalazi veliku primjenu i u mehanici tla.

Primjer 6.2.

Neka je za neki kruti materijal $\sigma_L^- = 4\sigma_L^+$. Odrediti pomoću Mohrove hipoteze τ_L za slučaj čistog smicanja, smatrajući da je obvojnica aproksimirana pravom koja tangira krugove napona koji odgovaraju zatezanju i pritisku.

Rješenje:

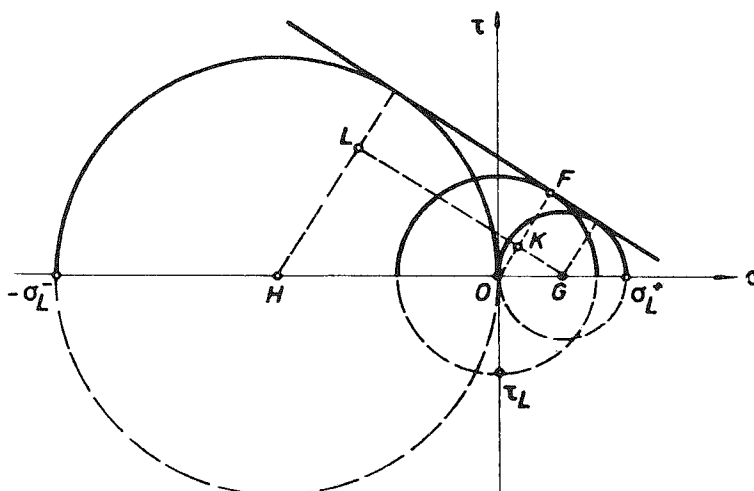
Sa sl. P 6.2 je očigledno:

$$\overline{OK} = \tau_L - \frac{1}{2}\sigma_L^+, \quad \overline{GO} = \frac{1}{2}\sigma_L^+, \quad \overline{HL} = \frac{1}{2}\sigma_L^- - \frac{1}{2}\sigma_L^+, \quad \overline{GH} = \frac{1}{2}(\sigma_L^+ + \sigma_L^-)$$

$$\overline{OK} : \overline{HL} = \overline{GO} : \overline{GH}.$$

Prema tome je

$$\tau_L = \frac{\sigma_L^+ \cdot \sigma_L^-}{\sigma_L^+ + \sigma_L^-} = \frac{4(\sigma_L^+)^2}{5\sigma_L^+} = 0,8\sigma_L^+$$



Sl. P 6.2.

Primjer 6.3.

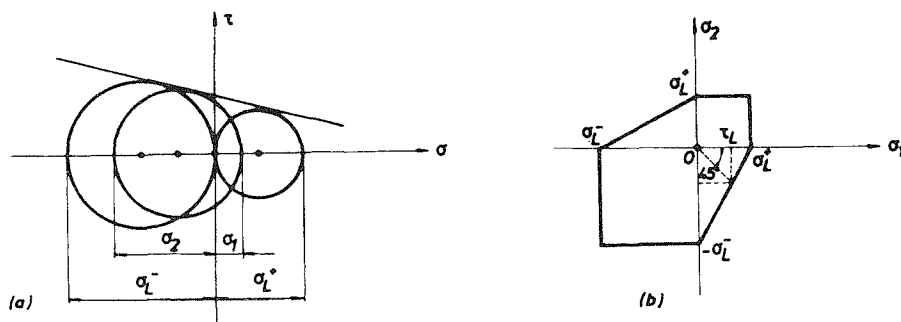
Dati grafičku interpretaciju Mohrove hipoteze za slučaj ravnog stanja napona. Pretpostaviti da je obvojnica definisana tangentom na krugove napona koji odgovaraju zatezanju i pritisku.

Rješenje:

Jednačina tangente na krugove napona na sl. P 6.3(a) je

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_L^+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_L^-} = 1.$$

Do sloma neće doći ako stanje napona leži unutar šestougaonika na sl. P 6.3(b).



Sl. P 6.3.

6.3. Dozvoljeni napon i koeficijent sigurnosti

U prethodnom poglavlju vidjeli smo da do sloma dolazi kada naponsko stanje postane kritično u smislu odabrane hipoteze o slomu, tj. kada je

$$\sigma_{\text{upor}} = \sigma_0, \quad (1)$$

gdje je σ_{upor} tzv. uporedni napon koji je jednak :

$$\sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 \quad (2)$$

$$\sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3) \quad (3)$$

$$\sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (4)$$

$$\sigma_{\text{upor}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (5)$$

respektivno, po I, II, III i IV hipotezi.

Prema tome, ako želimo da u konstrukciji ne dođe do sloma, opterećenje i dimenzije moraju biti takvi da je u kritičnoj tački konstrukcije

$$\sigma_{\text{upor}} \leq \sigma_0. \quad (6)$$

Međutim, u praksi se zahtijeva da uporedni napon bude znatno manji, tj. zahtijeva se da je

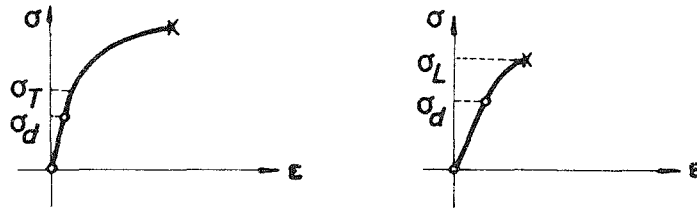
$$\sigma_{\text{upor}} \leq \sigma_d, \quad (7)$$

gdje je σ_d tzv. dozvoljeni napon koji se dobija kada se σ_0 podijeli sa tzv. koeficijentom sigurnosti n_0 (> 1), tj.

$$\sigma_d = \frac{\sigma_0}{n_0}. \quad (8)$$

Za žilave materijale je $\sigma_d = \sigma_T/n_T$, a za krte $\sigma_d = \sigma_L/n_L$ (sl. 6:5), gdje su n_T i n_L koeficijenti sigurnosti prema tečenju, odnosno lomu. Koeficijent sigurnosti koji

definiše dozvoljeni napon uvodi se zbog činjenice da se u konkretnim problemima u inženjerskoj praksi često ne može tačno predvidjeti i poznavati priroda i veličina opterećenja konstrukcije, niti se tačno poznaju mehaničke i druge osobine materijala sa kojim se radi, pa se, prema tome, ne može biti siguran ni u preciznost dobijenih rezultata o stvarnom naponskom stanju. Osim toga, često se konstrukcija modelira tako da se zanemaruju određeni efekti koji su inače prisutni u stvarnosti, pa se i ta tačnost nadoknađuje uvođenjem (i povećavanjem) koeficijenta sigurnosti.



Sl. 6:5.

Izbor koeficijenta sigurnosti je od izuzetne važnosti. Ne postoje neke određene preporuke o izboru ovog koeficijenta, pa izbor često počiva na iskustvu i procjeni projektanta. Ako je izabrani koeficijent sigurnosti suviše mali, tj. dozvoljeni napon suviše veliki, konstrukcija se može pokazati slabom u eksploataciji, a ako je koeficijent sigurnosti suviše veliki, konstrukcija može bez potrebe postati suviše teška i neekonomična. Veličina koeficijenta sigurnosti se obično kreće od 1–10, zavisno od tačnosti poznavanja i vrste materijala, te poznavanja opterećenja. Za krte materijale je koeficijent sigurnosti veći nego za žilave materijale.

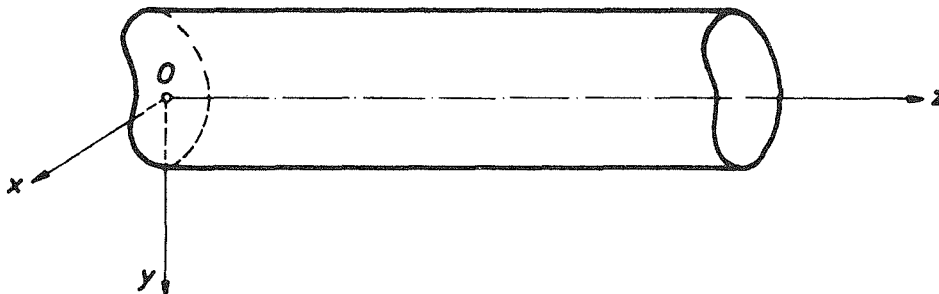
DIO II

TEORIJA GREDE

7. AKSIJALNO NAPREZANJE GREDE

7.1. Uvodne napomene o gredi

Greda (gredni nosač) ili štap je tijelo kome je jedna dimenzija znatno veća od preostale dvije. Greda je ograničena sa cilindričnom površinom (tzv. bočna površina grede) i sa dvije ravni koje su upravne na bočnu površinu grede (tzv. osnove ili bazisi grede) (sl. 7:1). Kao takva greda predstavlja jedan od osnovnih konstruktivnih elemenata u većini građevinskih i mašinskih konstrukcija. Ona može biti opterećena na razne načine, na primjer, na istezanje ili pritisak, torziju, savijanje ili kombinaciju ovih opterećenja. Naš je zadatak da za svaku od ovih vrsta opterećenja (naprezanja) odredimo izraze za napon, deformaciju i pomjeranja u gredi, i time sve pripremimo za njeno dimenzionisanje i provjeru izdržljivosti, fleksibilnosti i stabilnosti.



Sl. 7:1.

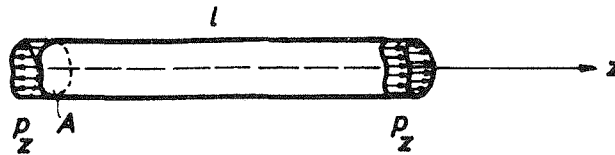
U analizi koju ćemo sprovesti posmatraćemo prave grede, čija je uzdužna osa prava linija paralelna izvodnici cilindričnog omotača grede. Pri tome ćemo pretpostavljati da je greda od homogenog i izotropnog materijala čija mehanička svojstva poznamo. Izuzev u posljednjem poglavlju, analiziraćemo problem elastičnog deformisanja, dok je posljednje poglavlje posvećeno plastičnom deformisanju grednog nosača.

U nizu primjera koji prate teorijsko izlaganje posmatraćemo kako gredne nosače, tako i nosače sastavljene iz više greda, tj. štapova (na primjer, ramove, rešetkaste nosače i sl.), i pokazati način njihovog rješavanja.

7.2. Izrazi za napon i deformaciju

Posmatrajmo gredu opterećenu na bazisima ravnomjernim opterećenjem u aksijalnom pravcu intenziteta p_z koje se može redukovati u težištima bazisa na aksijalnu silu $T_z = p_z A$, gdje je A površina poprečnog presjeka (bazisa) (sl. 7:2).

Ovako opterećena greda je, kažemo, u stanju aksijalnog naprezanja. Odredimo napone, deformaciju i pomjeranja ovako opterećene grede. Koristeći se semi-



Sl. 7:2.

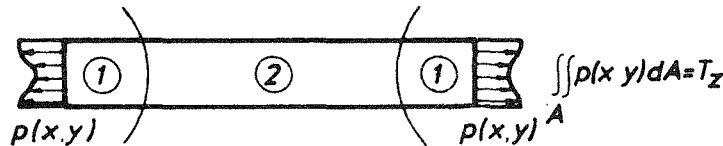
inverznim metodom teorije elastičnosti, pretpostavimo da je naponsko stanje u gredi dato sa:

$$\sigma_{zz} = \text{const.}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \quad (1)$$

Očigledno je da pretpostavke (1) zadovoljavaju i Cauchyve jednačine ravnoteže (4.1:1) i Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti (4.3:3). Takođe je očigledno da su granični uslovi (4.1:2) na bočnoj površini grede zadovoljeni, jer su sve komponente napona, izuzev σ_{zz} , jednake nuli. Granični uslovi na bazisima svode se na

$$\sigma_{zz} = p_z, \quad (2)$$

tj. napon σ_{zz} jednak je ravnomjernoj specifičnoj površinskoj sili p_z na bazisima. Ovo je tačno rješenje problema aksijalnog naprezanja grede kod koga je aksijalno opterećenje na bazisima raspoređeno na ravnomjieran način. Ako je, međutim, aksijalno opterećenje na krajevima raspoređeno na neki drugi način (neravnomjerno), ali se i dalje može svesti u težištu bazisa na aksijalnu silu $T_z (= p_z A)$, tada zbog Saint-Venantovog principa izvedeno rješenje je tačno rješenje dovoljno daleko od krajeva grede. U središnjem dijelu ② grede (sl. 7:3) stanje napona je: $\sigma_{zz} = \frac{T_z}{A}$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \dots = \sigma_{zx} = 0$, a u okolini krajeva grede, tj. u dijelovima ① grede, stanje napona je komplikovanije.



Sl. 7:3.

Odredimo sada deformacije koje se javljaju kod aksijalnog naprezanja. Iz Hookeovog zakona (4.3:2) direktno slijedi:

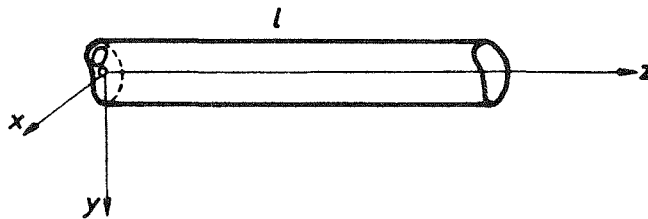
$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -\frac{\nu}{E} p_z, & \epsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E} p_z, & \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} p_z \\ \epsilon_{xy} &= 0, & \epsilon_{yz} &= 0, & \epsilon_{zx} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

gdje su x i y bilo koje dvije upravne ose kroz težište bazisa $z=0$ (sl. 7:4). Iz (3) je očigledno da je $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz}$.

Korespondentna pomjeranja dobijamo integracijom iz (3):

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{\nu}{E} p_z x \\ u_y &= -\frac{\nu}{E} p_z y \\ u_z &= \frac{1}{E} p_z \left(z - \frac{l}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Iz (4) je očigledno da sve tačke jednog poprečnog presjeka imaju ista pomjeranja u pravcu z ose, tj. ravni poprečni presjeci ostaju i nakon deformacije ravni i pomjeraju



Sl. 7:4

se translatorno u pravcu z ose. Očigledno je, takođe, da se zbog simetrije poprečni presjek $z=l/2$ ne pomjera u pravcu z ose, tj. $u_z(l/2)=0$. Tačke na z osi ($x=y=0$) pomjeraju se samo u pravcu z ose ($u_x=u_y=0$), dok tačke na osi paralelnoj z osi imaju i poprečna pomjeranja u_x i u_y , pri čemu očigledno prave paralelne z osi ostaju paralelne z osi i nakon deformacije, samo se približuju ili udaljuju od nje zavisno da li je u pitanju istežanje ili pritisak. Izduženje grede Δl jednako je

$$\Delta l = |u_z(0)| + |u_z(l)| = \frac{1}{E} p_z l. \quad (5)$$

Ako p_z izrazimo preko ukupne sile istežanja $F \equiv T_z$, izduženje (5) možemo izraziti i u obliku

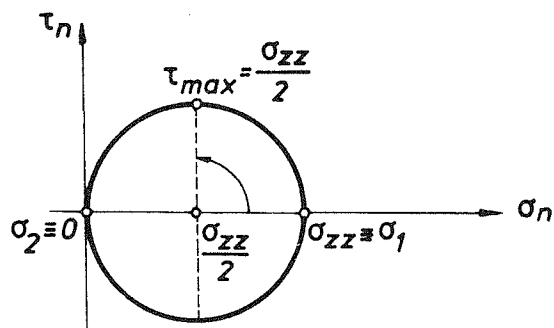
$$\Delta l = \frac{F l}{EA}. \quad (6)$$

Dakle, izduženje grede (štapa) je direktno proporcionalno sa silom F i dužinom grede l , a obrnuto proporcionalno sa EA . Veličina EA naziva se krutost na istežanje.

Iz (6) takođe vidimo da je

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \epsilon_{zz}, \quad (7)$$

tj. dilatacija ϵ_{zz} je zaista relativna promjena dužine štapa $\Delta l/l$.



Sl. 7:5.

S obzirom da je kod aksijalnog napreznja grede stanje napona isto u svim tačkama (komponente tenzora napona (1) su nezavisne od x , y i z koordinate), stanje napona je homogeno. U proizvoljnoj tački grede Mohrov krug napona je prikazan na sl. 7:5. Odatve je lako naći napone u kosoj ravni grede pod nekim uglom u odnosu na z osu (vidjeti primjer 7.1).

7.3. Deformacioni rad kod aksijalnog napreznja

Specifični deformacioni rad aksijalno opterećene grede dobićemo ako u opšti izraz za specifični deformacioni rad elastično deformisanog tijela (5.2:2) uvedemo izraze za napon i deformaciju iz prethodnog poglavlja. Dobijamo

$$\mathcal{A}^* = \frac{1}{2} \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}, \quad (1)$$

odnosno, izražavajući \mathcal{A}^* samo preko napona ili samo preko deformacije:

$$\mathcal{A}^*(\sigma) = \frac{1}{2E} \sigma_{zz}^2 = \frac{F^2}{2EA^2} \quad (2)$$

$$\mathcal{A}^*(\varepsilon) = \frac{1}{2} E \varepsilon_{zz}^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2. \quad (3)$$

Ukupan deformacioni rad u gredi je

$$\mathcal{A} = \int_V \mathcal{A}^* dV, \quad (4)$$

tako da, koristeći (2) i (3), dobijamo nakon integracije:

$$\mathcal{A}(F) = \frac{F^2 l}{2EA} \quad (5)$$

$$\mathcal{A}(\Delta l) = \frac{1}{2} EA \frac{(\Delta l)^2}{l}. \quad (6)$$

Iz (5) i (6), koristeći Castiglianove stavove (5.5.2:8) i (5.5.2:10), je očigledno:

$$\Delta l = \frac{\partial \mathcal{A}(F)}{\partial F} = \frac{Fl}{EA} \quad (7)$$

$$F = \frac{\partial \mathcal{A}(\Delta l)}{\partial (\Delta l)} = EA \frac{\Delta l}{l}. \quad (8)$$

7.4. Dimenzionisanje pri aksijalnom naprezanju

Da ne bi došlo do sloma u gredi izloženoj aksijalnom naprezanju, mora biti (po sve četiri hipoteze, poglavlje 6.2)

$$\sigma_{zz} \leq \sigma_d, \quad (1)$$

gdje je dozvoljeni napon

$$\sigma_d = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad (2)$$

za žilave materijale, a

$$\sigma_d = \frac{\sigma_L}{n_L} \quad (3)$$

za krte materijale. Veličina σ_T , odnosno σ_L se eksperimentalno određuje u testu istezanja, odnosno pritiska, a koeficijent sigurnosti zavisi od vrste materijala (za čelik je $n_T \approx 1,7$, a za sivi liv $n_L \approx 3-4$). Kako je

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{A}, \quad (4)$$

to za zadatu silu F površina poprečnog presjeka mora biti

$$A \geq \frac{F}{\sigma_d}, \quad (5)$$

a ako je poznata površina, onda je sila koju greda može izdržati da ne dođe do sloma

$$F \leq A \sigma_d. \quad (6)$$

Na mjestima koncentracije napona (vidjeti poglavlje 7.5) koja se javlja u okolini naglih promjena oblika, kao što su zarezi, rupe i sl., pojavljuju se znatno viši naponi nego što daje (4), pa se pri dimenzionisanju ovo uzima u obzir tako što se propisuje veći koeficijent sigurnosti. Ovo je naročito bitno kod krtih materijala, jer se prslina javlja baš na tim mjestima, što vodi lomu, dok se kod žilavih materijala javlja samo lokalna plastična deformacija u okolini mjesta koncentracije napona, što ne rezultira stvarnim lomom konstruktivnog elementa.

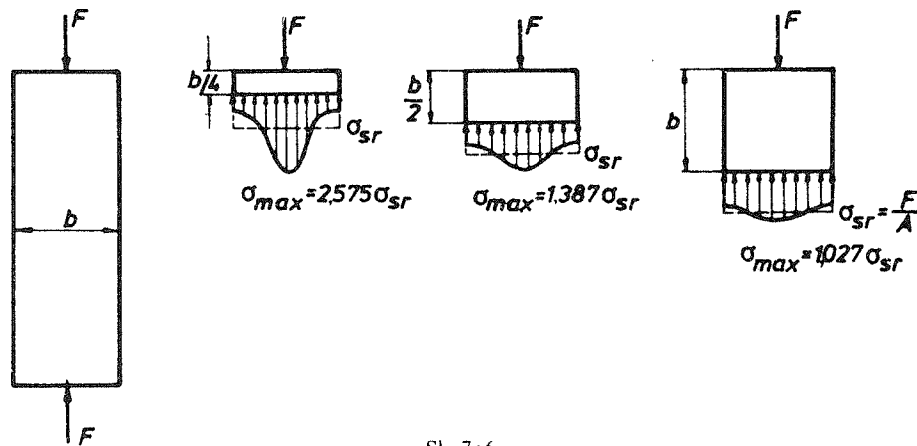
7.5. Dodatne napomene o aksijalnom naprezanju

Ako je greda opterećena aksijalno koncentrisanim silama na bazisima, tada se u tački dještva koncentrisane sile javlja beskonačno veliki napon. Ovo se zove koncentracija napona u tački dještva koncentrisane sile. Međutim, zbog Saint-Venantovog principa dalje od krajeva grede, na udaljenju reda veličine debljine grede (sl. 7:6), naponi postaju ravnomjerno raspoređeni po poprečnom presjeku, isto kao da je aksijalno naprezanje izazvano ravnomjerno raspoređenim silama na

bazisima. Tačno rješenje problema na sl 7: 6 je veoma teško naći. Fizička intuicija je dovoljna da se shvate rezultati skicirani o raspodjeli napona na sl. 7:6. U praksi se uvodi tzv. faktor koncentracije napona, koji zavisi od geometrije tijela, tako da je

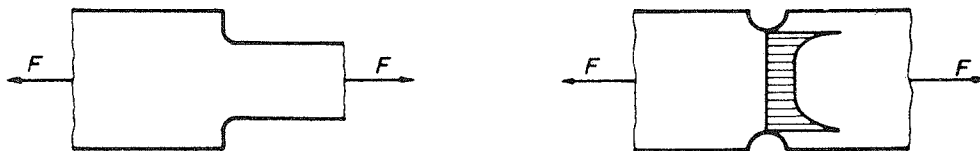
$$\sigma_{\max} = K \frac{F}{A}$$

Na primjer, na dubini $b/4$ je $K = 2,575$, pa je $\sigma_{\max} = 2,575 \frac{F}{A}$ (sl. 7:6).



Sl. 7:6.

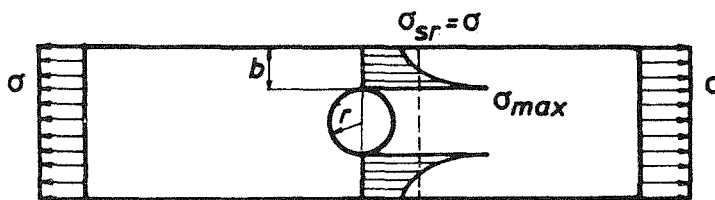
Nagle promjene presjeka izazivaju velike nepravilnosti u raspodjeli napona na tim mjestima. Nepravilnost raspodjele napona znači da je napon u nekim tačkama daleko veći od prosječnog napona, što opet predstavlja koncentraciju napona (sl. 7:7). Ovo zahtijeva posebnu analizu i najčešće predstavlja vrlo složen problem. No,



Sl. 7:7.

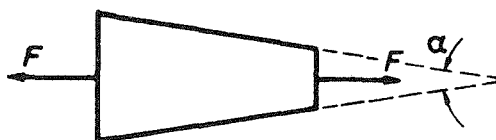
on je izuzetno važan jer na mjestu koncentracije napona počinje plastična deformacija i pojava pukotine, što može dovesti i do loma konstruktivnog elementa. Koncentraciju napona takođe imamo u slučaju da u gredi postoji otvor (sl. 7:8).

Faktor koncentracije napona u ovom slučaju je $K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{sr}} = K \left(\frac{r}{b} \right)$, i dat je u tehničkim priručnicima.



Sl. 7:8.

Pri proučavanju aksijalnog naprezanja pretpostavljali smo da je gređa prizmatičnog oblika. Kada je takva gređa napregnuta aksijalno, naponi su jednoliko podijeljeni po površini poprečnog presjeka. Jednolika podjela napona može se aproksimativno pretpostaviti i u slučaju gređe promjenljivog poprečnog presjeka ako se presjek mijenja postepeno (sl. 7:9). Na primjer, ako je ugao $\alpha = 20^\circ$, greška u sračunavanju normalnog napona po formuli $\sigma = \frac{F}{A}$ je samo tri procenta.



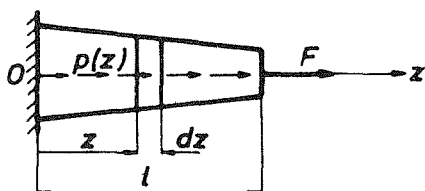
Sl. 7:9.

Pri sračunavanju izduženja gređe promjenljivog poprečnog presjeka $A = A(z)$ može se približno koristiti formula

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F dz}{EA(z)} = \frac{F}{E} \int_0^l \frac{dz}{A(z)}, \quad (1)$$

što slijedi integracijom iz izraza za izduženje elementarno malog dijela gređe dz . Ako se takođe mijenja i aksijalna sila uzduž ose gređe (na primjer, u slučaju kontinualnog aksijalnog opterećenja kao na sl. 7:10), tada je približno

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F(z) dz}{EA(z)}. \quad (2)$$



$$F(z) = F + \int_0^{l-z} p(z) dz$$

Sl. 7:10.

Deformacioni rad ovakvih gređa je

$$\mathcal{A} = \int_0^l \frac{F^2(z) dz}{2EA(z)}, \quad (3)$$

pa Castiglianov stav daje

$$\Delta l = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F} = \int_0^l \frac{F(z) dz}{EA(z)}. \quad (4)$$

U primjerima koji slijede primijenit ćemo teoriju aksijalno opterećene grede (štapa) na problemima naprezanja konstrukcija (nosača) sastavljenih od više aksijalno opterećenih štapova. Posmatraćemo kako statički određene, tako i statički neodređene nosače. Dok se kod statički određenih nosača sile u svim štapovima mogu odrediti samo iz uslova ravnoteže, dotle se kod statički neodređenih nosača moraju koristiti i uslovi kompatibilnosti deformacija, koji obezbjeđuju da prilikom deformacije ne dođe do raskidanja veza između pojedinih dijelova nosača.

Primjeri

Primjer 7.1.

Štap (greda) AB dužine $l=25$ cm i površine poprečnog presjeka $A=10$ cm² opterećen je silom $F=250$ kN, kao na sl. P 7.1 (a). Odrediti:

- napon i deformaciju u štapu i ukupno izduženje štapa,
- izduženje dijela vlakna između tačaka C i D koje su prvobitno bile na rastojanju od 2,5 cm,
- promjenu zapremine štapa,
- promjenu površine poprečnog presjeka štapa,
- napone u ravni nagnutoj pod uglom od 30° u odnosu na uzdužnu z osu,
- maksimalni smičući napon i ravni u kojima djeluje,
- Mohrov krug napona.

Dato je: $E=20$ MN/cm², $\nu=0,3$.

Rješenje:

- a) Koristeći izvedene izraze u poglavlju 7.2, imamo:

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{A} = \frac{250}{10} = 25 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} = \frac{25}{20 \cdot 10^3} = 1,25 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{zz} = -0,375 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{250 \cdot 25}{20 \cdot 10^3 \cdot 10} = 0,03125 \text{ cm}, \quad \text{ili} \quad \Delta l = \varepsilon_{zz} l = 1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 25 = 0,03125 \text{ cm}$$

- b) $\Delta(\overline{CD}) = \varepsilon_{zz} \overline{CD} = 1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 = 0,003125 \text{ cm}.$

- c) Promjenu zapremine štapa dobićemo iz izraza za kubnu dilataciju:

$$e = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\Delta V = e V = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) A l = (-0,375 - 0,375 + 1,25) \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 25 = 0,125 \text{ cm}^3.$$

- d) Sa sl. P 7.1 (b) promjena površine elementarnog dijela poprečnog presjeka štapa je

$$\Delta(dA) = (1 + \varepsilon_{xx}) dx (1 + \varepsilon_{yy}) dy - dx dy = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) dA,$$

a ukupna promjena površine je

$$\begin{aligned} \Delta A &= \int_A (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) dA = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) A = (-0,375 - 0,375) \cdot 10^{-3} \cdot 10 = \\ &= -7,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Znak „-“ znači da se površina poprečnog presjeka štapa smanjuje pri istezanju štapa.

e) S obzirom da je od svih komponenti tenzora napona jedino $\sigma_{zz} \neq 0$, stanje napona pri aksijalnom naprezanju štapa je linearno. Prema tome, koristeći izraze iz odjeljka 1.12.3, dobijamo da su naponi u kosoj ravni (sl. P 7.1(c)) jednaki:

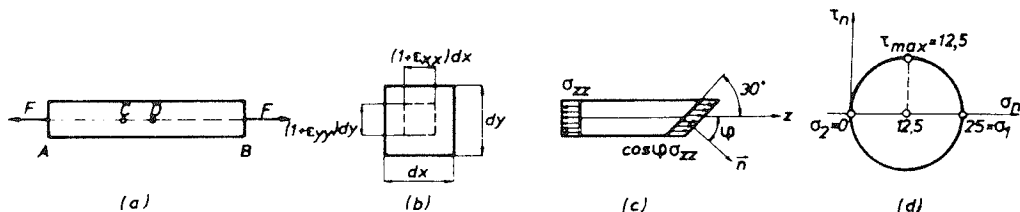
$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{zz} \cos^2 \varphi = 25 \cdot \cos^2 60^\circ = 6,25 \text{ kN/cm}^2 \\ \tau_n &= \frac{1}{2} \sigma_{zz} \sin 2\varphi = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \sin 120^\circ = 10,83 \text{ kN/cm}^2. \end{aligned}$$

f) Maksimalni smičući napon je

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_{zz} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5 \text{ kN/cm}^2.$$

i djeluje u ravnima pod uglom od 45° u odnosu na uzdužnu z osu.

g) Mohrov krug napona prikazan je na sl. P 7.1(d).



Sl. P 7.1.

Primjer 7.2.

Na sl. P 7.2(a) je stub čiji je gornji dio od čelika, a donji od livenog gvožđa. Stub je opterećen sa dvije aksijalne sile pritiska F_1 i F_2 . Odrediti napone u stubu kao i vertikalno pomjeranje napadnih tačaka sila. Dato je: $l_1 = 25 \text{ cm}$, $l_2 = 30 \text{ cm}$, $A_1 = 25 \text{ cm}^2$, $A_2 = 64 \text{ cm}^2$, $E_1 = 20 \text{ MN/cm}^2$, $E_2 = 12 \text{ MN/cm}^2$, $F_1 = 200 \text{ kN}$, $F_2 = 300 \text{ kN}$.

Rješenje:

Ako zamislimo da smo razdvojili stub na dva dijela ① i ②, kao na sl. P 7.2(b), očigledno je da su naponi u ovim dijelovima jednaki:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{200}{25} = 8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{F_1 + F_2}{A_2} = \frac{200 + 300}{64} = 7,8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

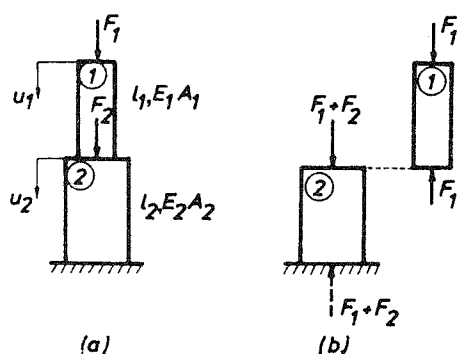
Skraćenja dijelova stuba su:

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{200 \cdot 25}{20 \cdot 10^3 \cdot 25} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,1 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{(F_1 + F_2) l_2}{E_2 A_2} = \frac{500 \cdot 30}{12 \cdot 10^3 \cdot 64} = 19,53 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,195 \text{ mm}.$$

Pomjeranja napadnih tačaka sila su:

$$u_2 = \Delta l_2 = 0,195 \text{ mm}, \quad u_1 = \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,295 \text{ mm}.$$



Sl. P 7.2.

Pomjeranja napadnih tačaka sila možemo dobiti i koristeći Castiglianov stav (7.3:7). Zaista, ukupan deformacioni rad u stubu je

$$\mathcal{A} = \frac{F_1^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{(F_1 + F_2)^2 l_2}{2E_2 A_2},$$

pa je:

$$u_1 = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F_1} = \frac{F_1 l_1}{E_1 A_1} + \frac{(F_1 + F_2) l_2}{E_2 A_2} = 0,295 \text{ mm}$$

$$u_2 = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F_2} = \frac{(F_1 + F_2) l_2}{E_2 A_2} = 0,195 \text{ mm}.$$

Primjer 7.3.

Dimenzionisati štapove kružnog poprečnog presjeka konstrukcije na sl. P 7.3(a) ako je dozvoljeni napon $\sigma_d = 1 \text{ kN/cm}^2$. Odrediti zatim pomjeranje tačke C. Sila $F = 200 \text{ kN}$, a štapovi konstrukcije su od drveta ($E = 1 \text{ MN/cm}^2$).

Rješenje:

Iz uslova ravnoteže čvora C (sl. P 7.3(b)) nalazimo sile u štapovima: $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} F$ i

$S_2 = \frac{1}{2} F$. Korespondentni naponi moraju biti manji od dozvoljenog napona, tj.:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A_1} \leq \sigma_d, \quad A_1 \geq \frac{S_1}{\sigma_d} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} F}{\sigma_d} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} 200}{1} = 173 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{A_2} \leq \sigma_d, \quad A_2 \geq \frac{S_2}{\sigma_d} = \frac{\frac{1}{2} F}{\sigma_d} = \frac{\frac{1}{2} 200}{1} = 100 \text{ cm}^2,$$

odakle nalazimo da su prečnici poprečnih presjeka štapova: $d_1 \geq 14,85$ cm i $d_2 \geq 11,28$ cm.

Komponentalna pomjeranja tačke C dobijamo pomoću sl. P 7.3(c):

$$u_x = \Delta l_1 \cos 60^\circ - \Delta l_2 \cos 30^\circ = \frac{S_1 l_1}{EA_1} \frac{1}{2} - \frac{S_2 l_2}{EA_2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \dots = 0$$

$$u_y = \Delta l_1 \cos 30^\circ + \Delta l_2 \cos 60^\circ = \frac{S_1 l_1}{EA_1} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{S_2 l_2}{EA_2} \frac{1}{2} = \dots = 4 \text{ mm.}$$

Komponentalna pomjeranja tačke C možemo dobiti i koristeći Castiglianov stav. Zamislimo da u tački C djeluje i horizontalna sila H (sl. P 7.3 (d)). Tada je:

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} F + \frac{1}{2} H, \quad S_2 = \frac{1}{2} F - \frac{\sqrt{3}}{2} H, \quad \text{a deformacioni rad u konstrukciji je}$$

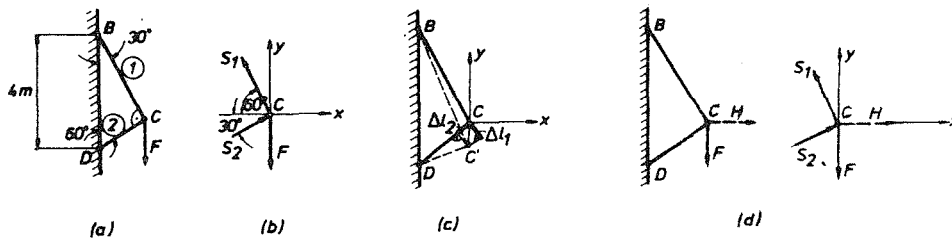
$$\mathcal{A} = \frac{S_1^2 l_1}{2EA_1} + \frac{S_2^2 l_2}{2EA_2}.$$

Horizontalno pomjeranje tačke C onda dobijamo iz

$$\begin{aligned} u_x &= \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial H} \right)_{H=0} = \left(\frac{S_1 l_1}{EA_1} \frac{\partial S_1}{\partial H} \right)_{H=0} + \left(\frac{S_2 l_2}{EA_2} \frac{\partial S_2}{\partial H} \right)_{H=0} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} F \frac{l_1}{EA_1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F l_2 \frac{1}{EA_2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

dok je vertikalno pomjeranje

$$\begin{aligned} u_y &= \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F} \right)_{H=0} = \left(\frac{S_1 l_1}{EA_1} \frac{\partial S_1}{\partial F} \right)_{H=0} + \left(\frac{S_2 l_2}{EA_2} \frac{\partial S_2}{\partial F} \right)_{H=0} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} F l_1 \frac{1}{EA_1} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} F l_2 \frac{1}{EA_2} \frac{1}{2} = 4 \text{ mm.} \end{aligned}$$



Sl. P 7.3.

Primjer 7.4.

Štap od bakra površine poprečnog presjeka $A = 20 \text{ cm}^2$ opterećen je silom $F = 100 \text{ kN}$, kao na sl. P 7.4(a). Oba kraja štapa su ukliještena. Odrediti napone u štapu.

Rješenje:

Problem je jedanput statički neodređen, jer se dvije nepoznate reakcije, R_B i R_C , ne mogu odrediti iz jedne jednačine (uslova) ravnoteže

$$R_B + R_C - F = 0. \quad (a)$$

Da bismo našli vrijednosti reakcija, potrebna je još jedna jednačina koju ćemo dobiti iz uslova kompatibilnosti deformacija: koliko se izdužio dio ① štapa, toliko će se sabiti dio ② štapa (sl. P 7.4(b)), tj.

$$\Delta l_1 = \Delta l_2. \quad (b)$$

Kako je:

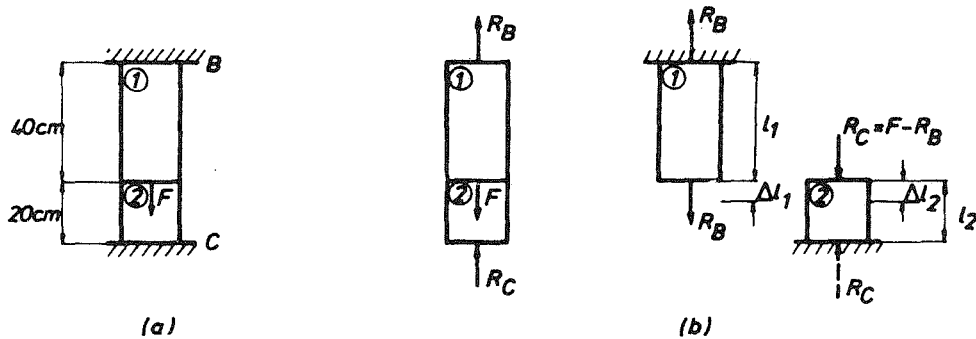
$$\Delta l_1 = \frac{R_B l_1}{EA}$$

$$\Delta l_2 = \frac{R_C l_2}{EA} = \frac{(F - R_B) l_2}{EA},$$

dobijamo iz (b) $R_B = \frac{1}{3} F$, a onda iz (a) $R_C = \frac{2}{3} F$. Naponi su:

$$\sigma_1 = \frac{R_B}{A} = \frac{\frac{1}{3} F}{A} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 100}{20} = \frac{5 \text{ kN}}{3 \text{ cm}^2} \quad (\text{napon istezanja, } +)$$

$$\sigma_2 = -\frac{R_C}{A} = -\frac{\frac{2}{3} F}{A} = -\frac{\frac{2}{3} \cdot 100}{20} = -\frac{10 \text{ kN}}{3 \text{ cm}^2} \quad (\text{napon pritiska, } -)$$



Sl. P 7.4.

Primjer 7.5.

Odrediti napone u konstrukciji koji se javljaju nakon montaže konstrukcije na sl. P 7.5(c). Štap ② je izrađen za $\Delta=0,5$ mm kraći od projektovane dužine. Greda BC je kruta, a štapovi ① i ② su modula elastičnosti $E=20$ MN/cm² i iste površine poprečnog presjeka. Dužina $a=1$ m.

Rješenje:

Nakon montaže tačka C pređe u položaj C', a tačka D u D'. Sa sl. P 7.5(b) je očigledno:

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} \Delta l_1 \quad \delta_2 = \frac{2}{3} \delta_1 = \frac{2}{3} \sqrt{2} \Delta l_1$$

$$\Delta' = \delta_2 \sin 45^\circ = \frac{2}{3} \Delta l_1, \quad \Delta'' = \Delta l_2, \quad \Delta = \Delta' + \Delta'',$$

tako da je

$$\frac{2 S_1 l_1}{3 EA} + \frac{S_2 l_2}{EA} = \Delta.$$

Ovo zajedno sa momentnim uslovom ravnoteže (sl. P 7.5(c))

$$S_1 \cdot 3a - S_2 \cdot 2a = 0$$

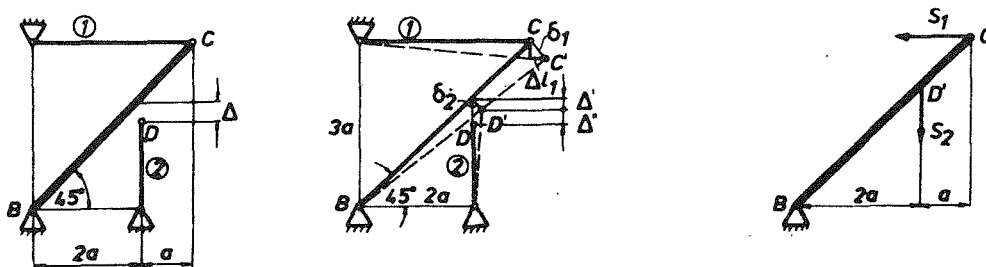
daje dvije jednačine sa dvije nepoznate S_1 i S_2 , čijim rješenjem dobijamo

$$S_1 = \frac{2}{10} \frac{\Delta}{a} EA, \quad S_2 = \frac{3}{10} \frac{\Delta}{a} EA.$$

Korespondentni naponi su:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{2}{10} \frac{\Delta}{a} E = \frac{2}{10} \frac{0,5 \cdot 10^{-1}}{100} \cdot 20 \cdot 10^3 = 2 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{A} = \frac{3}{10} \frac{\Delta}{a} E = \frac{3}{10} \frac{0,5 \cdot 10^{-1}}{100} \cdot 20 \cdot 10^3 = 3 \text{ kN/cm}^2.$$



Sl. P 7.5.

Primjer 7.6.

Štap ② konstrukcije na sl. P 7.6(a) zagrije se za $\Delta T = 50^\circ\text{C}$. Odrediti napone u konstrukciji ako su oba štapa od čelika ($E = 20 \text{ MN/cm}^2$, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$). Odrediti takođe pomjeranje tačke B . Oba štapa su iste površine poprečnog presjeka.

Rješenje:

Nakon zagrijavanja tačka B prelazi u položaj B' . Sa sl. P 7.6(a) je očigledno

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \cos 30^\circ, \quad (a)$$

gdje su izduženja Δl_1 i Δl_2 data sa:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EA}, \quad \Delta l_2 = \alpha l_2 \Delta T - \frac{S_2 l_2}{EA}. \quad (b)$$

Zamjenom (b) u (a) dobijamo

$$\frac{3}{4} S_1 + S_2 = EA \alpha \Delta T. \quad (c)$$

Drugu jednačinu za određivanje nepoznatih sila u štapovima dobićemo iz uslova ravnoteže (sl. P 7.6(b))

$$S_2 \cos 30^\circ - S_1 = 0. \quad (d)$$

Iz (c) i (d) rješavanjem dobijamo:

$$S_1 = 0,525 EA \alpha \Delta T, \quad S_2 = 0,606 EA \alpha \Delta T,$$

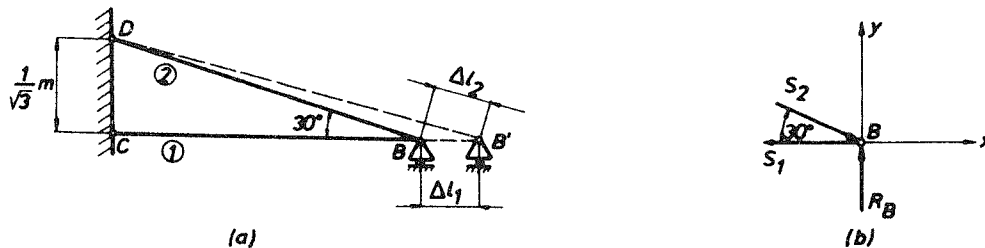
pa su naponi u štapovima:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = 0,525 E \alpha \Delta T = 0,525 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = 6,56 \text{ kN/cm}^2 \quad (+)$$

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{A} = 0,606 E \alpha \Delta T = 0,606 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = 7,58 \text{ kN/cm}^2 \quad (-)$$

Pomjeranje tačke B jednako je izduženju štapa ①. Dakle,

$$u_B = \Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EA} = 0,525 \alpha \Delta T l_1 = \dots = 0,33 \text{ mm.}$$



Sl. P 7.6.

Primjer 7.7.

Odrediti napon u gredi promjenljivog kružnog poprečnog presjeka (sl. P 7.7(a)) koja je obješena u polju zemljine teže i opterećena aksijalnom silom F . Gustina grede je ρ . Odrediti takođe pomjeranje donjeg kraja grede. Dato je: E , l , R_1 , R_2 .

Rješenje:

Zamislamo da smo presjekli gredu na proizvoljnom mjestu z (sl. P 7.7(b)). Uticaj jednog dijela na drugi zamijenimo normalnim naponom $\sigma(z)$ koji pretpostavljamo da je ravnomjerno raspoređen po poprečnom presjeku. Iz uslova ravnoteže posmatranog dijela grede slijedi

$$\sigma(z) A(z) - \rho g V(z) - F = 0, \quad (a)$$

gdje je $A(z)$ površina poprečnog presjeka z , a $V(z)$ zapremina dijela grede ispod nivoa z . Ako sa $R(z)$ označimo poluprečnik kružnog poprečnog presjeka na mjestu z , tada je:

$$R(z) = \frac{l-z}{l} R_1 + \frac{z}{l} R_2$$

$$A(z) = R^2(z) \pi \quad (b)$$

$$V(z) = \frac{\pi}{3} (l-z) [R^2(z) + R(z) R_2 + R_2^2].$$

Napon dobijamo iz (a)

$$\sigma(z) = \frac{F}{A(z)} + \frac{\rho g V(z)}{A(z)}, \quad (c)$$

gdje su $A(z)$ i $V(z)$ definisani u (b).

Pomjeranje donjeg kraja grede možemo dobiti iz Castiglianovog stava

$$w(l) = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F},$$

gdje je

$$\mathcal{A} = \int_0^l \frac{F^2(z) dz}{2EA(z)}$$

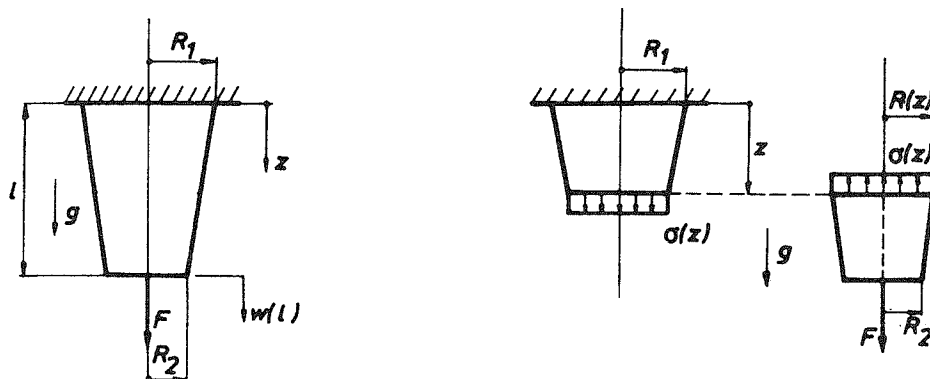
deformacioni rad u gredi, a $F(z) = F + \rho g V(z)$ ukupna sila u poprečnom presjeku z . Dakle,

$$w(l) = \int_0^l \frac{F(z) \frac{\partial F(z)}{\partial F}}{EA(z)} dz = \int_0^l \frac{F(z)}{EA(z)} dz = \int_0^l \left[\frac{F}{EA(z)} + \frac{\rho g V(z)}{EA(z)} \right] dz. \quad (d)$$

U specijalnom slučaju, kada je $R_1 = R_2 = R$, izrazi (c) i (d) postaju:

$$\sigma(z) = \frac{F}{R^2 \pi} + \rho g(l-z)$$

$$w(l) = \frac{Fl}{EA} + \frac{\rho g l^2}{2E}.$$



Sl. P 7.7.

Primjer 7.8.

Naći pomjeranje čvora I rešetke na sl. P 7.8(a). Svi štapovi rešetke su iste krutosti na istezanje $EA = 50 \text{ MN}$. Odrediti takođe vertikalno pomjeranje čvora V. Dato je: $a = 1 \text{ m}$, $F = 100 \text{ kN}$.

Rješenje:

Pomjeranja tačaka rešetke najlakše je odrediti koristeći Castiglianov stav $f = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F}$, gdje je \mathcal{A} ukupan deformacioni rad u rešetki koji je jednak zbiru deformacionih radova u svakom od štapova, tj.

$$\mathcal{A} = \sum_i \frac{S_i^2 L_i}{2E_i A_i}. \quad (\text{a})$$

Rešetka na sl. P 7.8(a) je statički određena, pa sile u štapovima možemo odrediti koristeći samo jednačine statike, tj. uslove ravnoteže čvorova rešetke. Dobijamo:

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} F, \quad S_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} F, \quad S_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}} F, \quad S_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} F, \quad S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} F, \quad S_6 = -\sqrt{3} F, \quad (\text{b})$$

$$S_7 = -\frac{2}{\sqrt{3}} F, \quad S_8 = \frac{4}{\sqrt{3}} F, \quad S_9 = \frac{2}{\sqrt{3}} F, \quad S_{10} = -\left(\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) F, \quad S_{11} = -\frac{2}{\sqrt{3}} F,$$

$$S_{12} = 2\sqrt{3} F.$$

Vertikalno pomjeranje čvora I dobijamo iz

$$v_1 = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F} = \sum_{i=1}^{12} \frac{S_i}{EA} \frac{\partial S_i}{\partial F} L_i, \quad (c)$$

što nakon zamjene (b) daje

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{aF}{EA} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 3 + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \frac{4}{3} + 8,32 + \frac{4}{3} + 6 \right) = \\ &= 32,32 \frac{aF}{EA} = 6,46 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Treba primijetiti da u izrazu (c) veličine $\frac{\partial S_i}{\partial F}$ u stvari predstavljaju sile u štapovima rešetke od jedinične sile $F=1$. Zaista, ako na rešetku djeluju, recimo, sile F_1, F_2, \dots, F_n , tada se, zbog linearnosti problema, sila u proizvoljnom štapu ① rešetke može izraziti u obliku

$$S_i = a_{i1}F_1 + a_{i2}F_2 + \dots + a_{ij}F_j + \dots + a_{in}F_n, \quad (d)$$

gdje su $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ konstante. Iz (d) je očigledno

$$\frac{\partial S_i}{\partial F_j} = a_{ij} \equiv \overline{S}_i, \quad (e)$$

a ovo je sila u štapu ① usljed djelovanja samo jedinične sile $F_j=1$. Prema tome, možemo reći da se pomjeranje proizvoljne tačke rešetke može dobiti iz izraza

$$J = \sum_i \frac{S_i \overline{S}_i}{E_i A_i} L_i, \quad (f)$$

gdje su \overline{S}_i sile u štapovima rešetke od jedinične sile na mjestu gdje se traži pomjeranje, a u pravcu pomjeranja. Izraz (f) koristimo za rješavanje preostalog dijela zadatka.

Određimo prvo horizontalno pomjeranje čvora I

$$u_1 = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^{12} S_i \overline{S}_i L_i. \quad (g)$$

Sile S_i od sile F su date sa (b). Sile \overline{S}_i su sile u štapovima rešetke od jedinične sile u čvoru I u pravcu horizontalnog pomjeranja (sl. P 7.8(b)). Posmatranjem ravnoteže svakog čvora ove rešetke nalazimo:

$$\begin{aligned} \overline{S}_1 &= 0, & \overline{S}_2 &= 1, & \overline{S}_3 &= 0, & \overline{S}_4 &= 0, & \overline{S}_5 &= 0, & \overline{S}_6 &= 1, \\ \overline{S}_7 &= 0, & \overline{S}_8 &= 0, & \overline{S}_9 &= 0, & \overline{S}_{10} &= 1, & \overline{S}_{11} &= 0, & \overline{S}_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (h)$$

Zamjenom (b) i (h) u (g) sada dobijamo

$$u_1 = \frac{aF}{EA} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot 1 + (-\sqrt{3}) \cdot 1 - \left(\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot 1 \right] = -5,196 \frac{aF}{EA} = -1,00 \text{ cm}.$$

Dobijeni znak „-“ znači da je horizontalno pomjeranje čvora I u suprotnom smjeru od pretpostavljenog smjera jedinične sile na sl. P 7.8(b).

Vertikalno pomjeranje čvora V dobićemo iz izraza

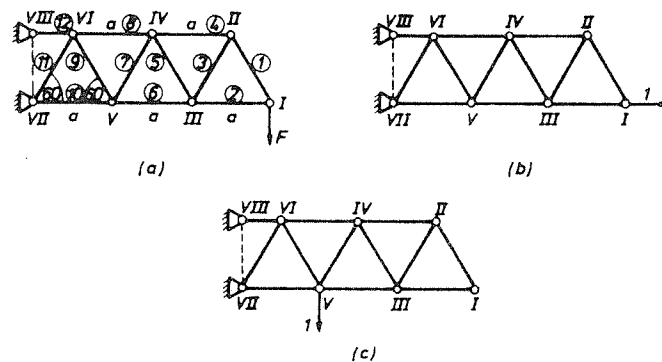
$$v_V = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^{12} S_i \bar{S}_i L_i, \quad (i)$$

gdje su \bar{S}_i sile u štapovima rešetke od jedinične sile u čvoru V u pravcu vertikalnog pomjeranja (sl. P 7.8(c)). Postavljanjem jednačina ravnoteže za svaki čvor ove rešetke, nalazimo:

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = 0 \\ S_9 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad S_{10} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad S_{11} = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad S_{12} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (j)$$

Zamjenom (b) i (j) u (i) dobijamo

$$\begin{aligned} v_V &= \frac{aF}{EA} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) + 2\sqrt{3} \frac{2}{\sqrt{3}} \right] = \\ &= \frac{25 aF}{3 EA} = 1,667 \text{ cm}. \end{aligned}$$



Sl. P 7.8.

Primjer 7.9.

Odrediti sile u štapovima rešetkastog nosača na sl. P 7.9(a). Svi štapovi su iste krutosti na istezanje $EA = 50 \text{ MN}$. Odrediti takođe horizontalno pomjeranje čvora III i vertikalno pomjeranje čvora II rešetke. Dato je: $a = 1 \text{ m}$, $F = 100 \text{ kN}$.

Rješenje:

Rešetkasti nosač na sl. P 7.9(a) je jedanput unutrašnje statički neodređen, jer je broj štapova $N = 6$ za jedan veći od raspoloživog broja jednačina ravnoteže $2n - 3 = 5$, gdje je $n = 4$ broj čvorova rešetke. Da bismo riješili problem, zamislimo da smo uklonili iz rešetke jedan od štapova, recimo štap ⑥, i njegov uticaj na rešetku

zamijenili silama S_6 , kao što je prikazano na sl. P 7.9(b). Silu S_6 odredićemo iz uslova da je izduženje štapa ⑥ jednako razmicanju čvorova I i III rešetke na sl. P 7.9(b). Koristeći Castiglianov stav ovo znači da je

$$\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial S_6} = -\frac{\partial \mathcal{A}''}{\partial S_6}, \quad (a)$$

gdje je $\mathcal{A}' = \frac{S_6^2 L_6}{2EA}$ deformacioni rad u štapu ⑥, a $\mathcal{A}'' = \sum_{i=1}^5 \frac{S_i^2 L_i}{2EA}$ deformacioni rad u rešetki na sl. P 7.9(b). Znak „-“ na desnoj strani relacije (a) figuriše zbog toga što su sile S_6 suprotnog smjera od razmicanja čvorova I i III. Iz (a) je sada očigledno da mora biti

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial S_6} = 0, \quad (b)$$

gdje je $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}''$ ukupan deformacioni rad u statički neodređenoj rešetki na sl. P 7.9(a), tj.

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^6 \frac{S_i^2 L_i}{2EA}. \quad (c)$$

Postavljajući dalje uslove ravnoteže za svaki čvor rešetke na sl. P 7.9(b) nalazimo sile $S_1 - S_5$ izražene preko F i S_6 :

$$\begin{aligned} S_1 &= F - \frac{\sqrt{2}}{2} S_6, & S_2 &= F - \frac{\sqrt{2}}{2} S_6, & S_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} S_6, \\ S_4 &= F - \frac{\sqrt{2}}{2} S_6, & S_5 &= -\sqrt{2} F + S_6. \end{aligned} \quad (d)$$

Zamjenom (d) u (b) sada imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial S_6} &= \sum_{i=1}^6 \frac{S_i \frac{\partial S_i}{\partial S_6} L_i}{EA} = \\ &= \frac{a}{EA} \left[\left(F - \frac{\sqrt{2}}{2} S_6 \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(F - \frac{\sqrt{2}}{2} S_6 \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(F - \frac{\sqrt{2}}{2} S_6 \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + (-\sqrt{2} F + S_6) \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + S_6 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \right] = 0, \end{aligned}$$

odakle je

$$S_6 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} F \cong 0,85F. \quad (e)$$

Zamjenom vrijednosti (e) u (d) nalazimo vrijednosti sila $S_1 - S_5$:

$$S_1 = 0,4F, \quad S_2 = 0,4F, \quad S_3 = -0,6F, \quad S_4 = 0,4F, \quad S_5 = -0,56F. \quad (f)$$

Horizontalno pomjerenje čvora III je sada lako naći iz:

$$\begin{aligned}
 u_{III} &= \frac{\partial \Delta}{\partial F} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^6 S_i \frac{\partial S_i}{\partial F} L_i = \\
 &= \frac{aF}{EA} (0,4^2 \cdot 1 + 0,4^2 \cdot 1 + 0,6^2 \cdot 1 + 0,4^2 \cdot 1 + 0,56^2 \cdot \sqrt{2} + 0,85^2 \cdot \sqrt{2}) = \\
 &= 2,3 \frac{aF}{EA} = 0,46 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

Vertikalno pomjerenje čvora II dobićemo iz izraza

$$v_{II} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^6 S_i \bar{S}_i L_i, \quad (g)$$

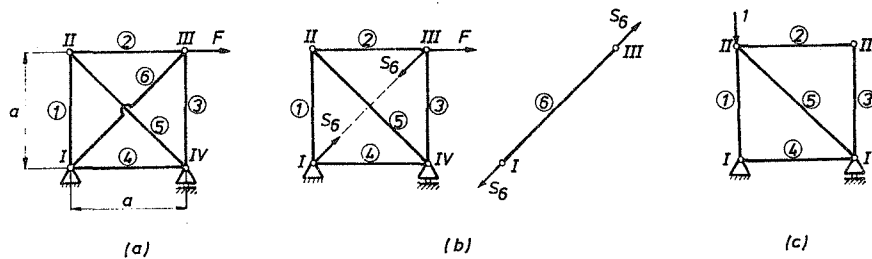
gdje su S_i sile u štapovima rešetke, date sa (f), a \bar{S}_i sile u štapovima rešetke usljed dještva samo jedinične vertikalne sile u čvoru II. Može se pokazati da izraz (g) daje istu vrijednost za pomjerenje bez obzira da li se sile S_i sračunale za statički neodređenu rešetku, sa štapom ⑥, ili za statički određenu rešetku, bez štapa ⑥. Lakše je, naravno, naći S_i za statički određenu rešetku (sl. P 7.9(c)), odakle dobijamo:

$$\bar{S}_1 = -1, \quad \bar{S}_2 = \bar{S}_3 = \bar{S}_4 = \bar{S}_5 = 0. \quad (h)$$

Zamjenom (f) i (h) u (g), sada slijedi

$$v_{II} = \frac{aF}{EA} [0,4 \cdot (-1)] = -0,4 \frac{aF}{EA} = -0,08 \text{ cm.}$$

Znak „-“ znači da se čvor II pomjera naviše, tj. suprotno pretpostavljenom smjeru jedinične sile na sl. P 7.9(c).



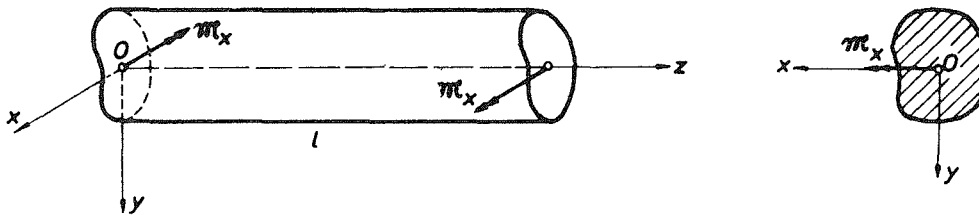
Sl. P 7.9.

8. ČISTO SAVIJANJE GREDE

8.1. Čisto pravo savijanje grede

8.1.1. Izrazi za napon i deformaciju

Posmatrajmo gredu koja je opterećena na krajevima sa dva jednaka a suprotna sprega savijanja koji leže u jednoj od glavnih ravni grede. Dakle, neka je O težište poprečnog presjeka grede, osa z uzdužna osa grede, a x i y glavne centralne ose inercije poprečnog presjeka (vidi Dodatak A) i neka spregovi \mathfrak{M}_x djeluju, na primjer, u glavnoj ravni yz (sl. 8:1). Ovako opterećena greda je, kažemo, u stanju



Sl. 8:1.

čistog pravog savijanja oko ose x , tj. u glavnoj ravni inercije yz . Nađimo napone, deformaciju i pomjeranja ovako opterećene grede. Saglasno semi-inverznom metodu teorije elastičnosti pretpostavimo da je:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= c y, & c &= \text{const.} \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Očigledno je da pretpostavke (1) zadovoljavaju i Cauchyve jednačine ravnoteže i Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti. Takođe je očigledno da su granični uslovi na slobodnoj bočnoj površini grede zadovoljeni. Da vidimo još granične uslove na bazisima grede. Rezultujuća sila na bazisima (i u svakom poprečnom presjeku grede) mora biti jednaka nuli, a rezultujući moment mora biti jednak momentu \mathfrak{M}_x . Dakle:

$$T_z = \int_A \sigma_{zz} dA = 0 \quad (2)$$

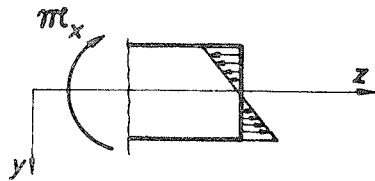
$$M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA = \mathfrak{M}_x \quad (3)$$

$$M_y = \int_A x \sigma_{zz} dA = 0. \quad (4)$$

Uslov (2) je zadovoljen jer je $\int y dA = 0$ s obzirom da su x i y težišne ose. Uslov (4) je zadovoljen jer je $\int xy dA = 0$ s obzirom da su x i y glavne ose inercije poprečnog presjeka.

Iz preostalog uslova (3) nalazimo konstantu c . Naime, kako je

$$c \int_A y^2 dA = \mathfrak{M}_x,$$



Sl. 8:2.

imamo $c = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x}$, gdje je $I_x = \int_A y^2 dA$ moment inercije površine poprečnog presjeka u odnosu na x osu. Prema tome, normalni napon σ_{zz} je dat sa

$$\sigma_{zz} = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y, \quad (5)$$

što predstavlja linearnu promjenu napona po visini poprečnog presjeka grede (sl. 8:2).

Oredimo sada deformacije koje se javljaju u gredi. Iz Hookeovog zakona direktno slijedi:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -\frac{\nu}{E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y, & \epsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y, & \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y \\ \epsilon_{xy} &= 0, & \epsilon_{yz} &= 0, & \epsilon_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Komponentalna pomjeranja dobijamo integracijom iz (6):

$$u_x = -\frac{\nu}{E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} xy, \quad u_y = \frac{\nu}{2E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} \left[x^2 - y^2 - \frac{1}{\nu} (z^2 - lz) \right], \quad u_z = \frac{1}{2E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y (2z - l), \quad (7)$$

pri čemu smo, pri određivanju konstanti integracije pretpostavili da je težište lijevog bazisa ($z=0$) fiksirano, tj. da je za $x=y=z=0$: $u_x=u_y=u_z=0$. Zbog simetrije je onda i za $x=y=0, z=l$: $u_x=u_y=u_z=0$, a ovo daje šest integracionih konstanti.

Očigledno je iz (7) da je za uzdužna vlakna grede koja leže u ravni $y=0$, $u_z=0$, tj. ova vlakna se niti izdužuju niti skraćuju (za njih je takođe $\epsilon_{zz}=\epsilon_{xx}=\epsilon_{yy}=0, \sigma_{zz}=0$). Zato se ravan $y=0$ zove neutralna ravan grede. Uzdužna vlakna ispod ove ravni ($y>0$) se izdužuju ($\epsilon_{zz}>0$), a vlakna iznad neutralne ravni se sabijaju ($\epsilon_{zz}<0$). Centralna osa grede (tj. z osa), koja se još zove i neutralna osa grede jer je za nju $\epsilon_{zz}=0$, ima pomjeranja:

$$\begin{aligned} u_x &= u_z = 0 \\ u_y &= -\frac{1}{2E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} (z^2 - lz), \end{aligned} \quad (8)$$

tako da je

$$u_y^{\max} = u_y \left(z = \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{8EI_x} \mathfrak{M}_x l^2. \quad (9)$$

Jednačina (8) definiše tzv. elastičnu liniju grede, tj. deformisani oblik neutralne ose grede. Kako je poluprečnik krivine ρ krive $u_y = u_y(z)$ dat sa

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|u_y''|}{(1 + u_y'^2)^{3/2}}, \quad (10)$$

i s obzirom da je za male deformacije $u'^2 \ll 1$, dobijamo

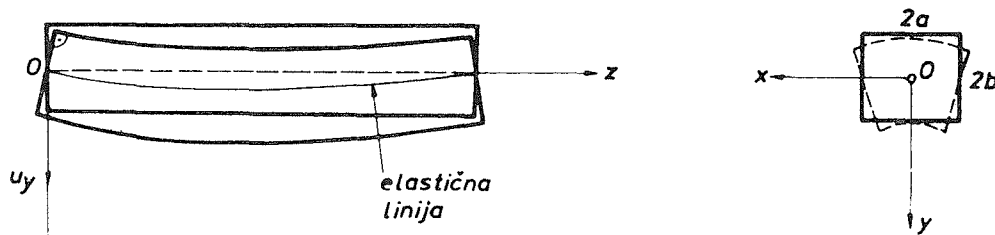
$$\frac{1}{\rho} = |u_y''|. \quad (11)$$

Diferencirajući (8) i zamjenom u (11) sada imamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathfrak{M}_x}{EI_x} = \text{const.}, \quad (12)$$

što znači da je poluprečnik krivine elastične linije konstantan, tj. elastična linija kod čistog pravog savijanja spregovima je približno kružni luk.

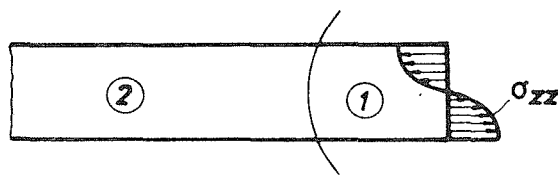
Nadalje, iz (7) vidimo da je u_z linearna funkcija od y , pa ravni presjeci $z = \text{const.}$ ostaju i poslije deformacije ravni. Pošto nema klizanja između pravaca x , y i z , uzdužna vlakna grede ostaju normalna na poprečne presjeke i poslije deformacije (sl. 8:3). Daljom analizom pomjeranja (7) može se u potpunosti naći deformisani oblik poprečnog presjeka grede. Može se pokazati da, recimo, pravougaoni



Sl. 8:3.

poprečni presjek nakon deformacije ima izgled prikazan isprekidanom linijom na sl. 8:3, tj. strane $x = \pm a$ ostaju ravne, a strane $y = \pm b$ postaju parabolične (sa radiusom krivine $\rho \nu$, gdje je ν Poissonov koeficijent).

Sa ovim smo u potpunosti riješili problem čistog pravog savijanja grede. Napominjemo da je ovo tačno rješenje problema pod uslovom da je moment \mathfrak{M}_x na krajevima ostvaren linearnom raspodjelom napona, saglasno izrazu (5). Ako to nije slučaj, ali je i dalje $\int \sigma_{zz} dA = 0$,



Sl. 8:4.

$\int_A x \sigma_{zz} dA = 0$, $\int_A y \sigma_{zz} dA = \mathfrak{M}_x$ (sl. 8:4), tada je zbog Saint-Venantovog principa izvedeno rješenje tačno rješenje dovoljno daleko od krajeva grede, tj. u dijelu ② na sl. 8:4.

8.1.2. Deformacioni rad kod čistog pravog savijanja

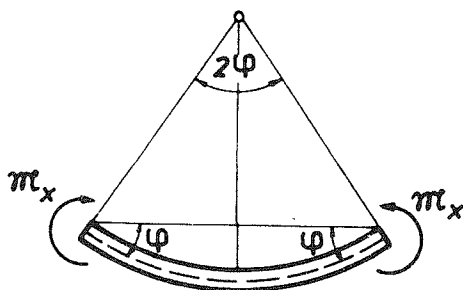
Iz opštih izraza za deformacioni rad dobijamo u slučaju čistog pravog savijanja:

$$\mathcal{A}^* = \frac{1}{2} \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} \quad (1)$$

$$\mathcal{A}^*(\sigma) = \frac{1}{2E} \sigma_{zz}^2 = \frac{1}{2E} \left(\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y \right)^2, \quad (2)$$

pa je

$$\mathcal{A} = \int_V \mathcal{A}^* dV = \int_0^L \int_A \frac{1}{2E} \left(\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y \right)^2 dA dz = \frac{\mathfrak{M}_x^2 l}{2EI_x}. \quad (3)$$



Sl. 8:5.

Iz (3) je primjenom Castiglianovog stava

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathfrak{M}_x} = \frac{\mathfrak{M}_x l}{EI_x} = 2\varphi, \quad (4)$$

gdje je 2φ ugao za koji zarotiraju poprečni presjeci krajeva grede nakon djelovanja sprega savijanja \mathfrak{M}_x (sl. 8:5).

Zaista, iz (8.1.1:8) je

$$\varphi \cong \operatorname{tg} \varphi = \frac{du_y}{dz} (z=0) = \frac{\mathfrak{M}_x l}{2EI_x} \quad (5)$$

Izraz za deformacioni rad možemo takođe napisati u obliku

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathfrak{M}_x \cdot 2\varphi = \mathfrak{M}_x \varphi. \quad (6)$$

Ako (6) izrazimo samo preko ugla φ , tada je

$$\mathcal{A}(\varphi) = \frac{EI_x}{2l} (2\varphi)^2, \quad (7)$$

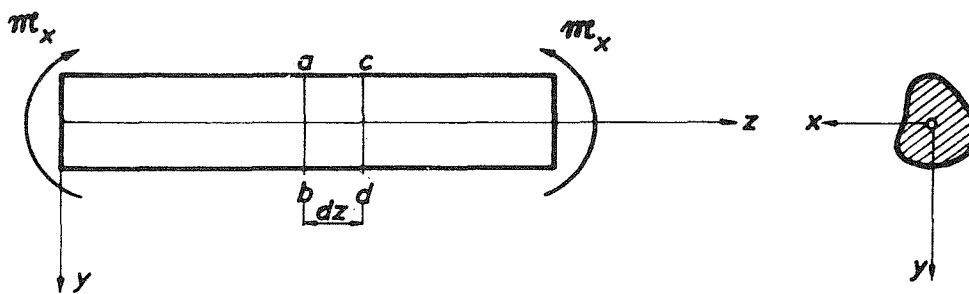
tako da odavde, preko Castiglianovog stava, slijedi

$$\frac{\partial \mathcal{A}(\varphi)}{\partial (2\varphi)} = \frac{EI_x}{l} 2\varphi = \mathfrak{M}_x. \quad (8)$$

8.1.3. Elementarna teorija čistog pravog savijanja

U prethodnom odjeljku našli smo tačno rješenje problema čistog pravog savijanja koristeći jednačine elastičnosti i semi-inverzni metod. Sada ćemo dobiti to isto rješenje na jedan elementaran način, bez striktnog korišćenja jednačina elastič-

nosti. Ovo će predstavljati primjer jednog klasičnog rješenja na nivou elementarne otpornosti materijala. Dakle, posmatrajmo prizmatičnu gredu opterećenu na krajevima sa dva jednaka a suprotna sprega savijanja M_x koji leže u glavnoj ravni grede yz (sl. 8:6). Pod dejstvom spregova M_x doći će do deformacije grede. Pretpostavimo da će pri ovoj deformaciji greda preći u oblik kružnog luka, pri čemu će poprečni presjeci grede ostati ravni i upravni na uzdužna vlakna grede. Ova pretpostavka naziva se Bernoulli-Eulerova hipoteza o ravnim presjecima. Ona slijedi iz simetričnosti opterećenja, kao i iz eksperimentalne evidencije. Dakle, kao rezultat deformacije poprečni presjek cd , koji je prvobitno bio paralelan sa poprečnim presjekom ab na rastojanju dz , zarotira u odnosu na presjek ab za ugao $d\varphi$ (sl. 8:7). Vlakna na konveksnoj strani grede su izdužena, a na konkavnoj strani sabijena. Negdje između gornjih i donjih vlakana grede postoji površ vlakana koja ostaju nepromijenjene dužine nakon deformacije grede. Ova površ se zove neutralna površ grede, a njen presjek sa glavnom ravni yz naziva se neutralna osa grede. Njen presjek sa ravni poprečnog presjeka grede naziva se neutralna osa poprečnog presjeka.



Sl. 8:6.

Neka AB na sl. 8:7 predstavlja neutralnu osu grede. Označimo njen poluprečnik krivine sa ρ . Očigledno je

$$\rho d\varphi = dz,$$

gdje je dz dužina vlakna mn . Izduženje vlakna pq koje je na rastojanju y od neutralne ose je

$$(\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi = y d\varphi,$$

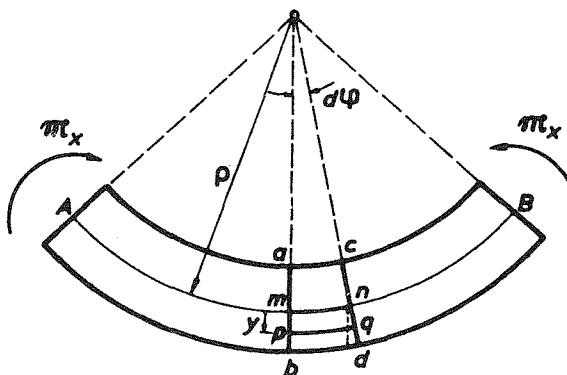
pa je dilatacija tog vlakna

$$\varepsilon_{zz} = \frac{y d\varphi}{dz} = \frac{y}{\rho}, \quad (1)$$

tj. proporcionalna je sa udaljenjem y od neutralne ose.

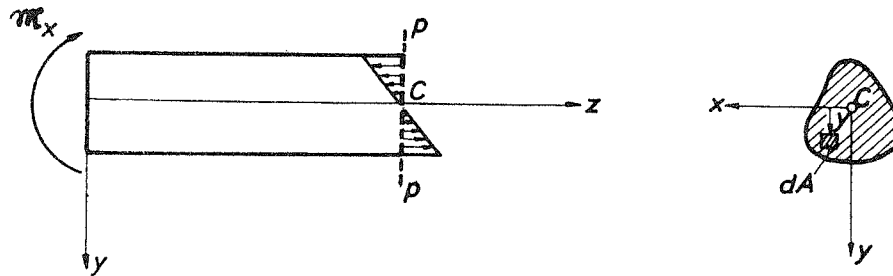
Korespondentni napon dobijamo iz Hookeovog zakona

$$\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} = \frac{E}{\rho} y. \quad (2)$$



Sl. 8:7.

Ovo pokazuje da se napon u gredi nastao usljed čistog savijanja grede mijenja linearno sa udaljenjem od neutralne površi. Da bismo odredili položaj neutralne površi u gredi, kao i vezu između radijusa krivine ρ i momenta \mathfrak{M}_x , koristimo uslov ravnoteže da se naponi σ_{zz} definisani sa (2) moraju u svakom poprečnom presjeku redukovati samo na rezultujući moment \mathfrak{M}_x (sl. 8:8). Dakle, neka je dA element



Sl. 8:8.

površine poprečnog presjeka na udaljenju y od neutralne ose, tada je sila koja djeluje na ovom elementu $\sigma_{zz}dA$. Ukupna (rezultujuća) sila na cijelom poprečnom presjeku mora biti jednaka nuli, tj.

$$\int_A \sigma_{zz} dA = 0,$$

odakle, s obzirom na (2), slijedi da mora biti

$$\int_A y dA = 0. \quad (3)$$

Ovo znači da je tačka C težište poprečnog presjeka, a neutralna osa (tj. x osa) je težišna osa. Moment elementarne sile $\sigma_{zz}dA$ oko ose x je $y\sigma_{zz}dA$, a rezultujući moment svih sila mora biti jednak momentu \mathfrak{M}_x , tj.

$$\int_A y \sigma_{zz} dA = \mathfrak{M}_x.$$

Odavde je, nakon zamjene (2),

$$\frac{E}{\rho} I_x = \mathfrak{M}_x, \quad (4)$$

gdje je $I_x = \int_A y^2 dA$ moment inercije površine poprečnog presjeka u odnosu na x osu.

Iz (4) je očigledno da je krivina $K = \frac{1}{\rho}$ deformisane neutralne ose grede proporcionalna momentu savijanja \mathfrak{M}_x , a obrnuto proporcionalna krutosti grede na savijanje EI_x , tj.

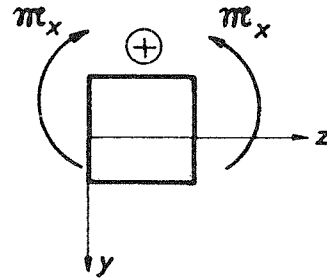
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathfrak{M}_x}{EI_x}. \quad (5)$$

Zamjenom (5) u (2) dobijamo konačan izraz za napon u savijenoj gredi

$$\sigma_{zz} = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y, \quad (6)$$

što je identično sa ranije izvedenim izrazom (8.1.1:5).

Napominjemo da je u izrazu (6), odnosno (8.1.1:5), neophodno koristiti konvenciju o znaku pozitivnog momenta \mathfrak{M}_x prikazanu na sl. 8:9, kako bi se za istegnuta vlakna ($y > 0$) dobio pozitivan napon ($\sigma_{zz} > 0$), i obrnuto.



Sl. 8:9.

8.1.4. Dimenzionisanje pri čistom pravom savijanju

Iz izraza (8.1.1:5), odnosno (8.1.3:6), vidimo da su ekstremne vrijednosti normalnog napona u gornjim i donjim vlaknima grede, tj. u najudaljenijim vlaknima od neutralne x ose (sl. 8:10). Dakle, maksimalni napon istezanja je

$$\sigma_{zz}^{\oplus} = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y_1, \text{ a maksimalni napon pritiska je } \sigma_{zz}^{\ominus} = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y_2.$$

Veličina

$$W_x^{\oplus} = \frac{I_x}{y_1} \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

naziva se otporni moment presjeka. Pri dimenzionisanju se zahtijeva da najveća apsolutna vrijednost normalnog napona ne pređe dozvoljenu vrijednost napona, tj.

$$\sigma_{zz}^{\max} \leq \sigma_d,$$

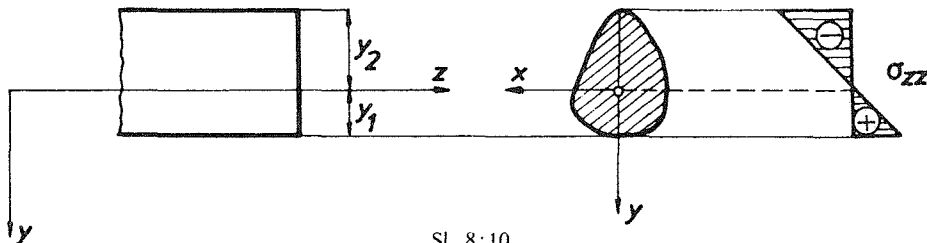
odakle je otporni moment

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|} \geq \frac{\mathfrak{M}_x}{\sigma_d}. \quad (2)$$

Ovo definiše potrebne dimenzije poprečnog presjeka grede.

Ako su karakteristike na istezanje i pritisak različite ($\sigma_d^+ \neq \sigma_d^-$), tada prilikom dimenzionisanja treba zahtijevati:

$$W_x^{\oplus} = \frac{I_x}{y_1} \geq \frac{\mathfrak{M}_x}{\sigma_d^+} \quad \text{i} \quad W_x^{\ominus} = \frac{I_x}{y_2} \geq \frac{\mathfrak{M}_x}{\sigma_d^-}. \quad (3)$$



Sl. 8:10.

Primjeri:

Primjer 8.1.

Tanki alumijski štap pravougaonog poprečnog presjeka $b \times h = 2 \times \frac{1}{20}$ cm i dužine $L = 40$ cm savijen je spregovima u kružni luk centralnog ugla $\varphi = 60^\circ$. Koliki je maksimalni napon u štapu? Modul elastičnosti je $E = 7 \text{ MN/cm}^2$. Koliki je maksimalni ugeb?

Rješenje:

Označimo sa ρ poluprečnik krivine deformisane ose štapa (sl. P 8.1), tada je

$$\rho = \frac{L}{\varphi} = \frac{40}{\pi/3} = \frac{120}{\pi} = 38,22 \text{ cm.} \quad (\text{a})$$

Iz (8.1.1:11) dobijamo vrijednost korespondentnog momenta

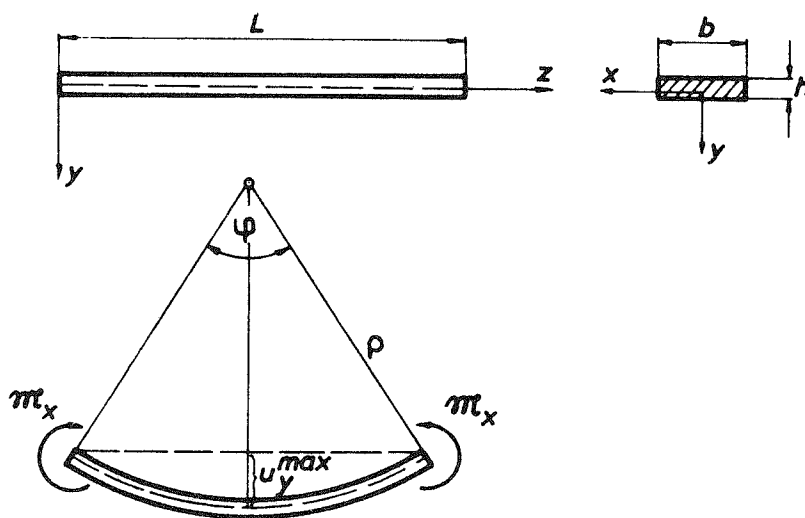
$$\mathfrak{M}_x = \frac{EI_x}{\rho}. \quad (\text{b})$$

Zamjenom (b) u izraz za napon (8.1.1:5) dobijamo

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{\rho} y,$$

tako da je maksimalni napon u štapu

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{E h}{\rho 2} = \frac{7 \cdot 10^3}{38,22} \cdot \frac{1}{40} = 4,58 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$



Sl. P 8.1.

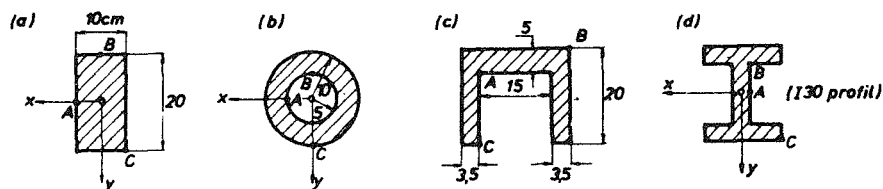
Maksimalni ugib možemo dobiti korišćenjem izraza (8.1.1:9), ili iz

$$u_y^{\max} = \rho \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right) = 38,22 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 5,12 \text{ cm},$$

kao što je očigledno sa sl. P 8.1.

Primjer 8.2.

Grede poprečnih presjeka kao na sl. P 8.2(a) opterećene su pozitivnim momentom savijanja $M_x = 54 \text{ kNm}$. Odrediti napone u naznačenim tačkama A, B i C presjeka.



Sl. P 8.2(a)

Rješenje:

a) Za pravougaoni poprečni presjek moment inercije je

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 6667 \text{ cm}^4,$$

pa je

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{5400}{6667} y = 0,81 y,$$

što je prikazano na sl. P 8.2(b). Očigledno:

$$\sigma_{zz}^A = \sigma_{zz}(y=0) = 0, \quad \sigma_{zz}^B = \sigma_{zz}(y=-10) = -8,1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{zz}^C = \sigma_{zz}(y=10) = 8,1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

b) U ovom slučaju je

$$I_x = \frac{\pi \cdot 10^4}{4} - \frac{\pi \cdot 5^4}{4} = 7363 \text{ cm}^4,$$

pa je

$$\sigma_{zz} = 0,73 y,$$

što je skicirano na sl. P 8.2(c). Prema tome je:

$$\sigma_{zz}^A = \sigma_{zz}(y=0) = 0, \quad \sigma_{zz}^B = \sigma_{zz}(y=-5) = -3,65 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{zz}^C = \sigma_{zz}(y=10) = 7,3 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

c) Težište profila na sl. P 8.2(d) je lako naći, a zatim i moment inercije $I_x = 7658 \text{ cm}^4$, pa je

$$\sigma_{zz} = 0,705y.$$

Odavde je:

$$\sigma_{zz}^A = \sigma_{zz}(y=-2,4) = -1,69 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_{zz}^B = \sigma_{zz}(y=-7,4) = -5,22 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{zz}^C = \sigma_{zz}(y=12,6) = 8,88 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

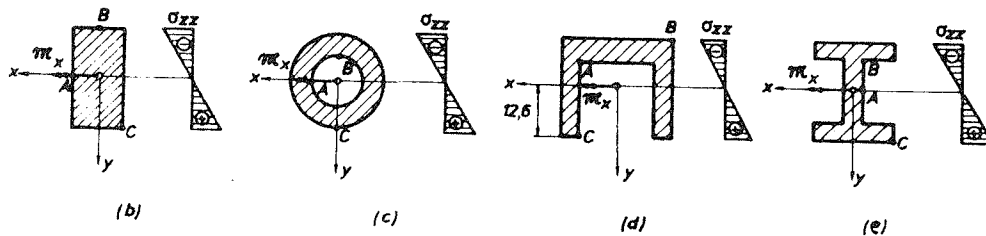
d) Za I 30 profil nalazimo iz tablica (vidi Dodatak C) da je $I_x = 9800 \text{ cm}^4$, pa je

$$\sigma_{zz} = 0,551y.$$

Odavde je (sl. P 8.2(e)):

$$\sigma_{zz}^A = \sigma_{zz}(y=0) = 0, \quad \sigma_{zz}^B = \sigma_{zz}(y=-6,25) = -3,44 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{zz}^C = \sigma_{zz}(y=8) = 4,41 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$



Sl. P 8.2 (b)–(e).

Primjer 8.3.

a) Dvije grede, jedna kružnog a druga kvadratnog poprečnog presjeka, imaju iste površine poprečnih presjeka A . Koja od njih je izdržljivija na savijanje?

b) Od dvije grede pravougaonog poprečnog presjeka $b_1 \times h_1$ i $b_2 \times h_2$, istih površina poprečnog presjeka ($b_1 h_1 = b_2 h_2$), koja je izdržljivija na savijanje, ako je $h_1 > h_2$?

c) Izračunati otporni moment W_x dvije paralelne trake površina $A/2$ na rastojanju h . Zaključiti zašto se u konstrukcijama često koriste I i slični profili.

Rješenje:

a) Otporni moment presjeka definisan je sa

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}},$$

tako da je

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{\mathfrak{M}_x}{W_x},$$

odakle vidimo da je greda izdržljivija na savijanje što joj je veći otporni moment. Dakle:

$$W_{x,1} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6} = \frac{A\sqrt{A}}{6} = 0,1667 A\sqrt{A}, \quad a = \sqrt{A}$$

$$W_{x,2} = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{R} = \frac{\pi R^3}{4} = 0,141 A\sqrt{A}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{A},$$

pa je $W_{x,1} > W_{x,2}$, tj. izdržljivija je greda kvadratnog poprečnog presjeka (sl. P 8.3(a)).

b) Za poprečni presjek ① na sl. P 8.3(b) je

$$W_x^{\text{①}} = \frac{I_x^{\text{①}}}{y_{\max}^{\text{①}}} = \frac{b_1 h_1^2}{6} = \frac{A h_1}{6},$$

dok je za poprečni presjek ②

$$W_x^{\text{②}} = \frac{I_x^{\text{②}}}{y_{\max}^{\text{②}}} = \frac{b_2 h_2^2}{6} = \frac{A h_2}{6},$$

pa je $W_x^{\text{①}} > W_x^{\text{②}}$, s obzirom da je $h_1 > h_2$. Na primjer, greda poprečnog presjeka $b \times h$ ($b < h$) opterećena na savijanje spregovima \mathfrak{M}_x izdržljivija je u položaju ① nego u položaju ② (sl. P 8.3(c)).

c) Moment inercije dvije uske trake na sl. P 8.3(d) je

$$I_x = 2 \left[\frac{b\delta^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{A}{2} \right] \cong \frac{h^2}{4} A,$$

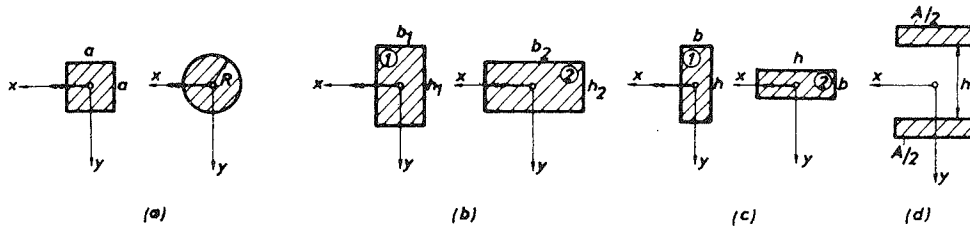
pa je otporni moment

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{h}{2} A = 0,5hA.$$

U opštem slučaju za proizvoljan poprečni presjek površine A je

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{1}{y_{\max}} \int_A y^2 dA = y_{\max} \int_A \left(\frac{y}{y_{\max}}\right)^2 dA < y_{\max} A,$$

jer je $\frac{y}{y_{\max}} < 1$. Jedino ako bi se poprečni presjek sastojao iz dvije uske trake (pojasa) površine $A/2$ na rastojanju $h = 2y_{\max}$, otporni moment bi bio $W_x = y_{\max} A$. Ovo bi bio idealni oblik poprečnog presjeka, a njegov otporni moment najveći. No, da bi greda bila cjelina, pojasevi se moraju spojiti, pa dobijamo I, [i druge profile koji, dakle, imaju veliku vrijednost otpornog momenta, tj. veliku izdržljivost na savijanje.



Sl. P 8.3.

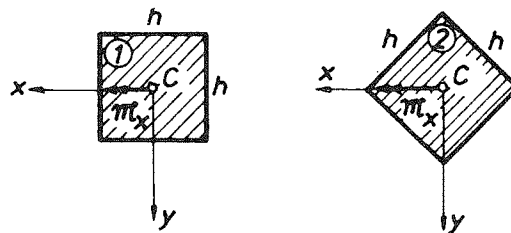
Često se definiše i tzv. stepen iskorišćenja presjeka kao odnos otpornog momenta presjeka prema idealnom otpornom momentu $W_i = y_{\max} A$, tj.

$$\eta = \frac{W_x}{W_i}$$

Naravno, uvijek je $\eta < 1$.

Primjer 8.4.

Greda kvadratnog poprečnog presjeka $h \times h$ opterećena je momentom savijanja M_x . U kojoj je od pozicija prikazanih na sl. P 8.4 greda izdržljivija?



Sl. P 8.4.

Rješenje:

Kako je:

$$I_x^{\textcircled{1}} = \frac{h^4}{12}, \quad I_x^{\textcircled{2}} = \frac{h^4}{12}, \quad y_{\max}^{\textcircled{1}} = \frac{h}{2}, \quad y_{\max}^{\textcircled{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{2},$$

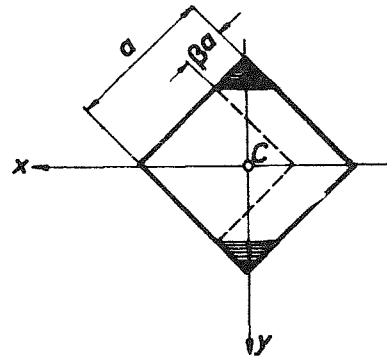
imamo:

$$W_x^{\text{①}} = \frac{h^3}{6}, \quad W_x^{\text{②}} = \frac{h^3}{6\sqrt{2}},$$

pa je $W_x^{\text{①}} > W_x^{\text{②}}$, tj. greda je izdržljivija u položaju ①.

Primjer 8.5.

Greda kvadratnog poprečnog presjeka je opterećena na savijanje u ravni dijagonale kvadrata (sl. P 8.5). Pokazati da greda postaje izdržljivija na savijanje ako odsiječemo šrafirane dijelove kao na slici. Koliko je β za koje je greda najizdržljivija?



Sl. P 8.5.

Rješenje:

Za $\beta=0$ je

$$I_x = \frac{a^4}{12}, \quad W_x = \frac{a^3}{6\sqrt{2}},$$

dok je za $\beta \neq 0$:

$$I_x = \frac{[a(1-\beta)]^4}{12} + 2 \int_0^{\frac{a(1-\beta)\sqrt{2}}{2}} y^2 \beta a \sqrt{2} dy = \frac{(1-\beta)^3 (1+3\beta)}{12} a^4$$

$$W_x = \frac{I_x}{(1-\beta) a \frac{\sqrt{2}}{2}} = (1-\beta)^2 (1+3\beta) \frac{a^3}{6\sqrt{2}}.$$

Najveću vrijednost za $W_x = W_x(\beta)$ dobićemo iz uslova

$$\frac{dW_x}{d\beta} = 0: \quad 9\beta^2 - 10\beta + 1 = 0,$$

što daje $\beta = \frac{1}{9}$, odnosno $W_x^{\text{max}} = 1,0535 \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

Dakle, ako odsiječemo uglove za $\beta = \frac{1}{9}$, otporni moment poraste za 5,35% (tj. za toliko se smanji maksimalni napon σ_{zz}^{max}). Rezultat je logičan, jer otkidanjem uglova I_x se smanji proporcionalno manje od y_{max} , pa se W_x poveća.

Primjer 8.6.

Greda od livenog gvožđa poprečnog presjeka na sl. P 8.6 opterećena je pozitivnim momentom savijanja u glavnoj ravni yz. Ako je $\sigma_d^+ = 20$ MPa i $\sigma_d^- = 80$ MPa, koliki je maksimalni moment M_x kojim se greda smije opteretiti?

Rješenje:

Lako je pokazati da je težište poprečnog presjeka na udaljenju 7,9 cm od vrha profila i da je moment inercije profila $I_x = 2528 \text{ cm}^4$. Kako je

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y,$$

to je

$$\sigma_{zz}^{\max,+} = \frac{M_x}{I_x} (15 - 7,9) = \frac{7,1}{2528} M_x = 0,0028 M_x \leq \sigma_d^+,$$

odakle mora biti

$$M_x \leq \frac{20 \cdot 10^{-1}}{0,0028} = 714 \text{ kNcm} = 7,14 \text{ kNm}.$$

Takođe je

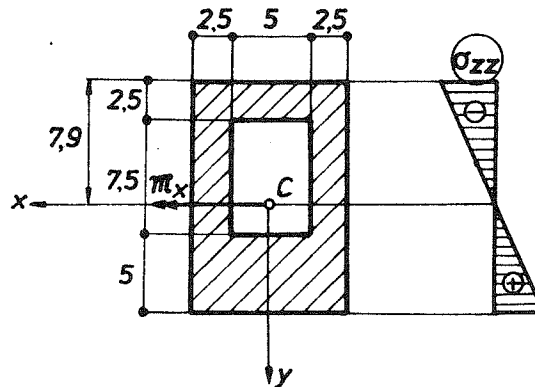
$$|\sigma_{zz}^{\max,-}| = \frac{M_x}{I_x} |-7,9| = \frac{7,9}{2528} M_x = 0,0031 M_x \leq \sigma_d^-,$$

odakle mora biti

$$M_x \leq \frac{80 \cdot 10^{-1}}{0,0031} = 2580 \text{ kNcm} = 25,8 \text{ kNm}.$$

*Maksimalna vrijednost momenta kojim smijemo opteretiti gredu je

$$M_x^{\max} = \min \{7,14; 25,8\} = 7,14 \text{ kNm}.$$



Sl. P 8.6.

Primjer 8.7.

Drvena greda pravougaonog poprečnog presjeka dimenzija $15 \times 20 \text{ cm}$ pojačana je sa donje strane čeličnom pločom $15 \times 1,5 \text{ cm}$. Naći maksimalni moment M_x kojim greda može biti opterećena ako je dozvoljeni napon drveta $\sigma_{d,1} = 0,8 \text{ kN/cm}^2$, a čelika $\sigma_{d,2} = 16 \text{ kN/cm}^2$. Modul elastičnosti drveta je $E_1 = 1 \text{ MN/cm}^2$, a čelika $E_2 = 20 \text{ MN/cm}^2$.

Rješenje:

Kako se greda ponaša pri deformaciji kao jedna cjelina (sl. P 8.7(a)), to je deformacija na proizvoljnom mjestu udaljenom y od neutralne ose data izrazom (8.1.3:1), tj.

$$\varepsilon_{zz} = \frac{y}{\rho}, \quad (a)$$

dok je napon definisan sa:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz,1} &= E_1 \varepsilon_{zz} = E_1 \frac{y}{\rho} \\ \sigma_{zz,2} &= E_2 \varepsilon_{zz} = E_2 \frac{y}{\rho}, \end{aligned} \quad (b)$$

što je skicirano na sl. P 8.7(b).

Iz uslova da je

$$T_z = \int_A \sigma_{zz} dA = \int_{A_1} \sigma_{zz,1} dA + \int_{A_2} \sigma_{zz,2} dA = \int_{-\eta}^{20-\eta} E_1 \frac{y}{\rho} 15 dy + \int_{20-\eta}^{21,5-\eta} E_2 \frac{y}{\rho} 15 dy \equiv 0$$

dobijamo $\eta = 16,45$ cm, što definiše neutralnu osu spojenog poprečnog presjeka. Iz preostalog uslova

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_{zz} y dA = \int_{A_1} \sigma_{zz,1} y dA + \int_{A_2} \sigma_{zz,2} y dA = \\ &= \frac{1}{\rho} (E_1 I_{x,1} + E_2 I_{x,2}) \equiv \mathfrak{M}_x \end{aligned}$$

dobijamo izraz za krivinu deformisane neutralne ose grede

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathfrak{M}_x}{E_1 I_{x,1} + E_2 I_{x,2}}. \quad (c)$$

Zamjenom (c) u (b) sada je:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz,1} &= \frac{E_1 \mathfrak{M}_x}{E_1 I_{x,1} + E_2 I_{x,2}} y \\ \sigma_{zz,2} &= \frac{E_2 \mathfrak{M}_x}{E_1 I_{x,1} + E_2 I_{x,2}} y. \end{aligned} \quad (d)$$

Kako je u našem slučaju $I_{x,1} = 22481 \text{ cm}^4$ i $I_{x,2} = 420 \text{ cm}^4$, zamjenom u (d) imamo:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz,1} &= \frac{\mathfrak{M}_x}{30886} y \\ \sigma_{zz,2} &= \frac{20 \mathfrak{M}_x}{30886} y, \end{aligned}$$

tako da je:

$$\sigma_{zz,1}^{\max} = \frac{M_x}{30886} |16,45| = \frac{M_x}{1876}$$

$$\sigma_{zz,2}^{\max} = \frac{20M_x}{30886} 5,05 = \frac{M_x}{306}$$

Iz zahtjeva

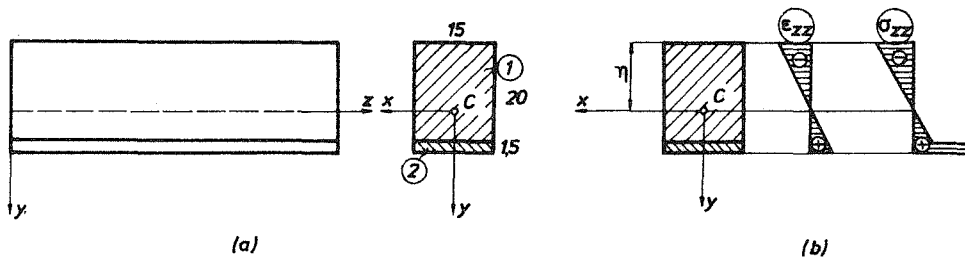
$$\sigma_{zz,1}^{\max} \leq \sigma_{d,1} = 0,8$$

onda slijedi $M_x \leq 15 \text{ kNm}$, dok iz zahtjeva

$$\sigma_{zz,2}^{\max} \leq \sigma_{d,2} = 16$$

slijedi $M_x \leq 49 \text{ kNm}$. Prema tome, maksimalni moment M_x kojim se može opteretiti greda je

$$M_x^{\max} = \min \{15; 49\} = 15 \text{ kNm.}$$



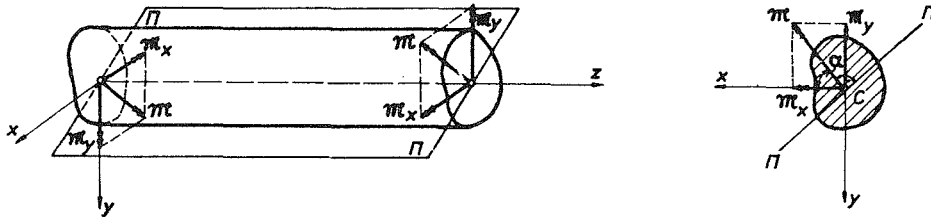
Sl. P 8.7.

8.2. Čisto koso savijanje

8.2.1. Izrazi za napon i deformaciju

U prethodnom poglavlju analizirali smo slučaj čistog pravog savijanja koje se javlja ako se greda optereti spregovima savijanja koji leže u jednoj od glavnih ravni grede. Ako to nije slučaj, tj. ako imamo savijanje grede sa dva jednaka a suprotna sprega koji ne leže ni u jednoj od glavnih ravni grede, tada govorimo o čistom kosom savijanju. Dakle, neka su x i y glavne centralne ose inercije poprečnog presjeka, z uzdužna težišna osa grede, i neka spregovi M djeluju u ravni $\Pi - \Pi$ koja se ne poklapa ni sa glavnom ravni yz ni sa glavnom ravni xz (sl. 8:11).

Odredimo napone i deformaciju kod ovakvog naprezanja grede. To možemo lako postići koristeći se principom superpozicije. Razložimo moment \mathfrak{M} u komponente \mathfrak{M}_x i \mathfrak{M}_y kao na sl. 8:11. Komponenta \mathfrak{M}_x izaziva čisto pravo savijanje u



Sl. 8:11.

glavnoj ravni yz , a komponenta \mathfrak{M}_y čisto pravo savijanje u glavnoj ravni xz . Pokazali smo u prethodnom poglavlju da je napon koji se javlja usljed momenta \mathfrak{M}_x dat sa

$$\sigma_{zz} = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y, \quad (1)$$

dok je napon koji se javlja od momenta \mathfrak{M}_y , po analogiji sa izrazom (1), dat sa

$$\sigma_{zz} = \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x. \quad (2)$$

Na osnovu principa superpozicije napon koji se javlja od sprega \mathfrak{M} jednak je zbiru napona koji se javljaju posebno od komponente \mathfrak{M}_x i komponente \mathfrak{M}_y , tj.

$$\sigma_{zz} = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x. \quad (3)$$

Označimo sa α ugao koji pravac vektora \mathfrak{M} čini sa pozitivnim smjerom x ose (mjereno od \mathfrak{M} u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu). Tada je $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} \cos \alpha$ i $\mathfrak{M}_y = \mathfrak{M} \sin \alpha$. (Momenti \mathfrak{M}_x i \mathfrak{M}_y sa smjerom kao na sl. 8:11 istežu vlakna $y > 0$ i $x > 0$, pa ih sa takvim smjerovima uzimamo kao pozitivne). Zamjenom u (3) imamo

$$\sigma_{zz} = \mathfrak{M} \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right). \quad (4)$$

Ovo je izraz za napon kod grede opterećene na čisto koso savijanje. Vidimo da je napon σ_{zz} linearna funkcija koordinata x i y .

Deformacije se sada nalaze direktno iz Hookeovog zakona:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -\frac{\nu}{E} \left(\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x \right), & \epsilon_{xy} &= 0 \\ \epsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E} \left(\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x \right), & \epsilon_{yz} &= 0 \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x \right), & \epsilon_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Komponentalna pomjeranja slijede integracijom iz (5):

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{\nu}{E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} xy + \frac{\nu}{2E} \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} \left[\frac{y^2}{2} - x^2 - \frac{1}{\nu} (z^2 - lz) \right] \\ u_y &= \frac{\nu}{2E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} \left[x^2 - y^2 - \frac{1}{\nu} (z^2 - lz) \right] - \frac{1}{2E} \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} xy \\ u_z &= \frac{1}{2E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y (2z - l) + \frac{1}{2E} \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x (2z - l), \end{aligned} \quad (6)$$

pri čemu su korišteni isti granični uslovi kao i u slučaju čistog pravog savijanja.

Da bismo našli neutralnu ravan (tj. ravan grede čija vlakna ostaju poslije deformacije nepromijenjene dužine), postavljamo uslov $u_z = 0$ (ili $\epsilon_{zz} = 0$, ili $\sigma_{zz} = 0$), odakle slijedi

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x = 0,$$

tj.

$$y = -\left(\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \right) x, \quad (7)$$

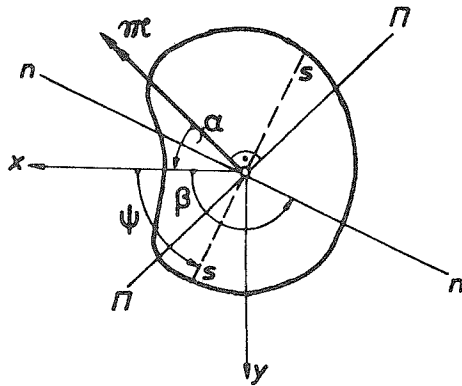
a ovo je težišna ravan koja siječe poprečni presjek grede po pravoj $y = (\operatorname{tg} \beta) x$, gdje je

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (8)$$

Ova prava se zove neutralna osa poprečnog presjeka ($n-n$ na sl. 8:12). Evidentno je iz (8) da za razliku od čistog pravog savijanja, neutralna osa $n-n$ poprečnog presjeka kod čistog kosog savijanja nije upravna na ravan $\Pi-\Pi$ u kojoj djeluju spregovi \mathfrak{M} (izuzev ako je $I_x = I_y$, no tada nema kosog savijanja jer je svaki pravac kroz težište poprečnog presjeka glavni pravac).

Pomjeranja tačaka z ose (neutralne ose grede) dobijaju se iz (6) stavljajući $x = y = 0$:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{2E} \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} (z^2 - lz) \\ u_y &= -\frac{1}{2E} \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} (z^2 - lz) \\ u_z &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$



Sl. 8:12.

Intenzitet rezultujućeg pomjeranja tačaka z ose dobijamo iz

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{1}{2E} \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} \right)^2} |z^2 - lz|, \quad (10)$$

dok je pravac ovog pomjeranja definisan sa

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{u_y}{u_x} = \frac{\mathfrak{M}_x I_y}{\mathfrak{M}_y I_x} = \frac{I_y}{I_x} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (11)$$

što je upravno na pravac neutralne ose $n-n$ koji je određen sa (8) ($\operatorname{tg} \Psi \cdot \operatorname{tg} \beta = -1$). Ravan $S-S$ definisana sa $y = (\operatorname{tg} \Psi) x$ i normalna na neutralnu osu $n-n$ naziva se ravan savijanja grede. U njoj leži deformisana centralna z osa grede.

8.2.2. Deformacioni rad kod čistog kosog savijanja

Specifični deformacioni rad u ovom slučaju je

$$\mathcal{A}^* = \frac{1}{2E} \sigma_{zz}^2 = \frac{1}{2E} \left(\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x \right)^2, \quad (1)$$

a ukupan deformacioni rad je

$$\mathcal{A} = \int_V \mathcal{A}^* dV = \frac{\mathfrak{M}_x^2 l}{2EI_x} + \frac{\mathfrak{M}_y^2 l}{2EI_y}, \quad (2)$$

gdje je l dužina grede. Iz (2) je dalje:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathfrak{M}_x} = \frac{\mathfrak{M}_x l}{EI_x}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathfrak{M}_y} = \frac{\mathfrak{M}_y l}{EI_y},$$

tako da je

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathfrak{M}_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathfrak{M}_y} \right)^2} = \frac{l}{E} \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_x^2}{I_x^2} + \frac{\mathfrak{M}_y^2}{I_y^2}} \equiv 2\varphi, \quad (3)$$

gdje je 2φ ugao za koji zarotiraju bazisi grede pri kosom savijanju spregovima \mathfrak{M}_x i \mathfrak{M}_y . Zaista, iz (8.2.1 : 10) je

$$\varphi = \frac{du}{dz} (z=0) = \frac{l}{2E} \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_x^2}{I_x^2} + \frac{\mathfrak{M}_y^2}{I_y^2}}, \quad (4)$$

što se slaže sa izrazom (3).

Ako se deformacioni rad izrazi preko ukupne vrijednosti momenta \mathfrak{M} , tada je

$$\mathcal{A} = \frac{\mathfrak{M}^2 l}{2E} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{I_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y} \right), \quad (5)$$

pa je, koristeći Castiglianov stav,

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M} l}{2E} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{I_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y} \right) = \frac{\mathfrak{M}_x l}{EI_x} \cos \alpha + \frac{\mathfrak{M}_y l}{EI_y} \sin \alpha = \overline{2\varphi}. \quad (6)$$

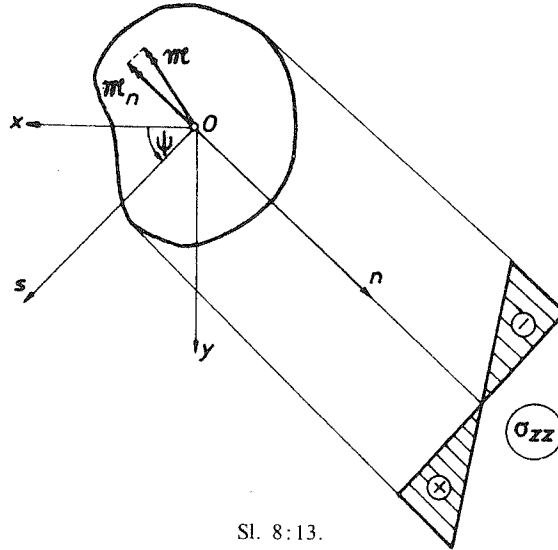
Očigledno je da je $\overline{\varphi} \neq \varphi$. Zaista, $\overline{\varphi}$ je projekcija ugla φ neutralne ose grede prema z osi u ravni $S-S$ (i u tački $z=0$) na ravan dejstva sprega $\Pi-\Pi$.

8.2.3. Dimenzionisanje pri čistom kosom savijanju

Pri dimenzionisanju grede opterećene na čisto koso savijanje zahtijeva se da je

$$\sigma_{zz}^{\max} \leq \sigma_d. \quad (1)$$

Da bi se odredio maksimalni napón, pogodno je prepisati izraz (8.2.1:3), odnosno (8.2.1:4), u koordinatama (s, n) , umjesto (x, y) , pri čemu se n koordinata poklapa sa pravcem neutralne ose poprečnog presjeka, a s je upravna na nju (sl. 8:13).



Sl. 8:13.

Kako je:

$$x = s \cos \Psi - n \sin \Psi$$

$$y = s \sin \Psi + n \cos \Psi,$$

zamjenom u (8.2.1:3) dobijamo

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{M_x}{I_x} \sin \Psi + \frac{M_y}{I_y} \cos \Psi \right) s + \left(\frac{M_x}{I_x} \cos \Psi - \frac{M_y}{I_y} \sin \Psi \right) n.$$

Imajući u vidu izraz (8.2.1:11), prethodni izraz postaje

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{M_x}{I_x} \sin \Psi + \frac{M_y}{I_y} \cos \Psi \right) s,$$

odnosno, nakon eliminacije ugla Ψ ,

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} s, \quad (2)$$

ili

$$\sigma_{zz} = M \left(\frac{\cos^2 \alpha}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} s. \quad (3)$$

Može se pokazati da u izrazima (2) i (3) koeficijent uz s predstavlja odnos $\frac{\mathfrak{M}_n}{I_n}$, tj.

$$\frac{\mathfrak{M}_n}{I_n} = \left(\frac{\mathfrak{M}_x^2}{I_x^2} + \frac{\mathfrak{M}_y^2}{I_y^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

gdje je \mathfrak{M}_n projekcija momenta \mathfrak{M} na osu n , a I_n moment inercije površine poprečnog presjeka u odnosu na osu n . Dakle,

$$\sigma_{zz} = \frac{\mathfrak{M}_n}{I_n} s. \quad (5)$$

Očigledno je iz (5) da je napon σ_{zz} proporcionalan normalnom udaljenju tačke od neutralne ose grede, te da je ekstreman napon u tačkama najudaljenijim od neutralne ose (sl. 8:13). Prema tome, pri određivanju maksimalnog napona treba prvo naći neutralnu osu, pa zatim najudaljeniju tačku od nje. U toj tački je napon najveći. (Ponekad je, međutim, moguće odrediti u kojoj će tački napon biti ekstreman i bez traženja neutralne ose. To važi za pravougaone poprečne presjeke, I profile, Z profile i sl., jer su kod njih kritične tačke u uglovima profila).

Primijetimo na kraju, upoređujući (8.2.1:10) i (4), da je (8.2.1:10) moguće prepisati u obliku

$$u = \frac{\mathfrak{M}_n}{2EI_n} (z^2 - lz), \quad (6)$$

što je analogno izrazu (8.1.1:8) kod čistog pravog savijanja.

Primjeri:

Primjer 8.8.

Greda pravougaonog poprečnog presjeka $b \times h = 6 \times 12$ cm opterećena je na krajevima momentom $\mathfrak{M} = 1$ kNm, kao na sl. P 8.8(a). Odrediti položaj neutralne ose poprečnog presjeka i maksimalni napon.

Rješenje:

Neutralna osa poprečnog presjeka definisana je jednačinom (8.2.1:7)

$$y = - \left(\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \right) x.$$

Sa sl. P 8.8(a) je očigledno $\alpha = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$, tako da je $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

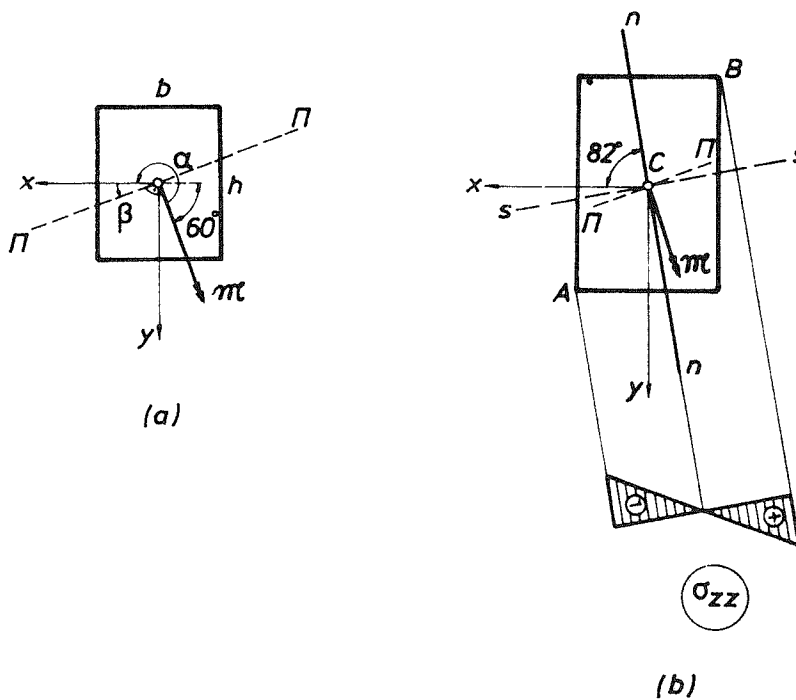
$\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, pa kako je $I_x = 864$ cm⁴ i $I_y = 216$ cm⁴, imamo

$$y = -\frac{864}{216} \sqrt{3} x = -4\sqrt{3} x,$$

što je prava pod uglom $\beta = -82^\circ$ u odnosu na x osu (sl. P 8.8(b)).

Maksimalni napon je u najudaljenijim tačkama od neutralne ose, tj. u tačkama A i B na sl. P 8.8(b). Kako je $B\left(-\frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right) = B(-3, -6)$, imamo zamjenom u izraz za napon (8.2.1:4)

$$\sigma_{zz}^{\max} = 100 \left[\frac{-\frac{1}{2}}{864} (-6) + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{216} (-3) \right] = 1,55 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$



Sl. P 8.8.

Primjer 8.9.

Greda [20 profila je opterećena momentom savijanja $M = 4 \text{ kNm}$ pod uglom α ($\text{tg } \alpha = \frac{1}{3}$), kao na sl. P 8.9(a). Odrediti maksimalne napone zatezanja i pritiska u gredi.

Rješenje:

Kako je $\text{tg } \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, i s obzirom da je za [20 profil:

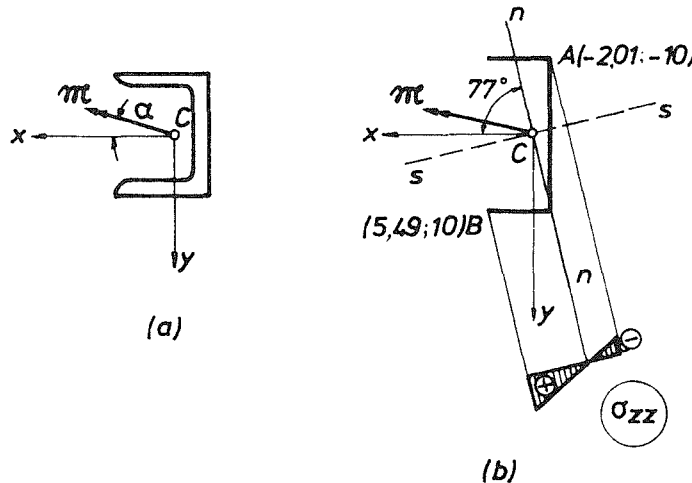
$I_x = 1910 \text{ cm}^4$ i $I_y = 148 \text{ cm}^4$, neutralna osa je definisana sa:

$$y = (\operatorname{tg} \beta) x, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1910}{148} \cdot \frac{1}{3} = -4,3, \quad \beta = -76,9^\circ.$$

Maksimalni naponi su u najudaljenijim tačkama od neutralne ose, tj. u tačkama A i B na sl. P 8.9 (b):

$$\sigma_{zz}^A = 4 \cdot 10^2 \left[\frac{3}{1910} \sqrt{10} (-10) + \frac{1}{148} \sqrt{10} (-2,01) \right] = -3,70 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = \sigma_{zz}^{\text{max}, -}$$

$$\sigma_{zz}^B = 4 \cdot 10^2 \left[\frac{3}{1910} \sqrt{10} (10) + \frac{1}{148} \sqrt{10} (5,49) \right] = 6,68 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = \sigma_{zz}^{\text{max}, +}$$



Sl. P 8.9.

Primjer 8.10.

Greda Z 16 profila opterećena je momentom savijanja $M = 3 \text{ kNm}$, kao na sl. P 8.10. Naći maksimalni napon u gredi. Odrediti ravan savijanja i maksimalni ugib grede. Greda je dužine $L = 1 \text{ m}$ i modula elastičnosti $E = 20 \text{ MN/cm}^2$. Odrediti nagib u ravni savijanja na krajevima grede.

Rješenje:

Iz tablica standardizovanih profila nalazimo da su glavne centralne ose inercije Z 16 profila definisane uglom $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,357$, tj. $\alpha_1 = 19,6^\circ$. Prema tome je $\alpha = 270 + \alpha_1$, pa je $\cos \alpha = 0,336$, $\sin \alpha = -0,942$, $\operatorname{tg} \alpha = -2,8$. Iz tablica takođe nalazimo da su glavni centralni momenti inercije Z 16 profila: $I_x = 1180 \text{ cm}^4$ i $I_y = 79,5 \text{ cm}^4$.

Normalni napon u gredi je definisan sa

$$\sigma_{zz} = \mathfrak{M} \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right),$$

dok neutralnu osu dobijamo iz:

$$y = (\operatorname{tg} \beta) x, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1180}{79,5} (-2,8) = 41,6, \quad \beta = 88,6^\circ.$$

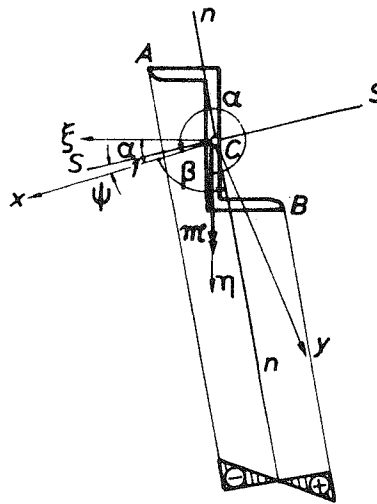
Najudaljenije tačke od neutralne ose su A i B (sl. P 8.10). Tačka A ima koordinate $A(3,51; -9,74)$, kao što se vidi u tablicama, a tačka $B(-3,51; 9,74)$. Dakle:

$$\sigma_{zz}^A = 300 \left[\frac{0,336}{1180} (-9,74) + \frac{-0,942}{79,5} (3,51) \right] = -13,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{zz}^B = 300 \left[\frac{0,336}{1180} (9,74) + \frac{-0,942}{79,5} (-3,51) \right] = 13,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Ravan savijanja $S-S$ definisana je sa (8.2.1:11):

$$y = (\operatorname{tg} \Psi) x, \quad \operatorname{tg} \Psi = \frac{I_y}{I_x} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{79,5}{1180} \left(-\frac{1}{2,8} \right) = -0,024, \quad \Psi = -1,38^\circ.$$



σ_{zz}

Sl. P 8.10.

Maksimalni ugib grede dobijamo iz (8.2.1:10), stavljajući $z = \frac{L}{2}$:

$$u_{\max} = u\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2E} \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{M}_y}{I_y}\right)^2} \frac{L^2}{4} = \\ = \frac{\mathfrak{M}L^2}{8E} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y^2}} = \dots = 0,2212 \text{ cm.}$$

Nagib u ravni savijanja na mjestu $z = 0$ (kraju grede) dobijamo iz izraza (8.2.2:4):

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = \frac{L}{2E} \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{M}_x}{I_x}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{M}_y}{I_y}\right)^2} = \\ = \frac{\mathfrak{M}L}{2E} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y^2}} = \dots = 0,00885 \text{ rad} = 0,51^\circ.$$

Primjer 8.11.

Dimenzionisati gredu I profila opterećenu na koso savijanje spregovima $\mathfrak{M}_x = 1 \text{ kNm}$ i $\mathfrak{M}_y = 2 \text{ kNm}$. Dato je $\sigma_d = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Rješenje:

Za I, Z i slične profile kritične tačke presjeka pri kosom savijanju su u uglovima profila, pa je za ovakve profile

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y_{\max} + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x_{\max} = \frac{\mathfrak{M}_x}{W_x} + \frac{\mathfrak{M}_y}{W_y}, \quad (\text{a})$$

gdje je \mathfrak{M}_x i \mathfrak{M}_y uzeto po apsolutnoj vrijednosti. Izbor profila vršimo iz zahtjeva da je

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{W_x} + \frac{\mathfrak{M}_y}{W_y} \leq \sigma_d. \quad (\text{b})$$

Međutim, relacija (b) sadrži dvije nepoznate veličine W_x i W_y , pa se prilikom dimenzionisanja standardizovanih I, Z, ili sličnih profila, prvo mora pretpostaviti odnos $\frac{W_x}{W_y}$, (koji se za I profile kreće od 6 za najmanje profile, do 10 za najviše), pa

iz

$$\frac{1}{W_x} \left(\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y \frac{W_x}{W_y} \right) \leq \sigma_d$$

odrediti

$$W_x \geq \frac{\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y \frac{W_x}{W_y}}{\sigma_d}, \quad (\text{c})$$

i usvojiti korespondentni profil iz tablica. Na kraju treba provjeriti nejednakost (b), te po potrebi ponoviti proračun sa novim pretpostavljenim odnosom W_x/W_y .

Pretpostavimo, dakle, da je $\frac{W_x}{W_y} = 9$. Tada iz (c) slijedi

$$W_x \geq \frac{100 + 200 \cdot 9}{16} = 118,75 \text{ cm}^3,$$

a iz tablica standardizovanih I profila nalazimo da profil I 16 ima:

$$W_x = 117 \text{ cm}^3, \quad W_y = 14,8 \text{ cm}^3.$$

Provjerimo da li profil I 16 zadovoljava nejednakost (b). Kako je

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{100}{117} + \frac{200}{14,8} = 14,37 < 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2},$$

zaključujemo da je profil I 16 pravilno odabran.

9. EKSCENTRIČNI PRITISAK GREDE

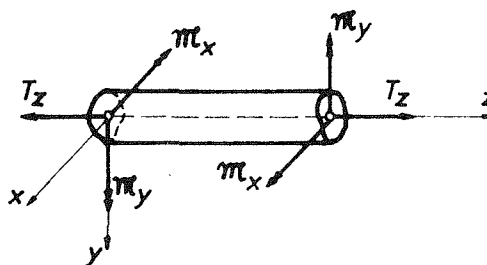
9.1. Kombinacija aksijalnog naprezanja i čistog savijanja grede

Posmatrajmo prvo problem kombinovanog naprezanja grede usljed dještva aksijalne sile T_z i sprega $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y\}$ na krajevima grede (sl. 9:1). Na osnovu principa superpozicije rješenje dobijamo sabiranjem rješenja izvedenih za naprezanje grede posebno silom T_z i momentom \mathfrak{M} . Dakle, napon u gredi jednak je

$$\sigma_{zz} = \frac{T_z}{A} + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x + \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y, \quad (1)$$

gdje je A površina poprečnog presjeka grede, a I_x i I_y glavni centralni momenti inercije poprečnog presjeka grede.

Do izraza (1) za napon mogli smo doći i bez principa superpozicije polazeći od jednačina elastičnosti sa pretpostavkom da je jedino komponenta napona σ_{zz} različita od nule, tj.:



Sl. 9:1.

$$\sigma_{zz} \neq 0 \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0, \quad (2)$$

pa pokazati da iz jednačina elastičnosti slijedi da σ_{zz} mora biti linearna funkcija koordinata x i y

$$\sigma_{zz} = a + bx + cy. \quad (3)$$

Iz graničnih uslova na krajevima grede slijedi da su konstante a , b i c u (3) jednake:

$$a = \frac{T_z}{A}, \quad b = \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y}, \quad c = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x}, \quad (4)$$

što zamjenom u (3) ponovo daje izraz za napon (1).

Slučajevi aksijalnog naprezanja, čistog pravog savijanja i čistog kosog savijanja slijede stavljajući u (1) respektivno: $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = 0$, $T_z = \mathfrak{M}_y = 0$ i $T_z = 0$.

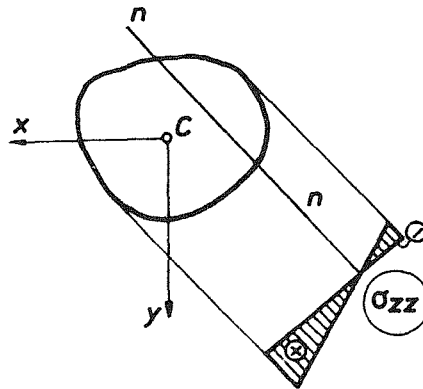
Jasno je, takođe, da je kod aksijalnog naprezanja stanje napona homogeno, dok je kod čistog savijanja i kombinacije aksijalnog naprezanja i čistog savijanja stanje napona nehomogeno (tj. mijenja se od tačke do tačke grede kao linearna funkcija od x i y iako se ne mjenja sa z).

S obzirom da je $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$, jasno je da je z glavni pravac napona u svakoj tački grede, a σ_{zz} glavni napon. S obzirom da je $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$ i $\sigma_{yx} = \sigma_{yz} = 0$, to su x i y takođe glavni pravci. No, s obzirom da je $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} (= 0)$, to su i svi pravci u datoj tački upravni na z pravac takođe glavni pravci napona. Maksimalni smičući napon u tački je $\tau_{\max} = \frac{\sigma_{zz}}{2}$, i djeluje u beskonačno mnogo ravni koje su sve nagnute pod 45° u odnosu na z osu.

Komponentalne deformacije i pomjeranja mogu se dobiti iz (1) analogno kao i u prethodnim poglavljima. Neutralna osa poprečnog presjeka je osa za čije je tačke $\sigma_{zz}=0$ (tj. $\epsilon_{zz}=0$). Dakle, iz (1) slijedi da je neutralna osa definisana sa

$$\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{T_z}{A} = 0, \quad (5)$$

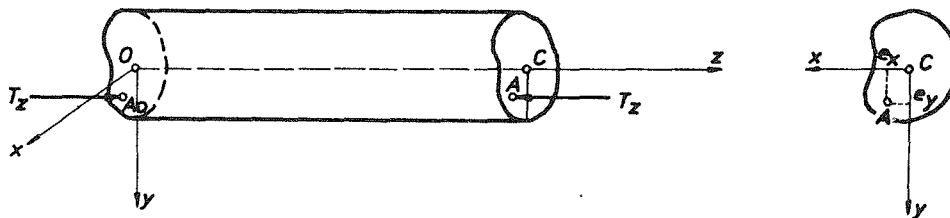
što predstavlja pravu koja očigledno ne prolazi kroz koordinatni početak (sl. 9:2).



Sl. 9:2.

9.2. Izraz za napon ekscentrično pritisnute grede

Analiziraćemo sada slučaj ekscentričnog pritiska ili zatezanja grede. Ono nastaje ako je greda opterećena na krajevima aksijalnom silom koja ne prolazi kroz težište poprečnog presjeka. Na sl. 9:3 prikazan je slučaj ekscentrično pritisnute



Sl. 9:3.

grede. Dakle, neka je z osa težišna osa grede, a x i y glavne centralne ose inercije poprečnog presjeka grede, i neka aksijalna (kompresivna) sila T_z djeluje u tačkama A odnosno A_0 , sa koordinatama (e_x, e_y) u (x, y) koordinatnom sistemu $(e_x,$

i e_y , se zovu ekscentriciteti sile T_z). Ako sada zamislimo da smo redukovali silu T_z na težište poprečnog presjeka, dobićemo silu T_z i momente $\mathfrak{M}_x = -T_z e_y$ i $\mathfrak{M}_y = -T_z e_x$. Prema tome, ekscentrični pritisak grede predstavlja kombinaciju aksijalnog naprezanja i čistog savijanja grede. . Napon koji se javlja u gredi (dovoljno daleko od krajeva grede) dat je sa

$$\sigma_{zz} = -\frac{T_z}{A} + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x + \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y, \quad (1)$$

tj.

$$\sigma_{zz} = -\left(\frac{T_z}{A} + \frac{T_z e_x}{I_y} x + \frac{T_z e_y}{I_x} y\right),$$

ili

$$\sigma_{zz} = -\frac{T_z}{A} \left(1 + \frac{e_x}{i_y^2} x + \frac{e_y}{i_x^2} y\right), \quad (2)$$

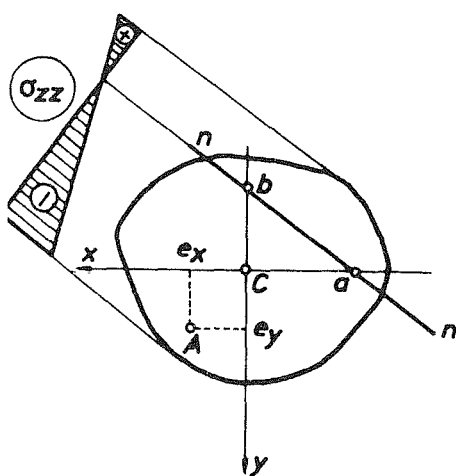
gdje su A površina poprečnog presjeka grede, a i_x i i_y glavni centralni poluprečnici inercije poprečnog presjeka grede ($i_x^2 = I_x/A$, $i_y^2 = I_y/A$).

Neutralna osa je definisana jednačinom

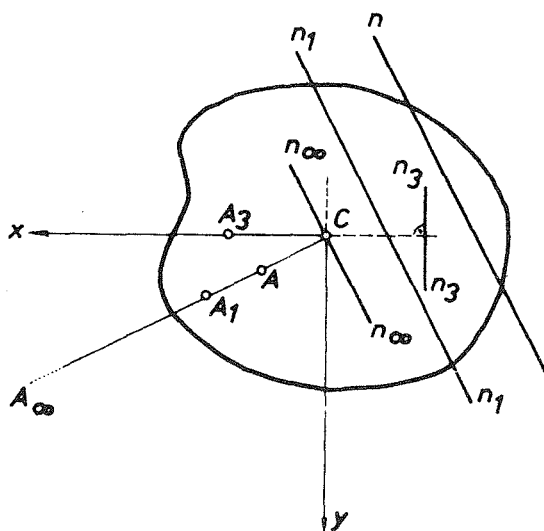
$$\frac{e_x}{i_y^2} x + \frac{e_y}{i_x^2} y + 1 = 0, \quad (3)$$

tj. pravom koja odsijeca na koordinatnim osama x i y odsječke (sl. 9:4):

$$a = -\frac{i_y^2}{e_x}, \quad b = -\frac{i_x^2}{e_y}. \quad (4)$$



Sl. 9:4.



Sl. 9:5.

Očigledno je iz (4), ako se napadna tačka sile pomjera po pravoj koja prolazi kroz težište poprečnog presjeka (na primjer e_x i e_y porastu, recimo, k puta), neutralna osa se paralelno pomjera u istom smjeru (jer se a i b smanjuju k puta) (sl. 9:5). Ako je napadna tačka sile u beskonačnosti, neutralna osa prolazi težištem poprečnog presjeka, a ovo odgovara slučaju čistog kosog savijanja. Ako je napadna tačka sile u težištu poprečnog presjeka, neutralna osa je u beskonačnosti, što odgovara slučaju aksijalnog naprezanja. Ako je napadna tačka sile na jednoj od glavnih centralnih osa, na primjer x osi, neutralna osa je paralelna y osi, i obrnuto.

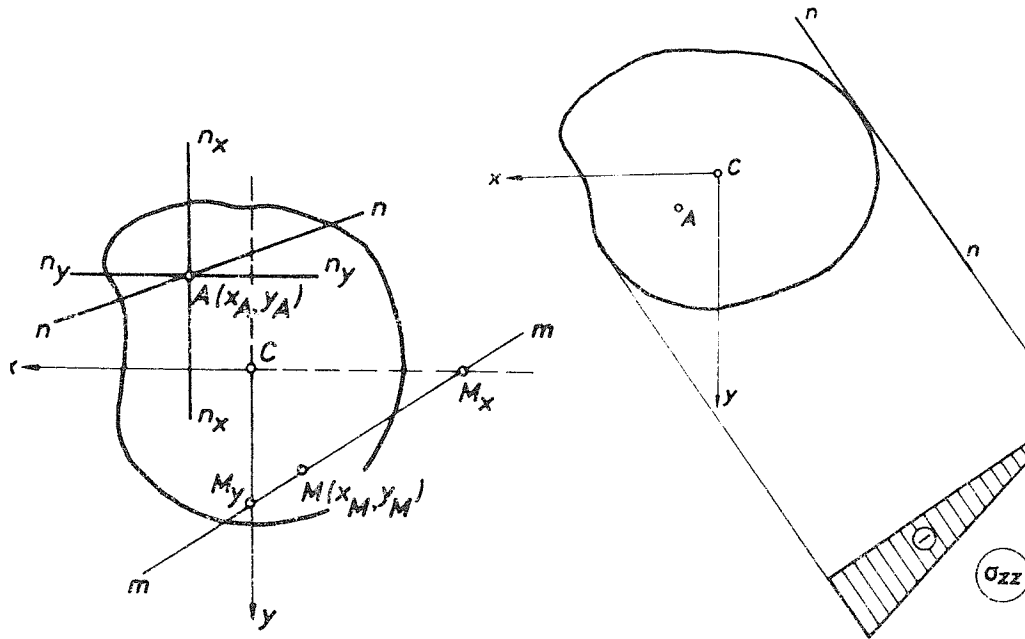
Ako se napadna tačka sile pomjera po nekoj pravoj $m-m$ koja ne prolazi kroz težište poprečnog presjeka, korespondentna neutralna osa se obrće oko tačke $A(x_A, y_A)$ za koju je $m-m$ neutralna osa. Da bismo ovo dokazali, napišimo jednačinu prave $m-m$ koja je neutralna osa poprečnog presjeka kada sila djeluje u tački $A(x_A, y_A)$. Imamo

$$\frac{x_A}{i_y^2} x_M + \frac{y_A}{i_x^2} y_M + 1 = 0,$$

gdje su (x_M, y_M) tekuće koordinate na pravoj $m-m$ (sl. 9:6). Napišimo sada jednačinu neutralne ose koja odgovara tački $M(x_M, y_M)$ na pravoj $m-m$. Imamo

$$\frac{x_M}{i_y^2} x + \frac{y_M}{i_x^2} y + 1 = 0,$$

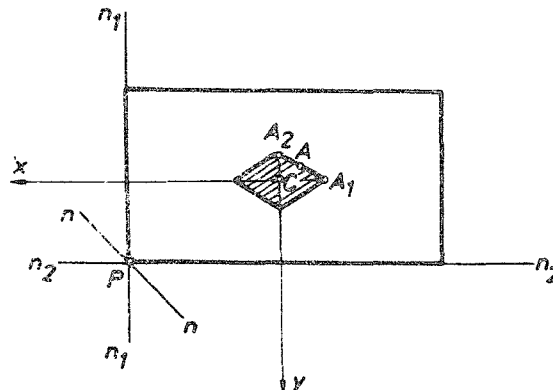
što je, kao što vidimo poređenjem sa prethodnom relacijom, tačno za sve vrijednosti (x_M, y_M) pod uslovom da je $x = x_A$ i $y = y_A$. Dakle, dok se tačka M pomjera duž prave $m-m$, korespondentna neutralna osa rotira oko tačke A .



9.3. Jezgro presjeka

Vidjeli smo da je neutralna osa skup tačaka u kojima je napon jednak nuli. Ona dijeli površinu poprečnog presjeka na dva dijela: u jednom dijelu su naponi zatezanja, a u drugom naponi pritiska (sl. 9:4). Neutralna osa se udaljuje od težišta poprečnog presjeka kada mu se napadna tačka približava, i obrnuto. Kada se napadna tačka sile toliko približi težištu da neutralna osa dodiruje presjek, onda je u dodirnoj tački napon nula, a u svim tačkama presjeka vlada napon istog znaka (sl. 9:7). Ako se napadna tačka sile još više približi težištu, neutralna osa je van poprečnog presjeka, pa je opet u svim tačkama poprečnog presjeka napon istog znaka. Skup napadnih tačaka sile čije neutralne ose tangiraju (obavijaju) konturu poprečnog presjeka grede ograničava malu površinu oko težišta poprečnog presjeka grede koju nazivamo jezgro presjeka. Dok god napadna tačka sile pada unutar jezgra, u svim tačkama presjeka vlada napon istog znaka. Čim je napadna tačka sile van jezgra, u jednom dijelu presjeka je zatezanje, a u drugom pritisak.

U tehničkoj praksi se često koriste ekscentrično pritisnuti stubovi izrađeni od materijala koji dobro podnose pritisak a veoma slabo zatezanje (na primjer beton, keramički materijali i sl.). U tom slučaju napadna tačka pritisne sile mora ležati unutar jezgra presjeka, kako bi sve tačke poprečnog presjeka stuba bile izložene na pritisak. Odredimo, na primjer, jezgro pravougaonog poprečnog presjeka dimenzija $b \times h$ (sl. 9:8). Neutralnoj osi $n_1 - n_1$ odgovara tačka $A_1(x_1, y_1)$ čije koordinate određujemo iz (9.2.4):



Sl. 9:8.

$$\frac{b^2}{12} = -\frac{b}{x_1}, \quad \frac{h^2}{12} = -\frac{h}{y_1}; \quad x_1 = -\frac{b}{6}, \quad y_1 = 0.$$

Neutralnoj osi $n_2 - n_2$ odgovara tačka $A_2(x_2, y_2)$ čije koordinate takođe određujemo iz (9.2.4):

$$\frac{b^2}{12} = -\frac{b}{x_2}, \quad \frac{h^2}{12} = -\frac{h}{y_2}; \quad x_2 = 0, \quad y_2 = -\frac{h}{6}.$$

Ako se napadna tačka sile pomjera po duži između tačaka A_1 i A_2 , neutralna osa rotira oko vrha pravougaonika (tačke P). Prema tome, duž A_1A_2 je jedna ivica jezgra. Preostale ivice se mogu direktno odrediti iz simetričnosti poprečnog presjeka, pa zaključujemo da je jezgro pravougaonika romb sa dijagonalama $\frac{b}{3}$ i $\frac{h}{3}$ (sl. 9:8). Dok god je kompresivna sila T_z unutar jezgra (tj. u šrafliranoj površini na sl. 9:8), sve tačke poprečnog presjeka (pravougaonika) biće napregnute na pritisak.

Jezgra ostalih poprečnih presjeka određuju se na isti način kao i za pravougaonik.

9.4. Dimenzionisanje ekscentrično pritisnute grede

Dimenzionisanje ekscentrično pritisnute grede vrši se iz zahtjeva da je:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{\max,+} &\leq \sigma_d^+ \\ |\sigma_{zz}^{\max,-}| &\leq \sigma_d^-\end{aligned}$$

gdje su σ_d^+ i σ_d^- dozvoljeni naponi na zatezanje i pritisak. Sa sl. 9:4 očigledno je da se ekstremne vrijednosti napona javljaju u tačkama najudaljenijim od neutralne ose poprečnog presjeka, pa su te tačke mjerodavne za dimenzionisanje.

Slično kao i kod kosog savijanja, u slučaju kada je poprečni presjek grede pravougaonik, I profil, Z profil i sl., kritične tačke su uvijek tačke u uglovima presjeka, pa se tada dimenzionisanju može direktno pristupiti i bez određivanja neutralne ose.

Primjeri:

Primjer 9.1.

Drveni stub pravougaonog poprečnog presjeka 15×20 cm opterećen je ekscentričnom silom pritiska od 90 kN koja djeluje u tački N (3,3 cm). Odrediti položaj neutralne ose, dijagram normalnih napona i dijagram raspodjele napona duž stranice BC pravougaonika.

Rješenje:

Neutralna osa je definisana jednačinom (9.2:3), koju možemo prepisati u obliku

$$\frac{x}{\frac{i_y^2}{e_x}} + \frac{y}{\frac{i_x^2}{e_y}} = 1,$$

tako da su odsječci neutralne ose na x i y osi:

$$a = -\frac{i_y^2}{e_x} = -\frac{b^2/12}{e_x} = -\frac{15^2}{12 \cdot 3} = -6,25 \text{ cm}$$

$$b = -\frac{i_x^2}{e_y} = -\frac{h^2/12}{e_y} = -\frac{20^2}{12 \cdot 3} = -11,1 \text{ cm}.$$

Napon je definisan izrazom (9.2:2)

$$\sigma_{zz} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_x}{i_y^2} x + \frac{e_y}{i_x^2} y \right),$$

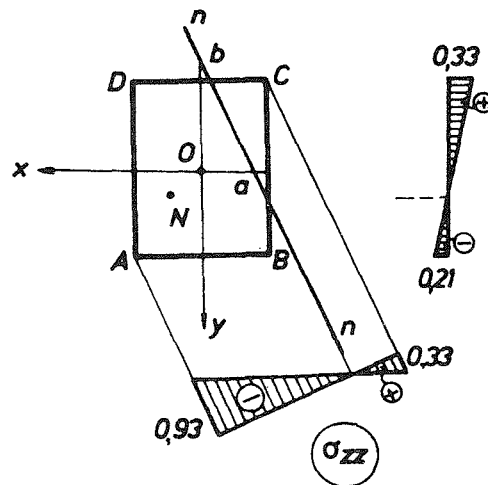
pa je

$$\sigma_{zz} = -\frac{90}{300} \left(1 + \frac{1}{6,25} x + \frac{1}{11,1} y \right).$$

Naponi u tačkama A i C su:

$$\sigma_{zz}^A = -\frac{90}{300} \left(1 + \frac{1}{6,25} \cdot 7,5 + \frac{1}{11,1} \cdot 10 \right) = -0,93 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

$$\sigma_{zz}^C = -\frac{90}{300} \left[1 + \frac{1}{6,25} (-7,5) + \frac{1}{11,1} (-10) \right] = 0,33 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$



Sl. P9.1.

Primjer 9.2.

Za poprečni presjek na sl. P9.2(a) odrediti položaj neutralne ose ako ekscentrična sila pritiska $F=100 \text{ kN}$ djeluje u tački A. Dimenzionisati nosač ako je $\sigma_d=16 \text{ kN/cm}^2$. Odrediti jezgro presjeka.

Rješenje:

Težište poprečnog presjeka je tačka C na udaljenju $\frac{11}{30} \delta$ od dna profila. Koordinate tačke A su $e_x = \frac{\delta}{6}$, $e_y = \frac{\delta}{30}$. Momenti inercije profila su: $I_x = 0,045 \delta^4$, $I_y = 0,036 \delta^4$, a površina profila $A = 0,56 \delta^2$. Prema tome je:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{0,045 \delta^4}{0,56 \delta^2} = 0,08 \delta^2, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{0,036 \delta^4}{0,56 \delta^2} = 0,054 \delta^2,$$

pa su odsjeci neutralne ose na x i y osi:

$$a = -\frac{i_y^2}{e_x} = -\frac{0,054 \delta^2}{\delta/6} = -0,324 \delta, \quad b = -\frac{i_x^2}{e_y} = -\frac{0,08 \delta^2}{\delta/30} = -2,4 \delta.$$

Normalni napon je

$$\sigma_{zz} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_x}{i_y^2} x + \frac{e_y}{i_x^2} y \right) = -\frac{100}{0,56\delta^2} \left(1 + \frac{1}{0,324\delta} x + \frac{1}{2,4\delta} y \right).$$

Maksimalni napon je u tački B (0,5 δ ; 0,37 δ):

$$\sigma_{zz}^{\max} = \sigma_{zz}^B = -\frac{100}{0,56\delta^2} \left(1 + \frac{1}{0,324\delta} 0,5\delta + \frac{1}{2,4\delta} 0,37\delta \right) = -\frac{481}{\delta^2}.$$

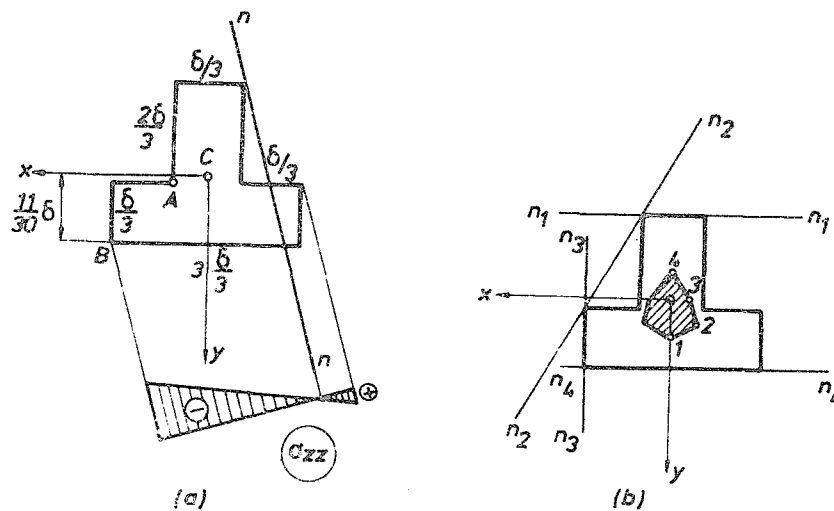
Dimenzionisanje vršimo iz zahtjeva $|\sigma_{zz}^{\max}| \leq \sigma_a$, odakle je:

$$\frac{481}{\delta^2} \leq 16, \quad \delta^2 \geq \frac{481}{16} = 30,1, \quad \delta \geq 5,49 \text{ cm.}$$

Jezgro presjeka određujemo kao što je pokazano u poglavlju 9.3. Sa sl. P 9.2(b) je očigledno:

$$\begin{aligned} n_1 - n_1: a = \infty, \quad b = -\frac{19}{30}\delta &\Rightarrow e_x = 0, \quad e_y = 0,13\delta \\ n_2 - n_2: a = 0,48\delta, \quad b = -0,97\delta &\Rightarrow e_x = -0,11\delta, \quad e_y = +0,08\delta \\ n_3 - n_3: a = 0,5\delta, \quad b = \infty &\Rightarrow e_x = -0,108\delta, \quad e_y = 0 \\ n_4 - n_4: a = \infty, \quad b = \frac{11}{30}\delta &\Rightarrow e_x = 0, \quad e_y = -0,23\delta, \end{aligned}$$

što definiše jezgro presjeka, koje je prikazano šrafrano na sl. P 9.2(b).



Sl. P 9.2.

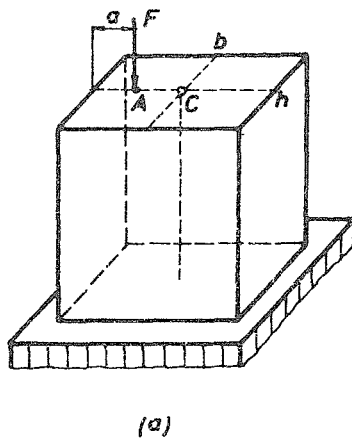
Primjer 9.3.

Stub na sl. P 9.3(a) opterećen je pritiskom silom $F = 35 \text{ MN}$ u tački A . Imajući u vidu da podloga na kojoj leži stub ne prenosi napon istežanja, odrediti raspodjelu normalnog napona u stubu.

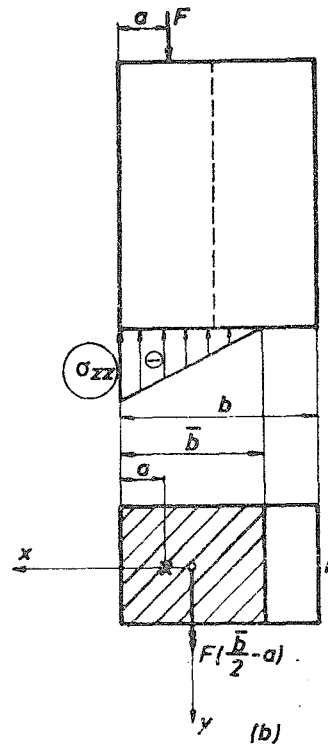
Rješenje:

S obzirom da podloga prihvata samo napon pritiska, dijagram napona izgledaće kao na sl. P 9.3(b), tj. biće

$$\sigma_{zz} = -\frac{F}{\bar{b}h} - \frac{F\left(\frac{\bar{b}}{2} - a\right)}{\frac{1}{12}h\bar{b}^3}x, \quad (a)$$



$b = 12 \text{ m}$
 $h = 8 \text{ m}$
 $a = 3 \text{ m}$



Sl. P 9.3.

gdje \bar{b} definiše dio presjeka koji prihvata opterećenje. Veličinu \bar{b} dobićemo iz uslova

$$\sigma_{zz}\left(x = -\frac{\bar{b}}{2}\right) = 0: -\frac{F}{\bar{b}h} - \frac{F\left(\frac{\bar{b}}{2} - a\right)}{\frac{1}{12}h\bar{b}^3}\left(-\frac{\bar{b}}{2}\right) = 0,$$

što daje $\bar{b} = 3a$. Zamjenom u (a) je sada

$$\sigma_{zz} = -\frac{F}{3ah} \left(1 + \frac{2x}{3a} \right), \quad (b)$$

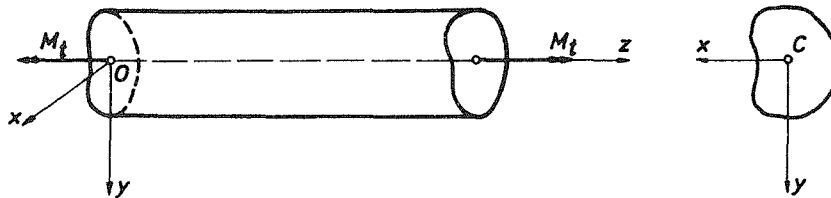
a ovo definiše traženu raspodjelu napona (sl. P 9.3(b)).
Maksimalni napon je

$$\sigma_{zz}^{\max} = \sigma_{zz} \left(x = \frac{3}{2}a \right) = -\frac{2F}{3ah} = -\frac{2 \cdot 35 \cdot 10^3}{3 \cdot 300 \cdot 800} = -0,097 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

10. TORZIJA GREDE

10.1. Torzija grede proizvoljnog punog poprečnog presjeka

Posmatrajmo prizmatičnu punu gredu opterećenu na krajevima ša dva jednaka a suprotna sprega torzije M_t . Ovi spregovi djeluju u ravni bazisa, tj. kao vektori su upravni na bazise (sl. 10:1). Bazisi (poprečni presjeci) su jednostruko



Sl. 10:1.

povezane oblasti, tj. puni, bez šupljina. Ovako opterećena greda je, kažemo, opterećena na torziju ili uvijanje. Naš zadatak je da odredimo napone i deformaciju koji se javljaju u gredi. Kao i ranije, koristimo se semi-inverznim metodom. S obzirom da nemamo aksijalnog naprezanja niti savijanja, jasno je da mora biti $\sigma_{zz}=0$. S obzirom da je bočna površina (omotač) grede slobodna od spoljašnjeg opterećenja, logično je takođe pretpostaviti da je $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0$. Prema tome, od svih komponenti tenzora napona pretpostavićemo da su samo dvije smičuće komponente σ_{zx} i σ_{zy} različite od nule, tj.:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma_{xy}=0 \quad (1)$$

$$\sigma_{zx} \neq 0, \quad \sigma_{zy} \neq 0.$$

Unošenjem pretpostavki (1) u Cauchyve jednačine ravnoteže (4.1:1) dobijamo:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}=0.$$

Iz prve dvije jednačine sistema (2) slijedi da σ_{zx} i σ_{zy} ne zavise od z , tj.:

$$\begin{aligned}\sigma_{zx} &= \sigma_{zx}(x, y) \\ \sigma_{zy} &= \sigma_{zy}(x, y).\end{aligned}\quad (3)$$

Treća jednačina sistema (2) biće zadovoljena ako uvedemo i definišemo funkciju $\varphi = \varphi(x, y)$ takvu da je:

$$\begin{aligned}\sigma_{zx} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \sigma_{zy} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.\end{aligned}\quad (4)$$

Evidentno je unošenjem (4) u treću jednačinu sistema (2) da je ona identički zadovoljena. Funkcija $\varphi = \varphi(x, y)$ naziva se (Prandtlova) funkcija napona.

Posmatrajmo, dalje, jednačine kompatibilnosti (4.3:3). Zamjenom pretpostavki (1) u ove jednačine vidimo da su sve identički zadovoljene, izuzev dvije koje glase:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{zy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zy}}{\partial y^2} &= 0,\end{aligned}\quad (5)$$

ili, s obzirom na uvedenu funkciju napona u (4):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Odavde slijedi da su jednačine kompatibilnosti zadovoljene ako je

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = H = \text{const.}\quad (6)$$

u svakoj tački poprečnog presjeka grede.

Ispitajmo sada granične uslove (4.1:2). Po bočnoj površini grede nema spoljašnjih sila, tj. $p_{nx} = p_{ny} = p_{nz} = 0$, pa je:

$$\begin{aligned}n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{xz} &= 0 \\ n_x \sigma_{yx} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{yz} &= 0 \\ n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} + n_z \sigma_{zz} &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

odakle, s obzirom na (1) i s obzirom da je na bočnoj površini prizmatičnog štapa $n_z = 0$, imamo da su prva dva uslova identički zadovoljena, dok treći daje

$$\begin{aligned}\text{tj.} \quad n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} &= 0, \\ n_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

No, sa sl. 10:2 je očigledno:

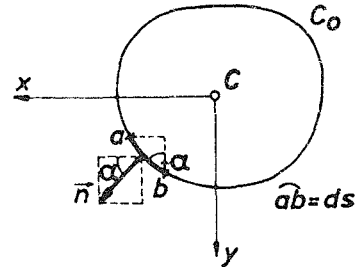
$$\begin{aligned} n_x &= \cos \alpha = \frac{dy}{ds} \\ n_y &= \cos \beta = -\frac{dx}{ds}, \end{aligned} \quad (9)$$

što zamjenom u (8) daje

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

tj.

$$\varphi = K_0 = \text{const.} \quad (10)$$



Sl. 10:2.

po konturi poprečnog presjeka.

Posmatrajmo sada granične uslove na bazisima. Rezultujuća sila na njima mora biti jednaka nuli, a rezultujući moment mora biti jednak momentu torzije M_t . Prema tome:

$$T_z = 0, \text{ jer je } \sigma_{zz} = 0$$

$$T_x = \int_A \sigma_{zx} dx dy = \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = - \oint_{C_0} \varphi dx = -K_0 \oint_{C_0} dx = 0$$

$$T_y = \int_A \sigma_{zy} dx dy = - \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = - \oint_{C_0} \varphi dy = -K_0 \oint_{C_0} dy = 0.$$

Pri ovome je korištena u prelasku sa površinskog na linijski integral Greenova formula

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_0} P dx + Q dy.$$

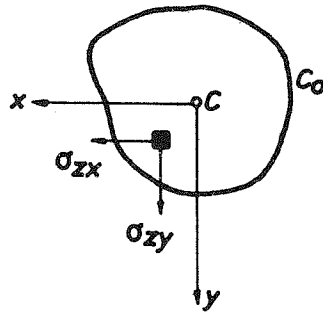
Nadalje je (sl. 10:3):

$$M_x = M_y = 0, \text{ jer je } \sigma_{zz} = 0$$

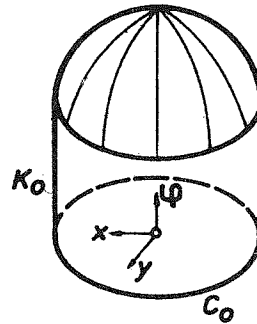
$$\begin{aligned} M_z &= \int_A (x \sigma_{zy} - y \sigma_{zx}) dx dy = - \int_A \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \int_A \left[2\varphi - \frac{\partial (x\varphi)}{\partial x} - \frac{\partial (y\varphi)}{\partial y} \right] dx dy = 2 \int_A \varphi dx dy - \oint_{C_0} [(-y\varphi) dx + (x\varphi) dy] = \\ &= 2 \int_A \varphi dA - 2K_0 A = M_t. \end{aligned}$$

Dakle, funkcija napona φ je povezana sa momentom torzije M_t preko izraza

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA - 2K_0 A. \quad (11)$$



Sl. 10:3.



Sl. 10:4.

Ovo ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju prikazanu na sl. 10:4. Dvostruka zapremina šrafirane kupole na sl. 10:4 jednaka je momentu torzije M_t . Očigledno je da se konstanta K_0 može uzeti proizvoljno jer dodavanje ili oduzimanje proizvoljne konstante funkciji φ ne utiče na napone koji su definisani kao prvi izvodi od φ . Najpogodnije je zato uzeti $K_0 = 0$, pa (11) postaje

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA. \quad (12)$$

Uslov (12) određuje veličinu konstante H u jednačini (6), kao što ćemo vidjeti u susretu sa konkretnim primjerima. Prema tome, jednačine ravnoteže su zadovoljene uvođenjem funkcije napona preko izraza (4). Jednačine kompatibilnosti su zadovoljene ako je funkcija napona rješenje Poissonove parcijalne diferencijalne jednačine (6). Granični uslovi po bočnoj površini grede su zadovoljeni ako je funkcija napona konstantna (na primjer, jednaka nuli) po konturi poprečnog presjeka (relacija (10)). Granični uslov po bazisima je zadovoljen pod uslovom da je integral od funkcije φ definisan sa (12), jednak momentu torzije M_t , što definiše vrijednost konstante H u (6). Dakle, rješenje problema torzije pune prizmatične grede svodi se na rješavanje (integraciju) Poissonove parcijalne diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = H \quad (13)$$

uz granični uslov da je

$$\varphi = 0 \quad (14)$$

u svakoj tački konture poprečnog presjeka. Ovo, naravno, uvijek ima jedinstveno rješenje, ali su matematičke teškoće njegovog nalaženja za komplikovanije konture poprečnog presjeka grede izuzetno velike. Analitička rješenja su zato moguća samo u određenim slučajevima, pa je neophodno koristiti numeričke ili eksperimentalne metode. No, recimo da smo uspjeli da riješimo konturni problem (13) sa (14), tj. da smo našli funkciju $\varphi = \varphi(x, y)$. Naponi onda direktno slijede iz (4), a komponentalne deformacije dobijamo iz Hookeovog zakona:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \varepsilon_{zy} &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} &= 0.\end{aligned}\tag{15}$$

Komponentalna pomjeranja dobijamo integracijom iz (15). Tako nalazimo da je:

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{H}{2G} zy \\ u_y &= -\frac{H}{2G} zx,\end{aligned}\tag{16}$$

pri čemu smo fiksirali tačku $(0, 0, 0)$ grede (tako da su pomjeranja i rotacije u njoj jednaki nuli), dok se komponenta pomjeranja $u_z = u_z(x, y)$ dobija nakon integracije iz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{H}{2G} y \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{H}{2G} x.\end{aligned}\tag{17}$$

Očigledno je iz (16) da pomjeraja u_x i u_y tačaka u proizvoljnom poprečnom presjeku grede $z = \text{const.}$ predstavljaju pomjeranja usljed čiste rotacije za ugao $\beta = -\frac{H}{2G} z$ (sl.

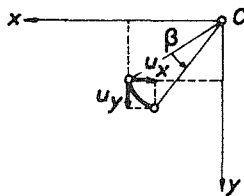
10:5). Veličina ovog ugla po jedinici dužine $\theta = \frac{\beta}{z} = -\frac{H}{2G}$ naziva se ugao torzije. Prema tome, fizičko značenje konstante H u jednačini (6) je

$$H = -2G\theta.\tag{18}$$

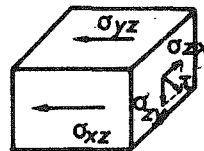
Jednačine (17) nakon integracije daju

$$u_z = u_z(x, y),\tag{19}$$

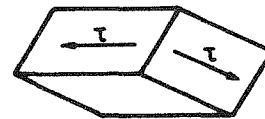
tj. tačke poprečnog presjeka, osim pomjeranja u ravni poprečnog presjeka definisanog sa (16), imaju i pomjeranja normalno na ravan poprečnog presjeka. Dakle, poprečni presjek grede ne ostaje ravan nakon deformacije, već se pretvara u zakrivljenu površ definisanu sa (19). Ovo je tzv. vitoperenje poprečnog presjeka.



Sl. 10:5.



(a)



(b)

Sl. 10:6.

Interesantno je na kraju prokomentarisati prirodu naponskog stanja u uvijeknoj gredi. Ako izdvojimo elementarni kvadar grede čije su ivice paralelne koordinatnim osama, naponi na stranama kvadra su kao na sl. 10:6(a). Ako, međutim, kvadar isiječemo tako da mu se jedna strana poklapa sa nenapregnutom ravni (sl. 10:6(b)), vidimo da je kvadar u stanju čistog smicanja sa smičućim naponom

$$\tau = \sqrt{\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}. \quad (20)$$

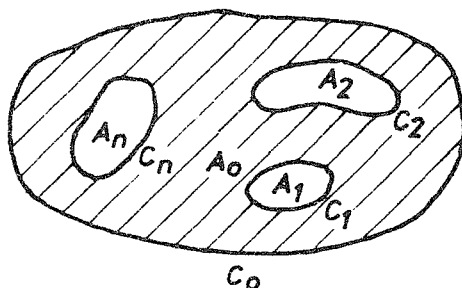
Glavni naponi su onda, kao što znamo,

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \equiv \tau = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}, \quad (21)$$

i djeluju u ravnima pod uglom od 45° u odnosu na ravni u kojima djeluje τ .

10.2. Torzija grede višestruko povezanog poprečnog presjeka

Posmatrajmo sada slučaj kada je poprečni presjek grede višestruko povezana oblast, na primjer kao na sl. 10:7. Bočna površina grede je, dakle, ograničena sa $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$, a ne samo sa C_0 kao prije, kod pune (jednostruko povezane) grede. Ponovo ćemo pretpostaviti da su samo $\sigma_{zx} \neq 0$ i $\sigma_{zy} \neq 0$, i da je:



Sl. 10:7.

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \sigma_{zy} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

čime su zadovoljene Cauchyve jednačine ravnoteže. Iz graničnog uslova na slobodnoj bočnoj površini slijedi da funkcija φ mora biti konstantna po konturama C_i , tj.

$$\varphi = K_i \quad \text{po } C_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Iz graničnog uslova na bazisima dalje slijedi da φ mora biti takvo da je

$$M_t = 2 \int_{A_0} \varphi dA - 2K_0 A_0 + \sum_{i=1}^n 2K_i A_i, \quad (3)$$

gdje je A_0 površina poprečnog presjeka grede, a A_i površine otvora ograničenih sa C_i ($i=1, 2, \dots, n$). Konstantu K_0 u (3) možemo, kao i prije, uzeti proizvoljno, najpogodnije jednaku nuli.

Još moramo da zadovoljimo uslove kompatibilnosti deformacija. Za višestruko povezane oblasti potrebni i dovoljni uslovi za kompatibilnost deformacija su šest ranije izvedenih jednačina kompatibilnosti (Saint-Venantovih (4.1:4) ili Beltrami-Michellovih (4.3:3)), i $3n$ integralnih jednačina oblika:

$$\begin{aligned} \oint_{C_i} du_x &= 0 \\ \oint_{C_i} du_y &= 0 \\ \oint_{C_i} du_z &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

gdje su C_i ($i=1, 2, \dots, n$) unutrašnje konture poprečnog presjeka grede.

Šest Beltrami-Michellovih jednačina kompatibilnosti daje, kao i u prethodnom poglavlju, da funkcija φ mora zadovoljiti Poissonovu jednačinu

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta. \quad (5)$$

Očigledno je da su prva dva uslova iz (4) identički zadovoljena, jer su u_x i u_y jednoznačne funkcije koordinata, dok treći uslov iz (4) daje

$$\oint_{C_i} \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy = 0,$$

odnosno, nakon zamjene izraza (10.1:17) i korišćenja Greenove formule,

$$\oint_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy = 2G\theta A_i. \quad (6)$$

No,

$$\begin{aligned} \oint_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy &= \oint_{C_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds = \\ &= \oint_{C_i} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(-\frac{dy}{dn} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{dx}{dn} \right) \right] ds = \oint_{C_i} \frac{d\varphi}{dn} ds, \end{aligned}$$

pa zamjenom u (6) imamo

$$\oint_{C_i} \frac{d\varphi}{dn} ds = 2G\theta A_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

gdje je ds element konture C_i , a n normala na konturu. Prema tome, kod višestruko povezanog poprečnog presjeka rješenje dobijamo rješavanjem Poissonove jednačine (5) uz granične uslove (2), pri čemu se moraju zadovoljiti uslovi (7), što definiše konstante K_i , dok je ugao torzije θ vezan sa momentom torzije M , preko izraza (3).

10.3. Torzija grede eliptičnog poprečnog presjeka

Kao prvi slučaj primjene izvedenih jednačina torzije grede, posmatrajmo gredu eliptičnog poprečnog presjeka čija je kontura C_0 (sl. 10:8) data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (1)$$

Da bismo našli napone i deformaciju u gredi, treba naći funkciju φ koja zadovoljava Poissonovu jednačinu (10.1:13) u svakoj tački unutrašnjosti elipse i koja na konturi zadovoljava granični uslov (10.1:14). Očigledno je da funkcija

$$\varphi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (2)$$

gdje je m konstanta, automatski zadovoljava konturni uslov (10.1:14). Unoseći (2) u (10.1:13) dobijamo

$$m = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} H, \quad (3)$$

pa je funkcija napona

$$\varphi = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} H \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (4)$$

Konstantu H određujemo iz uslova (10.1:12). Zamjenom (4) u (10.1:12) dobijamo nakon integracije

$$M_t = H \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{I_y}{a^2} + \frac{I_x}{b^2} - A \right),$$

gdje su $I_y = \int_A x^2 dA = \frac{\pi}{4} b a^3$ i $I_x = \int_A y^2 dA = \frac{\pi}{4} a b^3$ aksijalni momenti inercije elipse u odnosu na y i x osu, a $A = \int_A dx dy = \pi ab$ je površina elipse. Dakle,

$$M_t = H \frac{-\pi a^3 b^3}{2(a^2 + b^2)},$$

odakle je

$$H = -\frac{2M_t(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}. \quad (5)$$

Zamjenom (5) u (4) dobijamo

$$\varphi = -\frac{M_t}{\pi ab} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (6)$$

Naponi slijede prostim diferenciranjem:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2M_t}{\pi ab^3} y \quad (7)$$

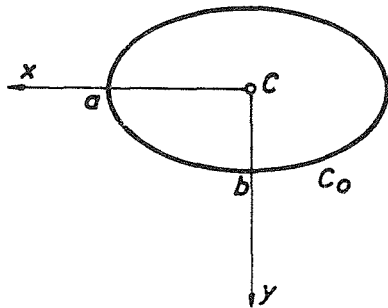
$$\sigma_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2M_t}{\pi a^3 b} x.$$

Očigledno je iz (7) da je odnos σ_{zx}/σ_{zy} proporcionalan sa odnosom y/x , tj.

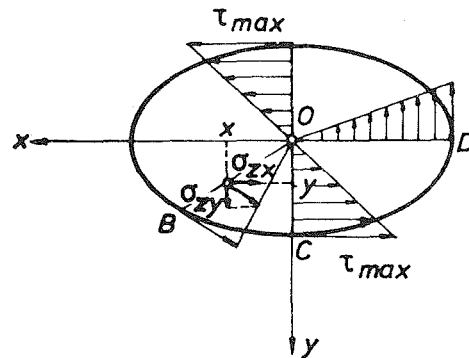
$$\frac{\sigma_{zx}}{\sigma_{zy}} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x},$$

što znači da rezultujući smičući napon uzduž bilo kojeg radijusa OB ima konstantan pravac koji se poklapa sa pravcem tangente na elipsu u tački B (sl. 10:9). Jasno je da je najveći napon na konturi, i to na krajevima manje ose elipse. On iznosi

$$\tau_{\max} = \sigma_{zx} (y = \pm b) = \mp \frac{2M_t}{\pi ab^2}. \quad (8)$$



Sl. 10:8.



Sl. 10:9.

Često se izraz (8) zapisuje u obliku

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (9)$$

gdje je

$$W_t = \frac{\pi ab^2}{2} \quad (10)$$

tzv. otporni moment pri torziji.

Ugao torzije koji odgovara momentu torzije M_t nalazimo iz (10.1:18), odakle je, s obzirom na (5),

$$\theta = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G}. \quad (11)$$

Faktor sa kojim dijelimo moment torzije da bismo dobili ugao torzije nazivamo torzionom krutošću. Iz (11) je ona, za eliptični poprečni presjek, očigledno jednaka

$$c = \frac{M_t}{\theta} = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} = \frac{G}{4\pi^2} \frac{A^4}{I_0}, \quad (12)$$

gdje je $I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)$ polarni moment inercije elipse.

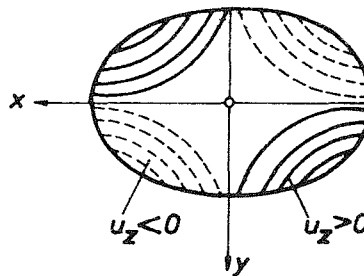
Nakon što smo odredili komponentalne napone (7), lako je naći iz Hookeovog zakona komponentalne deformacije:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2G} \sigma_{zx} = -\frac{M_t}{G\pi a b^3} y \\ \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{zy} = \frac{M_t}{G\pi a^3 b} x, \end{aligned} \quad (13)$$

odakle se integracijom dobijaju komponentalna pomjeranja:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{M_t (a^2 + b^2)}{G\pi a^3 b^3} zy \\ u_y &= \frac{M_t (a^2 + b^2)}{G\pi a^3 b^3} zx \\ u_z &= -\frac{M_t (a^2 - b^2)}{G\pi a^3 b^3} xy. \end{aligned} \quad (14)$$

Treća od jednačina (14) definiše vitoperenje poprečnog presjeka. Vidimo da su izohipse vitoperenja hiperbole $xy = \text{const.}$, što je prikazano na sl. 10:10.



Sl. 10:10:

Rješenje za gredu kružnog poprečnog presjeka može se lako dobiti iz rješenja za eliptični poprečni presjek stavljajući $a = b = R$. Dobijamo:

$$\sigma_{zx} = -\frac{2M_t}{\pi R^4} y, \quad \sigma_{zy} = \frac{2M_t}{\pi R^4} x$$

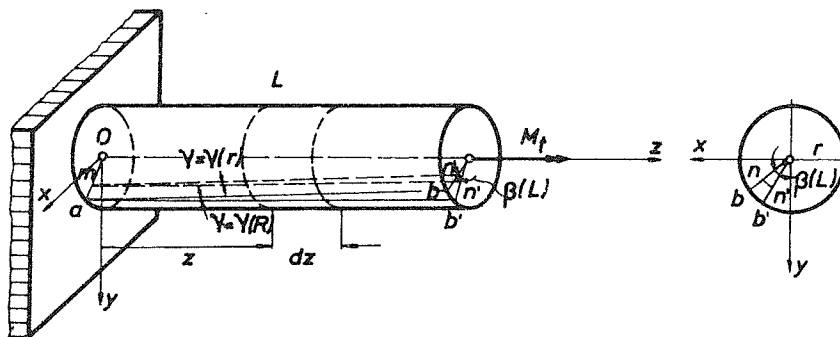
$$\tau = \sqrt{\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2} = \frac{2M_t}{\pi R^4} r = \frac{M_t}{I_0} r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_0} R, \quad \theta = \frac{M_t}{GI_0}$$

$$u_x = -\frac{M_t}{GI_0} zy, \quad u_y = \frac{M_t}{GI_0} zx, \quad u_z = 0.$$

10.4. Elementarna teorija torzije grede kružnog poprečnog presjeka

U prethodnom poglavlju dobili smo tačno rješenje problema torzije grede kružnog poprečnog presjeka kao specijalan slučaj torzije grede eliptičnog poprečnog presjeka, koji smo riješili polazeći od osnovnih jednačina teorije elastičnosti. Dobili smo izraze za smičući napon, ugao torzije i pomjeranja. Proizašlo je kao zaključak da prilikom deformacije nema vitoperenja kružnog poprečnog presjeka i da se poprečni presjeci prosto zaokrenu (zarotiraju) oko ose z za određeni ugao. Sada ćemo, međutim, naći rješenje problema torzije grede kružnog poprečnog presjeka na jedan više elementaran način, bez korišćenja jednačina elastičnosti, tj. na nivou elementarne otpornosti materijala. Dakle, posmatrajmo gredu kružnog poprečnog presjeka opterećenu na krajevima sa dva sprega torzije M_t . Neka je, na primjer, lijevi kraj grede ukliješten (sl. 10:11). Pod dejstvom momenta torzije M_t , doći će do



Sl. 10:11.

deformacije grede. Pretpostavićemo da poprečni presjeci grede prosto zarotiraju oko uzdužne ose grede ostajući i dalje kružni poprečni presjeci. Ako su deformacije male, tada se niti dužina grede l niti poluprečnik R poprečnog presjeka ne mijenjaju pri deformaciji. Ove pretpostavke slijede iz simetričnosti poprečnog presjeka kao i iz eksperimentalne evidencije. Dakle, pod dejstvom momenta M_t , desni kraj (poprečni

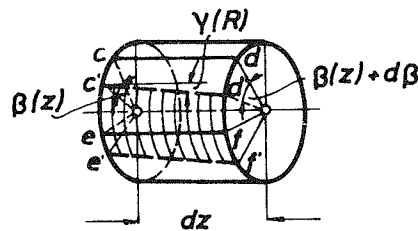
presjek) zarotira u odnosu na lijevi za ugao $\beta = \beta(l)$. Lijevi kraj je fiksiran, pa je $\beta(0) = 0$. Poprečni presjek na udaljenju z zarotira za ugao $\beta = \beta(z)$. Longitudinalno vlakno ab na spoljašnjoj površini grede istovremeno pređe u položaj ab' , tj. zarotira za ugao $\gamma = \gamma(R)$. Paralelno unutrašnje vlakno mn na udaljenju r od ose grede zarotira za ugao $\gamma = \gamma(r)$. Očigledno je sa sl. 10:11 da je:

$$l \cdot \gamma(R) = R \cdot \beta(l), \quad l \cdot \gamma(r) = r \cdot \beta(l), \quad (1)$$

tj.

$$\gamma(R) = R \frac{\beta(l)}{l}, \quad \gamma(r) = r \frac{\beta(l)}{l}. \quad (2)$$

Da vidimo, međutim, šta ugao γ predstavlja geometrijski (fizički). Uočimo i izdvojimo na nekom mjestu z disk dužine dz . Element površine $cdef$ pređe nakon deformacije u položaj $c'd'e'f'$ (sl. 10:12). Prvobitno pravi ugao $\sphericalangle(c'd, ce)$ smanjio se za ugao $\gamma(R)$, tj. prešao u ugao



Sl. 10:12.

$\sphericalangle(c'd', c'e') = \frac{\pi}{2} - \gamma(R)$. Dakle, γ predstavlja promjenu ugla između uzdužnog pravca (z) i poprečnog pravca (ϑ), tj. γ je dvostruko klizanje između pravaca z i ϑ : $\gamma = \gamma_{z\vartheta} = 2\varepsilon_{z\vartheta}$. Ista je interpretacija i za $\gamma = \gamma(r)$: ono predstavlja klizanje (smičuću deformaciju) na radijusu r . Iz Hookeovog zakona korespondentni smičući napon je

$$\sigma_{z\vartheta} = 2G\varepsilon_{z\vartheta} = G\gamma_{z\vartheta}, \quad (3)$$

pa je:

$$\begin{aligned} \sigma_{z\vartheta}(R) &= GR \frac{\beta(l)}{l} \\ \sigma_{z\vartheta}(r) &= Gr \frac{\beta(l)}{l}. \end{aligned} \quad (4)$$

Odnos $\frac{\beta(l)}{l} = \frac{d\beta}{dz} = \theta$ naziva se ugao torzije (uvijanja), pa (4) postaje:

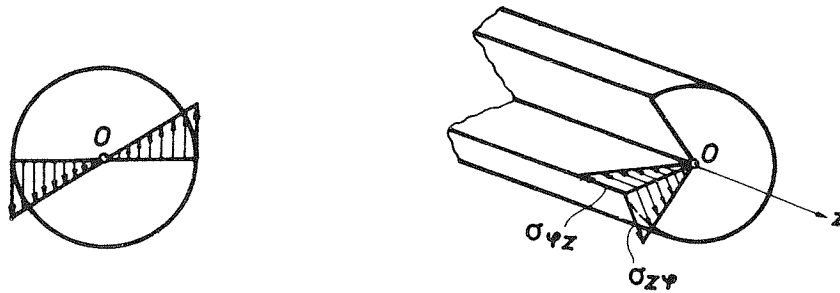
$$\begin{aligned} \sigma_{z\vartheta}(R) &= G\theta R \\ \sigma_{z\vartheta}(r) &= G\theta r. \end{aligned} \quad (5)$$

Dakle, smičući napon $\sigma_{z\vartheta}$ (koji ćemo dalje prosto označavati sa τ) je linearna funkcija od radijusa r (sl. 10:13), tj.

$$\tau = \tau(r) = G\theta r. \quad (6)$$

Maksimalni napon je naravno na konturi, za $r = R$, i iznosi

$$\tau_{\max} = \tau(R) = G\theta R. \quad (7)$$



Sl. 10:13.

Nadimo sada vezu između ugla torzije θ i momenta torzije M_t kojim je gređa opterećena. Tu vezu ćemo dobiti iz uslova ravnoteže da je dještvo smičućih napona τ u poprečnom presjeku gređe statički ekvivalentno dještvu momenta torzije M_t , tj.

$$\int_A r \tau dA = \int_A r \cdot G \theta r dA = M_t, \quad (8)$$

odakle je

$$\theta = \frac{M_t}{GI_0}, \quad (9)$$

gdje je $I_0 = \int_A r^2 dA = \frac{1}{2} \pi R^4$ polarni moment inercije kruga.

Unošenjem izraza (9) u izraz (6) dobijamo konačan izraz za napon

$$\tau = \frac{M_t}{I_0} r. \quad (10)$$

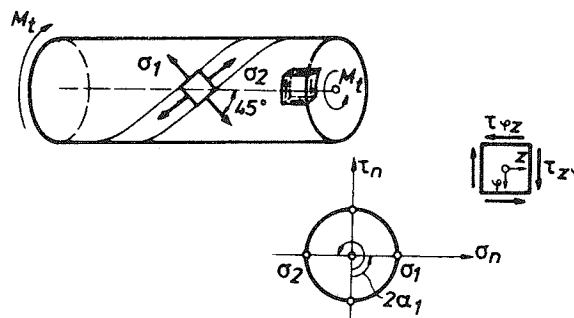
Iz (9) je takođe jasno da će poprečni presjek na udaljenju z od lijevog (ukliještenog) kraja gređe zarotirati za ugao

$$\beta(z) = z \theta = \frac{M_t z}{GI_0}, \quad (11)$$

tako da će desni kraj zarotirati u odnosu na lijevi za ugao

$$\beta(l) = l \theta = \frac{M_t l}{GI_0}. \quad (12)$$

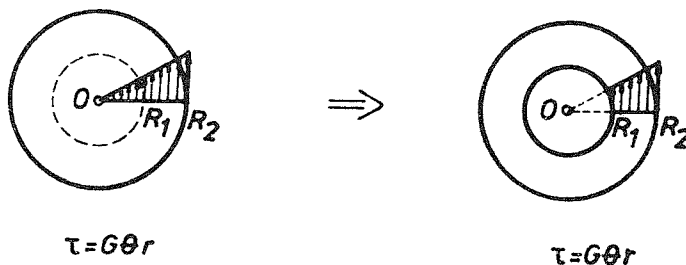
Na kraju, na sl. 10:14 prikazan je element gređe sa smičućim naponima koji djeluju na njemu, zatim element gređe na čijim stranama djeluju glavni naponi, a dat je takođe i Mohrov krug napona.



Sl. 10:14.

10.5. Torzija grede prstenastog poprečnog presjeka

Rješenje za ovaj slučaj možemo dobiti direktno iz rješenja za kružni poprečni presjek uočavajući ako iz cilindra kružnog poprečnog presjeka poluprečnika R_2 izdvojimo cilindar poluprečnika $R_1 < R_2$, raspodjela napona u dobijenom prstenastom cilindru ostaje ista (sl. 10:15). Dakle, za dati ugao torzije θ naponi u punom kružnom i prstenastom cilindru su isti. Naravno, korespondentni moment torzije je različit:



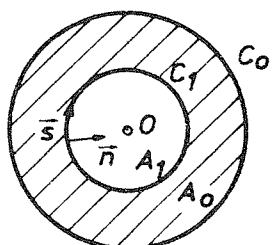
Sl. 10:15.

$$M_t^k = GI_0^k \theta = G\theta \frac{R_2^4 \pi}{2} \quad (1)$$

$$M_t^p = GI_0^p \theta = G\theta \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4).$$

Prema tome, moment torzije je manji kod prstenastog cilindra za dio koji kod punog cilindra nosi unutrašnji dio poluprečnika otvora.

Sada ćemo, međutim, riješiti ovaj problem iz početka da bismo ilustrirali primjenu jednačina iz poglavlja 10.2. Naime, prstenasti poprečni presjek je dvostruko povezana oblast (sl. 10:16), pa se, saglasno poglavlju 10.2, rješenje dobija iz jednačina:



Sl. 10:16.

$$\Delta\varphi = -2G\theta \quad (2)$$

$$\varphi(R_2) = 0 \quad (3)$$

$$\varphi(R_1) = K_1 \quad (4)$$

$$\oint \frac{d\varphi}{dn} ds = 2G\theta A_1 \quad (5)$$

$$M_t = 2 \int_{A_0} \varphi dA + 2K_1 A_1 \quad (6)$$

Logično je pretpostaviti da zbog centralne simetrije φ ne zavisi od polarnog ugla ϑ , pa je (u polarnim koordinatama)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr},$$

tako da se direktnom dvostrukom integracijom jednačine

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = -2G\theta \quad (7)$$

dobija

$$\varphi = -2G\theta \frac{r^2}{4} + B_1 \ln r + B_2. \quad (8)$$

Iz uslova (5) imamo, s obzirom da je na konturi C_1 : $\frac{d}{dn} = -\frac{d}{dr}$ i $ds = -R_1 d\vartheta$,

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{d\varphi}{dn} ds &= \int_0^{-2\pi} \left(-\frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=R_1} \cdot (-R_1 d\vartheta) = 2G\theta R_1^2 \pi - 2\pi B_1 = \\ &= 2G\theta R_1^2 \pi, \end{aligned} \quad (9)$$

što je zadovoljeno ako je $B_1 = 0$. Iz graničnog uslova (3) dalje slijedi da je $B_2 = 2G\theta \frac{R_2^2}{4}$, pa je

$$\varphi = -\frac{1}{2} G\theta (r^2 - R_2^2). \quad (10)$$

Iz graničnog uslova (4) je

$$-\frac{1}{2} G\theta = \frac{K_1}{R_1^2 - R_2^2}, \quad (11)$$

tako da (10) postaje

$$\varphi = \frac{K_1}{R_1^2 - R_2^2} (r^2 - R_2^2). \quad (12)$$

Najzad, koristeći (6) izražavamo K_1 preko M_t

$$K_1 = \frac{M_t}{\pi (R_1^2 + R_2^2)}, \quad (13)$$

što zamjenom u (12) daje

$$\varphi = \frac{M_t}{2I_0} (R_2^2 - r^2) \quad (14)$$

ili

$$\varphi = \frac{M_t}{2I_0} (R_2^2 - x^2 - y^2), \quad (15)$$

gdje je $I_0 = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$ polarni moment inercije kružnog prstena.

Naponi se sada dobijaju diferenciranjem:

$$\begin{aligned}\sigma_{zx} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{M_t}{I_0} y \\ \sigma_{zy} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{M_t}{I_0} x,\end{aligned}\tag{16}$$

tako da je rezultujući smičući napon

$$\tau = \sqrt{\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2} = \frac{M_t}{I_0} r.\tag{17}$$

Ugao torzije koji odgovara momentu torzije M_t dobija se unošenjem (13) u (11)

$$\theta = \frac{M_t}{GI_0}.\tag{18}$$

10.6. Membranska analogija

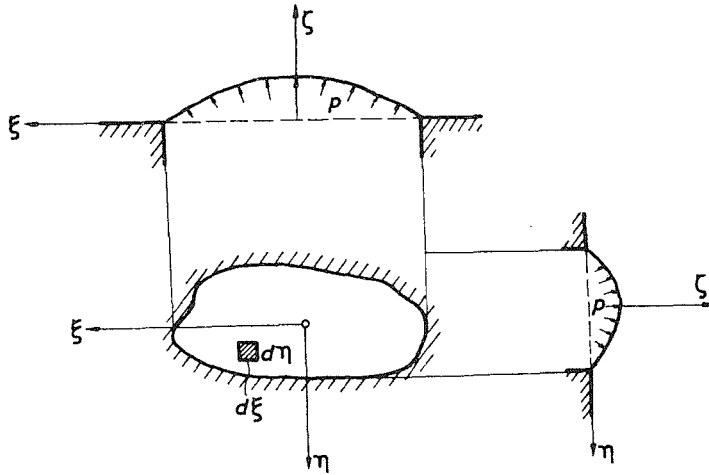
Pokazali smo da se rješenje problema torzije pune prizmatične grede svodi na rješavanje konturnog problema definisanog sa:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= -2G\theta && \text{unutar konture} \\ \varphi &= 0 && \text{na konturi,}\end{aligned}\tag{1}$$

pri čemu mora biti

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA,\tag{2}$$

što služi za nalaženje veze između ugla uvijanja θ i momenta torzije M_t . Međutim, rješavanje konturnog problema (1) za mnoge konture poprečnih presjeka grede sa matematičke tačke gledišta predstavlja ozbiljan problem. Iako za neke konture postoje egzaktna analitička rješenja (krug, elipsa, kružni prsten, pravougaonik, trougao, kružni isječak, razni poligoni itd.), za većinu kontura nije nađeno eksplicitno analitičko rješenje pogodno za direktnu upotrebu. Zato se najčešće pristupa numeričkom rješavanju (konačnim elementima ili konačnim razlikama), ili eksperimentalnim metodama, od kojih se mnoge zasnivaju na matematičkoj analogiji između jednačina koje opisuju problem torzije i jednačina koje opisuju neke druge fizičke pojave. Mi ćemo se zadržati na tzv. membranskoj analogiji, tj. analogiji koja postoji između problema torzije grede i ponašanja tanke elastične membrane pod dejstvom ravnomjernog pritiska. Dakle, neka je tanka homogena elastična membrana (na primjer od sapunice) formirana na otvoru istog oblika kao poprečni presjek grede, koji je isječen u krutoj ploči (sl. 10:17). Ako se zatim membrana optereti odozdo ravnomjernim pritiskom $p = \text{const.}$ (na primjer pumpanjem vazduha), ona će se deformisati i zauzeti položaj kao na sl. 10:17. Nađimo jednačinu deformisanog oblika membrane. U tom cilju izdvojimo mali element membrane $d\xi d\eta$, koji je u deformisanoj konfiguraciji prikazan na sl. 10:18. Na ivicama



Sl. 10:17.

elementa djeluje ravnomjerna zatezna sila (po jedinici dužine) S koja uravnotežava silu usljed pritiska p (po jedinici površine). Iz uslova ravnoteže da je suma svih sila u pravcu normale na deformisani element jednaka nuli, slijedi

$$2S \sin \frac{d\alpha}{2} R_2 d\beta + 2S \sin \frac{d\beta}{2} R_1 d\alpha - p R_1 d\alpha R_2 d\beta = 0,$$

odakle je, s obzirom da pretpostavljamo male deformacije membrane $\left(\sin \frac{d\alpha}{2} \cong \frac{d\alpha}{2}, \sin \frac{d\beta}{2} \cong \frac{d\beta}{2} \right)$,

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) S = p. \quad (3)$$

U (3), R_1 i R_2 su poluprečnici krivine ivica deformisanog elementa membrane. Međutim, za male deformacije je

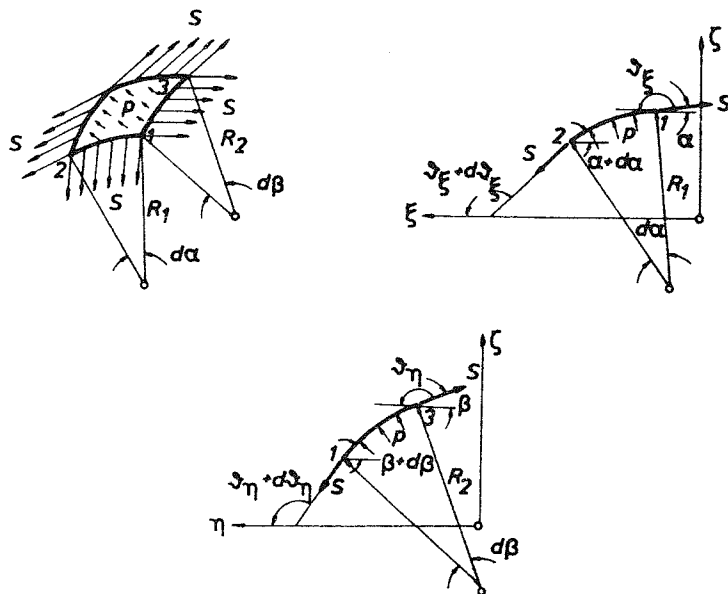
$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \operatorname{tg} \vartheta_\zeta = \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \cong -\alpha,$$

pa je

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} > 0$$

i

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{3/2}} \cong -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}.$$



Sl. 10:18.

Slično je

$$\frac{1}{R_2} \cong -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2},$$

što zamjenom u (3) daje diferencijalnu jednačinu deformisanog oblika membrane

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = -\frac{p}{S} \quad (4)$$

uz granični uslov da je na konturi

$$\zeta = 0. \quad (5)$$

Upoređujući (4) i (5) sa (1), vidimo da su problem torzije grede i naduvane membrane opisani istim jednačinama. Ako uvedemo koeficijent srazmjere

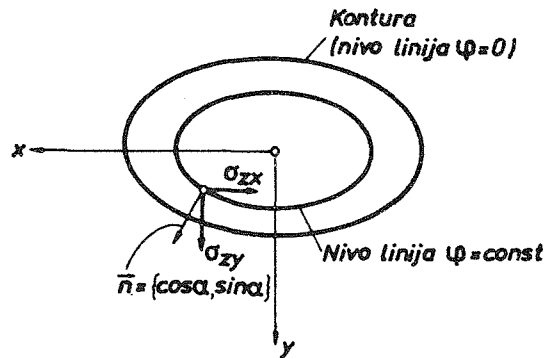
$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = L, \quad (6)$$

tada je očigledno

$$\varphi = L^2 \frac{2G\theta S}{p} \zeta, \quad (7)$$

pa mjerenjem ugiba membrane ζ (što je moguće raznim optičkim metodama), nalazimo iz (7) i vrijednosti funkcije napona φ . Naponi $\sigma_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ i $\sigma_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ biće u odgovarajućoj srazmjeri jednaki nagibima membrane u odnosu na η i ξ osu, respektivno, dok je moment torzije M_t srazmjeran zapremini ograničenoj membranom $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ i (ξ, η) ravni. Jasno je sada da je napon najveći na konturi, jer su tamo najveći nagibi membrane.

Definišimo sada tzv. nivo linije poprečnog presjeka. To su linije duž kojih je $\varphi = \text{const.}$, tj. $\zeta = \text{const.}$ u membranskoj analogiji (sl. 10:19). Uočimo proizvoljnu tačku na nivo linije $\varphi = \text{const.}$ i komponentalne napone σ_{zx} i σ_{zy} u njoj. Projektovanjem ovih komponenti na pravac normale na nivo liniju dobijamo



Sl. 10:19.

$$\sigma_{zn} = \sigma_{zy} \sin \alpha - (-\sigma_{zx}) \cos \alpha = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(-\frac{dx}{ds} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{dy}{ds} \right) = \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

tj. rezultujući smičući napon u svakoj tački nivo linije je u pravcu tangente na nivo liniju, i jednak je

$$\sigma_{zs} = \tau = \sigma_{zy} \cos \alpha + (-\sigma_{zx}) \sin \alpha = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dn} = -\frac{d\varphi}{dn}. \quad (8)$$

Zato se nivo linije zovu i linije smičućeg napona jer je napon tangentan na njih i jednak izvodu funkcije napona po normali na nivo liniju.

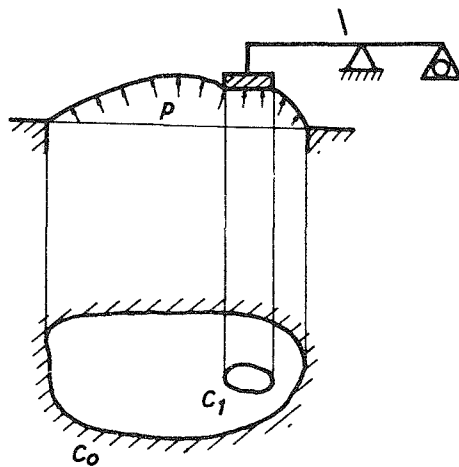
Da vidimo, na kraju, kakva je situacija sa membranskom analogijom u slučaju višestruko povezanog poprečnog presjeka grede. Biće sve isto, jedino treba postaviti barijeru na nekom nivou $\zeta = \text{const.}$ iznad otvora, koja obezbjeđuje konstantnost funkcije ζ po konturi otvora (sl. 10:20). Moment torzije je proporcionalan zapremini ispod membrane, dok se iz uslova

$$\oint_{c_1} \frac{d\varphi}{dn} ds = 2G\theta A_1$$

dobija

$$\oint_{c_1} S \frac{d\zeta}{dn} ds = p A_1,$$

što znači da barijera mora biti bez težine, tj. pritisak p po njoj odozdo, prihvata samo sila u membrani S .



Sl. 10:20.

10.7. Torzija grede pravougaonog poprečnog presjeka

Posmatrajmo gredu poprečnog presjeka u obliku pravougaonika dimenzija $2a \times 2b$ (sl. 10:21). Da bismo našli funkciju napona φ koja zadovoljava Poissonovu jednačinu (10.1:13) uz granični uslov (10.1:14), uvedimo prvo funkciju φ_1 takvu da je

$$\varphi = \varphi_1 - G\theta(x^2 - a^2). \quad (1)$$

Zamjenom (1) u (10.1:13) i (10.1:14) očigledno je da funkcija φ_1 mora zadovoljiti Laplaceovu jednačinu

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad (2)$$

uz granične uslove:

$$\varphi_1 = 0 \text{ na dijelu konture } x = \pm a \quad (3)$$

$$\varphi_1 = G\theta(x^2 - a^2) \text{ na dijelu konture } y = \pm b.$$

Dakle, uvođenjem funkcije φ_1 sveli smo problem na rješavanje homogene, Laplaceove parcijalne diferencijalne jednačine, umjesto nehomogene, Poissonove diferencijalne jednačine.

Cijena je, međutim, da smo ostali sa komplikovanijim graničnim uslovima (3) u odnosu na uslov (10.1:14). Ukupan ishod je, ipak, povoljan. Pri rješavanju homogene jednačine (2) sada možemo primijeniti metod razdvajanja promjenljivih, tj. pretpostaviti da je

$$\varphi_1 = X(x) \cdot Y(y), \quad (4)$$

što zamjenom u (2) daje

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{const} = -\alpha_n^2. \quad (5)$$

Oдавde je

$$\begin{aligned} X'' + \alpha_n^2 X &= 0 \\ Y'' - \alpha_n^2 Y &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

čijim rješavanjem dobijamo:

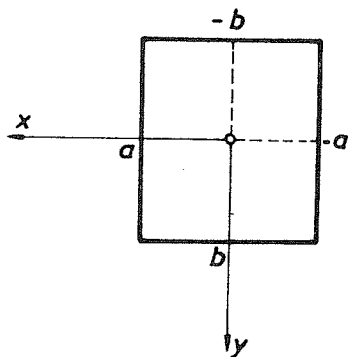
$$\begin{aligned} X &= A_n \cos \alpha_n x + B_n \sin \alpha_n x \\ Y &= C_n \text{ch } \alpha_n y + D_n \text{sh } \alpha_n y. \end{aligned} \quad (7)$$

Prema tome je

$$\varphi_1 = (A_n \cos \alpha_n x + B_n \sin \alpha_n x) (C_n \text{ch } \alpha_n y + D_n \text{sh } \alpha_n y). \quad (8)$$

No, diferencijalna jednačina (2) je linearna pa će i zbir rješenja (8) (za različite vrijednosti α_n) biti takođe rješenje te jednačine. Nama će trebati upravo takvo rješenje, tj.

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \alpha_n x + B_n \sin \alpha_n x) (C_n \text{ch } \alpha_n y + D_n \text{sh } \alpha_n y). \quad (9)$$



Sl. 10:21.

Međutim, zbog geometrije problema mi očekujemo da je:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \begin{cases} \text{parno po } x \\ \text{neparno po } y \end{cases}$$

$$\sigma_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - 2G\theta x = \begin{cases} \text{neparno po } x \\ \text{parno po } y, \end{cases}$$

odakle je lako zaključiti da konstante B_n i D_n u (9) moraju biti jednake nuli. Prema tome ostaje

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos \alpha_n x \operatorname{ch} \alpha_n y, \quad (10)$$

gdje smo sa E_n označili $E_n = A_n C_n$.

Iz graničnog uslova da je $\varphi_1 = 0$ za $x = \pm a$ dalje slijedi da mora biti

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

pa je

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} y. \quad (12)$$

Iz preostalog graničnog uslova (3) imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} b \cos \frac{(2n-1)\pi}{2a} x = G\theta (x^2 - a^2). \quad (13)$$

Funkcija na desnoj strani u (13) može biti razvijena u Fourierov red po kosinusima u granicama $|x| \leq a$:

$$G\theta (x^2 - a^2) = \frac{32G\theta}{\pi^3} a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}, \quad (14)$$

što zamjenom u (13) definiše vrijednosti konstanti E_n ,

$$E_n = \frac{32G\theta a^2 (-1)^n}{(2n-1)^3 \pi^3 \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} b}. \quad (15)$$

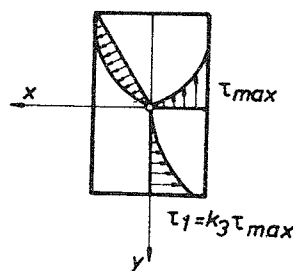
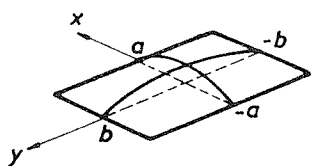
Prema tome je konačno

$$\varphi_1 = \frac{32G\theta}{\pi^3} a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} y. \quad (16)$$

Naponi su sada dati sa:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2G\theta \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi}{2a} y \quad (17)$$

$$\sigma_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2G\theta \left[x + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} y \right] \quad (18)$$



Sl. 10:22.

Redovi u (17) i (18) konvergiraju toliko brzo da je dovoljno uzeti samo nekoliko prvih članova pri sračunavanju vrijednosti za σ_{zx} i σ_{zy} . Najveći napon je, naravno, na konturi, i to na sredini duže stranice, jer je tamo najveći nagib membrane, tj. funkcije φ (sl. 10:22). Dakle, ako je $b > a$,

$$\tau_{\max} = \sigma_{zy}(x = \pm a, y = 0) = \pm 2G\theta \left[a - \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right], \quad (19)$$

tj. zadržavajući se, zbog brze konvergencije, samo na prvom članu reda,

$$\tau_{\max} = \pm 2G\theta \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a}} \right). \quad (20)$$

Za $b = a$ dobija se $\tau_{\max} = 1,35G\theta a$, za $b = 2a$ je $\tau_{\max} = 1,86G\theta a$ itd. Za veoma uski pravougaonik ($b \gg a$) dobijamo u limitu $\tau_{\max} = 2G\theta a$.

Da bismo našli vezu između ugla uvijanja θ i momenta torzije M_t , koristimo uslov

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b [\varphi_1 - G\theta(x^2 - a^2)] dx dy, \quad (21)$$

odakle integracijom slijedi

$$M_t = \frac{1}{3} G\theta (2a)^3 (2b) \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n-1)\pi}{2a} b \right]. \quad (22)$$

Red u (22) konvergira vrlo brzo i za svaki odnos b/a dovoljno je uzeti samo nekoliko prvih članova. Na primjer, ako se zadržimo samo na prvom članu, imamo

$$M_t = \frac{1}{3} G\theta (2a)^3 (2b) \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \operatorname{th} \frac{\pi b}{2a} \right). \quad (23)$$

Može se pokazati da je greška koja se pri ovome pravi manja od 0,5%. Za $b=a$ dobija se $M_t = 0,1406 G\theta (2a)^4$, za $b=2a$ je $M_t = 0,458 G\theta (2a)^4$, itd. Za veoma uski pravougaonik ($b \gg a$) dobijamo $M_t = 0,333 G\theta (2a)^3 (2b)$.

Iz dobijenih izraza za τ_{\max} i M_t za razne odnose b/a , možemo uočiti da je:

$$\tau_{\max} = k_1 \cdot 2G\theta a \quad (24)$$

$$M_t = k_2 \cdot G\theta (2a)^3 (2b), \quad (25)$$

gdje koeficijenti k_1 i k_2 zavise od odnosa b/a . Često se izrazi (24) i (25), po ugledu na kružni poprečni presjek, daju u obliku:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (26)$$

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad (27)$$

gdje je W_t tzv. otporni moment pri torziji, a I_t moment inercije pri torziji. Upoređujući sa (24) i (25) vidimo da je:

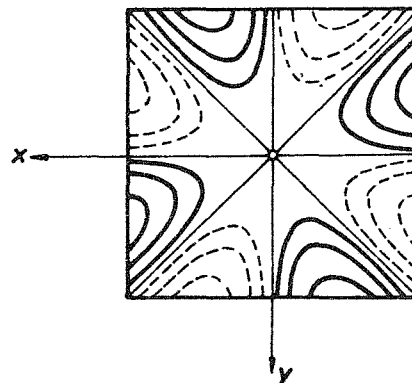
$$W_t = \frac{k_2}{k_1} (2a)^2 (2b) \quad (28)$$

$$I_t = k_2 (2a)^3 (2b).$$

Vrijednosti koeficijenata k_1 i k_2 , za razne odnose b/a , dati su u tabeli 10:1.

$\frac{b}{a}$	k_1	k_2	k_3
1	0,675	0,14	1
1,5	0,848	0,196	0,859
2	0,930	0,2285	0,795
3	0,985	0,2633	0,753
4	0,997	0,2808	0,745

Tabela 10:1.



Sl. 10:23.

Nakon što smo našli komponentalne napone definisane izrazima (17) i (18), lako je naći iz Hookeovog zakona komponentalne deformacije, a zatim integracijom i komponentalna pomjeranja. Na primjer, za vitoperenje poprečnog presjeka dobija se

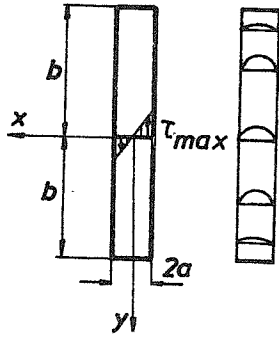
$$u_z = \theta \left[xy + \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi}{2a} y \right]. \quad (29)$$

Nivo linije $u_z = \text{const.}$ (tj. izohipse vitoperenja) za slučaj $a=b$ prikazane su na sl. 10:23.

10.8. Torzija grede otvorenog tankozidnog profila

Posmatrajmo pravougaoni poprečni presjek kod kog je $\frac{b}{a} \gg 1$, tj. veoma uski pravougaoni poprečni presjek, kakav je prikazan na sl. 10:24. Pri analizi torzije grede ovakvog poprečnog presjeka možemo koristiti izvedene opšte obrasce iz

prethodnog poglavlja, uprošćene zbog odnosa $\frac{b}{a} \gg 1$.



Sl. 10:24.

Međutim, problem torzije grede uskog pravougaonog poprečnog presjeka može se jednostavno riješiti ako se uoči aproksimacija da je, izuzev u okolini krajeva $y = \pm b$, funkcija napona φ cilindrična površ koja se ne mijenja sa y , tj. $\varphi \cong \varphi(x)$. Ovo slijedi iz membran-ske analogije jer bi razapeta membrana imala izgled kao što je prikazano na sl. 10:24. Dakle, umjesto Poissonove jednačine, funkciju napona aproksimativno uzimamo kao rješenje obične diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -2G\theta. \quad (1)$$

Integracijom jednačine (1) slijedi

$$\varphi = -G\theta(x^2 - a^2), \quad (2)$$

tj. funkcija φ je parabolična cilindrična površ. Upoređenjem sa egzaktnim rješenjem iz prethodnog poglavlja

$$\varphi = -G\theta(x^2 - a^2) + \frac{32G\theta}{\pi^3} a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2a} y, \quad (3)$$

vidimo da je dio funkcije φ dat sumom u tačnom izrazu (3) samo korekcija približnog rješenja (2), koja je bitna jedino u okolini krajeva $y = \pm b$.

Naponi slijede iz (2) diferenciranjem:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\sigma_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2G\theta x. \quad (5)$$

Vidimo da se σ_{zy} mijenja linearno sa x (sl. 10:24), pa je najveći napon za $x = \pm a$, i iznosi po apsolutnoj vrijednosti

$$\tau_{\max} = 2G\theta a. \quad (6)$$

Vežu između ugla uvijanja θ i momenta torzije M_t nalazimo iz uslova

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b -G\theta (x^2 - a^2) dx dy = \frac{16}{3} G\theta a^3 b, \quad (7)$$

odakle je

$$\theta = \frac{3M_t}{G(2a)^3(2b)}. \quad (8)$$

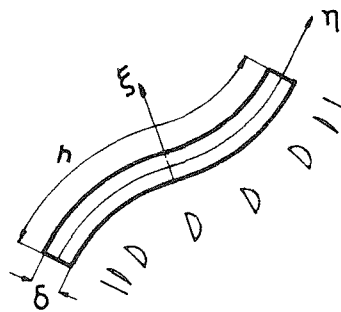
Zamjenom (8) u (6) maksimalni smičući napon možemo izraziti u obliku

$$\tau_{\max} = \frac{3}{8} \frac{M_t}{a^2 b}. \quad (9)$$

Interesantno je, međutim, uočiti da napon σ_{zy} dat sa (5) daje samo pola momenta izračunatog sa (7). Drugu polovinu daje napon σ_{xx} koji smo zanemarili zbog pretpostavke $\varphi = \varphi(x)$. Iako je komponenta napona σ_{xx} zanemarljiva, osim u okolini krajeva $y = \pm b$, i iako je $\sigma_{xx}^{\max} < \tau_{\max}$, ipak napon σ_{xx} doprinosi polovini momenta M_t , jer se množi pri sračunavanju momenta M_t sa velikim krakom (reda veličine b , što je znatno veće od kraka sa kojim se množi napon σ_{zy} , koji je najviše a) (sl. 10:25).



Sl. 10:25.



Sl. 10:26.

Dobijene izraze za uski pravougaonik možemo koristiti i za proizvoljan uski poprečni presjek (sl. 10:26), tzv. otvoreni tankozidni profil. Potrebno je samo uočiti

da se u ovom slučaju oblik membrane približno ne mijenja uzduž profila (tj. koordinate η), osim, naravno, u okolini krajeva, pa je $\varphi = \varphi(\xi)$, gdje je ξ normalno na η . Dakle, po ugledu na izraze (10.8:6) i (10.8:8), ovdje imamo:

$$\tau_{\max} = G\theta\delta \quad (10)$$

$$\theta = \frac{3M_t}{Gh\delta^3}, \quad (11)$$

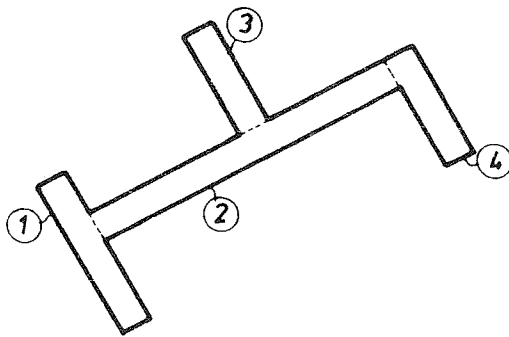
gdje je δ debljina profila, a h dužina uzdužne ose profila. Zamjenom (11) u (10) očigledno slijedi

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (12)$$

gdje je $W_t = \frac{1}{3}h\delta^2$ otporni moment pri torziji. Uvođeći moment inercije pri torziji

$I_t = \frac{1}{3}h\delta^3$, (11) možemo prepisati u obliku

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}. \quad (13)$$



Sl. 10:27.

Ako je u pitanju tankozidni profil sastavljen iz nekoliko dijelova, recimo kao na sl. 10:27, tada se ukupan moment torzije kojim je opterećen poprečni presjek raspodjeljuje na dijelove profila, tako da je

$$M_t = \sum_i M_{t,i}. \quad (14)$$

No, iz (11) je

$$M_{t,i} = \frac{1}{3}G\theta h_i\delta_i^3, \quad (15)$$

gdje je θ ugao torzije, pa zamjenom (15) u (14) dobijamo

$$M_t = G\theta \frac{1}{3} \sum_i h_i\delta_i^3. \quad (16)$$

Prema tome, moment inercije pri torziji u ovom slučaju je

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_i h_i\delta_i^3. \quad (17)$$

Maksimalni napon u pojedinim dijelovima profila dobijamo saglasno izrazu (10)

$$\tau_{\max,i} = G\theta \delta_i = \frac{M_t}{I_t} \delta_i, \quad (18)$$

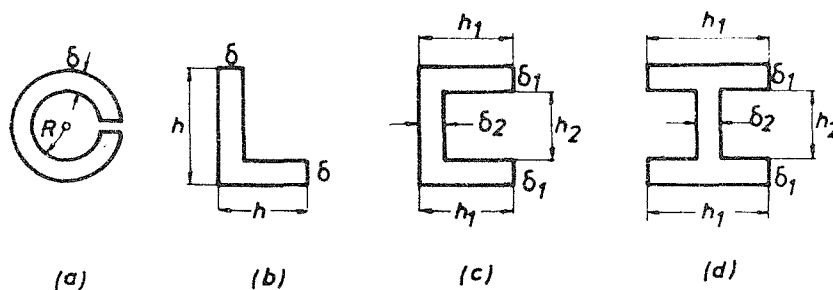
tako da je najveći napon u profilu

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_t} \delta_{\max}. \quad (19)$$

Prema tome, otporni moment pri torziji ovakvih profila je

$$W_t = \frac{I_t}{\delta_{\max}}. \quad (20)$$

Izvedene izraze (16)–(20) možemo koristiti kod raznih tankozidnih profila koji su često u upotrebi (sl. 10:28).



Sl. 10:28.

Na primjer, za profil na sl. 10:28(b) je:

$$I_t = \frac{1}{3} (2h - \delta) \delta^3, \quad W_t = \frac{I_t}{\delta},$$

dok je za profil na sl. 10:28(c):

$$I_t = \frac{1}{3} (2h_1 \delta_1^3 + h_2 \delta_2^3), \quad W_t = \frac{I_t}{\delta_{\max}}.$$

U samim uglovima, međutim, javlja se koncentracija napona, pa da bi se ona izbjegla (umanjila), vrši se zaobljivanje uglova (sl. 10:29). No, i dalje, u okolini uglova izvedeni obrasci ne važe, pa okoline uglova treba posebno analizirati, što je takođe moguće koristeći membransku analogiju, u šta se mi ovdje nećemo upuštati.



Sl. 10:29.

10.9. Torzija grede zatvorenog tankozidnog profila

Posmatrajmo sada gredu zatvorenog tankozidnog profila, recimo kao na sl. 10:30. Debljina zida je $\delta = \delta(s)$, gdje je s uzdužna koordinata profila. Naći tačno rješenje ovog problema bilo bi izuzetno teško. No, koristeći se membranskom analogijom, naći ćemo približno rješenje ovog problema koje je sasvim zadovoljavajuće za inženjerske potrebe. Naime, za tankozidni zatvoreni profil, tj. višestruko povezanu oblast (na sl. 10:30 u pitanju je dvostruko povezana oblast), funkcija φ , tj. membrana u eksperimentu sa sapunicom, imaće izgled kao što je prikazano na sl. 10:30. Na spoljašnjoj konturi C_0 je $\varphi = 0$, a na unutrašnjoj konturi C_1 je $\varphi = K_1 = \text{const.}$ Zbog male debljine zida δ možemo zanemariti promjenu nagiba membrane duž debljine zida, tj. uzeti da su AD i BD prave linije. Ovo je ekvivalentno pretpostavci da je smičući napon konstantan duž debljine zida. Zaista,

$$\sigma_{zs} = \tau = -\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{0 - K_1}{\delta} = \frac{K_1}{\delta}. \quad (1)$$

Dalje je iz (10.2:3)

$$M_t = 2 \int_{A_0} \varphi dA + 2K_1 A_1 \cong 2K_1 A, \quad (2)$$

gdje je A površina ograničena srednjom linijom profila (crtkano označeno na sl. 10:30). Iz (2) je

$$K_1 = \frac{M_t}{2A}, \quad (3)$$

što zamjenom u (1) daje izraz za napon

$$\tau(s) = \frac{M_t}{2\delta(s)A}. \quad (4)$$

Dakle, najveći napon je tamo gdje je najmanja debljina profila

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2\delta_{\min}A} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (5)$$

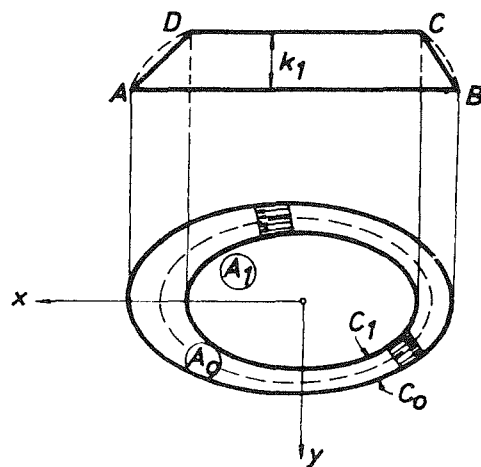
gdje je $W_t = 2\delta_{\min}A$ otporni moment pri torziji. Ako je $\delta = \text{const.}$, smičući napon je svuda isti. Iz (4) je takođe očigledno da je

$$f = \tau(s)\delta(s) = \frac{M_t}{2A} = \text{const.}$$

duž srednje linije profila. Veličina f naziva se tok smicanja.

Da bismo našli ugao torzije koji odgovara momentu M_t , koristimo preostali uslov da za višestruko povezanu oblast (vidjeti (10.2:7)) mora biti

$$\oint \frac{d\varphi}{dn} ds = 2G\theta A, \quad (6)$$



Sl. 10:30.

odakle je, s obzirom na (1) i (3),

$$\frac{M_t}{2A} \oint \frac{ds}{\delta(s)} = 2G\theta A,$$

tj.

$$\theta = \frac{M_t}{4GA^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)}. \quad (7)$$

Izraz (7) možemo prepisati u obliku

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad I_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}. \quad (8)$$

Obrasci (4) i (7) nazivaju se Bredtove formule.

Ako je debljina zida konstantna, tada je iz (7)

$$\theta = \frac{M_t s}{4GA^2 \delta}, \quad (9)$$

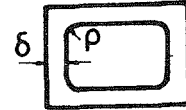
gdje je s dužina (obim) konture poprečnog presjeka.

Napominjemo da smo u gornjem izvođenju pretpostavljali da je debljina profila znatno manja od radijusa krivine profila na svakom mjestu profila. Ako to nije slučaj (sl. 10:31), onda imamo znatnu koncentraciju napona, što zahtijeva posebnu analizu.



$$\delta \sim \rho$$

Sl. 10:31.



10.10. Deformacioni rad pri torziji

Specifični deformacioni rad grede uvijene spregovima M_t je

$$\mathcal{A}^* = \sigma_{zx}\epsilon_{zx} + \sigma_{zy}\epsilon_{zy} = \frac{1}{2G} (\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2) = \frac{1}{2G} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (1)$$

a ukupan deformacioni rad

$$\mathcal{A} = \int_V \mathcal{A}^* dV = \frac{l}{2G} \int_A \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dA. \quad (2)$$

S druge strane, ako sa $\beta = l\theta$, gdje je θ specifični ugao torzije, označimo rotaciju jednog bazisa grede u odnosu na drugi usljed spregova M_t , deformacioni rad možemo izraziti u obliku

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} M_t \beta = \frac{l}{2} M_t \theta. \quad (3)$$

Vidjeli smo, dalje, da je zbog linearnosti problema ugao torzije proporcionalan momentu torzije, tj.

$$\theta = \frac{1}{c} M_t = \frac{1}{GI_t} M_t, \quad (4)$$

gdje je $c = GI_t$, tzv. torziona krutost (jednaka proizvodu modula klizanja G i momenta inercije pri torziji I_t , koji zavisi od oblika poprečnog presjeka kao što je prikazano u tabeli 10:2). Zamjenom (4) u (3) deformacioni rad možemo izraziti u sljedećem obliku:

$$\mathcal{A}(M_t) = \frac{M_t^2 l}{2GI_t} \quad (5)$$

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{1}{2} l GI_t \theta^2. \quad (6)$$







Oblik poprečnog presjeka	I_t	W_t
Elipsa 	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi a b^2}{2}$
Krug 	$\frac{\pi R^4}{2}$	$\frac{\pi R^3}{2}$
Kružni prsten 	$\frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$	$\frac{\pi}{2} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2}$
Pravougaonik 	$k_2 (2a)^3 (2b)$	$\frac{k_2}{k_1} (2a)^2 (2b)$
Tankozidni otvoreni profil 	$\frac{h \delta^3}{3}$	$\frac{I_t}{\delta_{max}}$
Tankozidni zatvoreni profil 	$\frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}$	$2\delta_{min} A$

Tabela 10:2.

Očigledno je sada:

$$\frac{\partial \mathcal{A}(M_t)}{\partial M_t} = \frac{M_t l}{GI_t} = \theta l = \beta \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}(\theta)}{\partial \theta} = l G I_t \theta = l M_t, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial \mathcal{A}(\beta)}{\partial \beta} = M_t, \quad (8)$$

što predstavlja Castiglianove stavove pri torziji.

Pokažimo sada kako se koristeći izraze za deformacioni rad pri torziji može izvesti izraz za I_t tankozidnog zatvorenog profila. Specifični deformacioni rad je $\mathcal{A}^* = \frac{1}{2G} \tau^2$, gdje je $\tau = \frac{M_t}{2\delta A}$ ranije izvedeni izraz za napon kod tankozidnog zatvorenog profila. Ukupan deformacioni rad je

$$\mathcal{A} = \int_0^l \oint \frac{1}{2G} \tau^2 \delta ds dz = \frac{M_t^2 l}{8GA^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)}. \quad (9)$$

Izjednačujući (9) sa (3) sada dobijamo

$$\frac{1}{2} M_t \theta l = \frac{M_t^2 l}{8GA^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)},$$

odakle je

$$\theta = \frac{M_t}{4GA^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)},$$

odnosno

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}.$$

10.11. Rješavanje problema torzije grede pomoću metode deformacionog rada

Vidjeli smo da se rješenje problema torzije svodi na određivanje funkcije napona φ rješavanjem Poissonove diferencijalne jednačine uz odgovarajući konturni uslov. Zbog matematičkih teškoća rješavanja ovog problema određivanje funkcije φ često se vrši približno, i to na bazi teoreme o minimumu komplementarne energije (vidjeti poglavlje 5.4) po kojoj, od svih statički dopuštenih naponskih stanja, stvarno rješenje je ono koje čini komplementarnu energiju minimalnom, tj. za koje je $\delta I_c = 0$, gdje je

$$I_c = \int_V \mathcal{A}^*(\sigma) dV - \int_{S_u} \vec{p}_n \cdot \vec{u} ds. \quad (1)$$

Kod torzije grede spregovima M_t na bazisima je:

$$\mathcal{A}^*(\sigma) = \frac{1}{2G} (\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2) = \frac{1}{2G} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\int_{S_u} \vec{p}_n \cdot \vec{u} dS = M_t \theta l = 2 \left(\int_A \varphi dA \right) \theta l, \quad (3)$$

pa je

$$I_c = \frac{l}{G} \int_A \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta \varphi \right\} dA. \quad (4)$$

Dakle, tačan izraz za funkciju napona $\varphi = \varphi(x, y)$ je onaj koji čini minimalnim integral

$$I = \int_A \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta \varphi \right\} dA. \quad (5)$$

U konkretnom rješavanju problema funkciju φ obično pretpostavljamo u obliku reda

$$\varphi = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots, \quad (6)$$

gdje funkcije $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ zadovoljavaju granični uslov da su jednake nuli na konturi, a izabrane su pogodno na bazi membranske analogije. Konstante a_0, a_1, a_2, \dots određujemo iz uslova minimuma integrala (5), tj. iz:

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0, \dots \quad (7)$$

Sistem jednačina (7) predstavlja sistem linearnih jednačina po koeficijentima a_0, a_1, a_2, \dots čijim rješavanjem određujemo te koeficijente. Teorijski, ako bismo uzeli beskonačno mnogo članova reda u (6), dobili bismo tačno rješenje za φ . No, u praktičnim primjenama uzimamo samo nekoliko članova, pa tako dobijamo približno rješenje, tj. približan izraz za funkciju φ . Naravno da povećanje broja članova reda (6) povećava i tačnost rješenja.

Posmatrajmo, na primjer, pravougaoni presjek sa konturom $x = \pm a, y = \pm b$. Kako je funkcija $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$ jednaka nuli na konturi, red (6) možemo uzeti u obliku

$$\varphi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \sum_m \sum_n a_{mn} x^m y^n, \quad (8)$$

gdje, zbog simetrije, m i n moraju biti parni. Uzimajući samo prvi član reda (8), imamo za kvadrat ($a=b$)

$$\varphi = a_0 (x^2 - a^2)(y^2 - a^2), \quad (9)$$

gdje a_0 dobijamo iz uslova

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 0, \quad a_0 = \frac{5}{8} \frac{G\theta}{a^2}. \quad (10)$$

Odgovarajući moment torzije je $M_t = 2 \int_A \varphi dA = 0,1388 (2a)^4 G\theta$, što je za 1,33% manje od tačne vrijednosti.

Ako bismo uzeli dva prva člana reda, tj.

$$\varphi = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)[a_0 + a_1(x^2 + y^2)], \quad (11)$$

dobijamo $a_0 = 0,5844 \frac{G\theta}{a^2}$, $a_1 = 0,1185 \frac{G\theta}{a^4}$, tako da je $M_t = 0,1404 G\theta (2a)^4$, što je za svega 0,15% manje od tačne vrijednosti. Za maksimalni smičući napon; dobijaju se rezultati sa nešto većom greškom (oko 4% za dva člana reda).

Opisani približni postupak određivanja funkcije φ naziva se Ritzov postupak.

10.12. Dimenzionisanje grede pri torziji

Dimenzionisanje grede opterećene na torziju vrši se iz zahtjeva

$$\tau_{\max} \leq \tau_d, \quad (1)$$

gdje je $\tau_d = \sigma_d$ po I hipotezi, $\tau_d = \frac{1}{1+\nu} \sigma_d$ po II, $\tau_d = \frac{1}{2} \sigma_d$ po III i $\tau_d = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_d$ po IV hipotezi, pri čemu smo sa σ_d označili dozvoljeni napon materijala u testu istezanja. Za žilave materijale (metale) koristimo, naravno, ili III ili IV hipotezu.

Kako je

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (2)$$

mora biti

$$\frac{M_t}{W_t} \leq \tau_d, \quad (3)$$

što definiše potrebne dimenzije za dati moment, ili maksimalni moment za date dimenzije poprečnog presjeka. W_t je otporni moment pri torziji koji je dat u tabeli 10:2 za razne oblike poprečnog presjeka grede.

Ukoliko se dimenzionisanje vrši prema dozvoljenom uglu rotacije, tada mora biti

$$\beta_{\max} \leq \beta_d, \quad (4)$$

tj.

$$\frac{M_t l}{GI_t} \leq \beta_d, \quad (5)$$

gdje je I_t moment inercije pri torziji, koji je takođe dat u tabeli 10:2 za karakteristične oblike poprečnog presjeka grede.

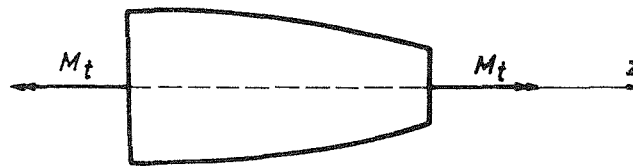
10.13. Dodatne napomene o torziji

Pri proučavanju problema torzije smatrali smo da je greda (štap) prizmatičnog oblika, tj. da joj se poprečni presjek ne mijenja duž uzdužne ose. Dva sprega M_t koji djeluju na krajevima grede izazivaju, kao što smo vidjeli, smičuće napone σ_{xx} i σ_{zy} , dok su ostale komponente napona identički jednake nuli. Korespondentna pomjeranja predstavljaju čistu rotaciju poprečnog presjeka prućenu sa vitoperenjem poprečnog presjeka.

Ako je, međutim, neprizmatična greda (tj. greda promjenjivog poprečnog presjeka) opterećena na torziju sa dva sprega na krajevima (sl. 10:32), tada je naponsko i deformaciono stanje znatno složenije nego kod prizmatične grede. Može se pokazati (u šta se mi ovdje nećemo upuštati) da su u slučaju kružnog presjeka sve komponente napona, izuzev σ_{zz} , različite od nule (u Descartesovom koordinatnom sistemu). Korespondentna pomjeranja u ravni poprečnih presjeka ne daju čistu rotaciju poprečnog presjeka, kao kod prizmatične grede, već se javlja i deformacija u ravni poprečnih presjeka. No, ukoliko je promjena poprečnog presjeka grede po njenoj dužini postepena, tada se sa dovoljno tačnosti može uzeti da je maksimalni napon u gredi jednak

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t^{\min}}, \quad (1)$$

tj. dat je istim izrazom kao i kod prizmatičnih greda, s tim što se torzioni otporni moment $W_t = W_t(z)$ mijenja sa z , pa treba uzeti minimalno W_t (koje naravno odgovara najužem mjestu grede).



Sl. 10:32.

Ranije smo vidjeli da se za prizmatične grede ugao torzije može izraziti u obliku

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad (2)$$

što je konstantno duž cijele grede. Za neprizmatičnu gredu definisaćemo ugao torzije sa

$$\theta(z) = \frac{M_t}{GI_t(z)}, \quad (3)$$

tako da će se dva presjeka na udaljenju l približno zaokrenuti jedan u odnosu na drugi za

$$\beta = \int_0^l \theta(z) dz = \int_0^l \frac{M_t dz}{GI_t(z)} = \frac{M_t}{G} \int_0^l \frac{dz}{I_t(z)}. \quad (4)$$

Napominjemo, međutim, da se kod neprizmatičnih greda sa naglim promjenama poprečnog presjeka (sl. 10:33) javljaju veliki lokalni naponi u okolini mjesta prelaza ($m - m$ na sl. 10:33), što predstavlja koncentraciju napona na tim mjestima. Teorijsko određivanje najvećeg napona na mjestima nagle promjene poprečnog

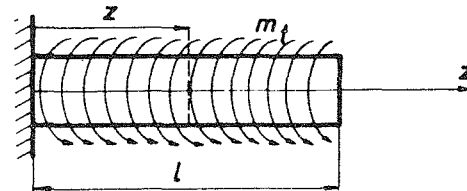
presjeka je izuzetno složen problem, pa se najčešće pribjegava eksperimentalnim i numeričkim metodama. U inženjerskim proračunima uticaj koncentracije napona uzima se u obzir prilikom dimenzionisanja povećavanjem koeficijenta sigurnosti.



Sl. 10:33.

U dosadašnjem razmatranju torzije grede torzija je uvijek bila izazvana sa dva sprega koji djeluju na krajevima grede, dok je bočna površina grede slobodna. Moguće je, međutim, u nekim problemima imati slučaj da je torzija izazvana raspoređenim momentom po bočnoj površini, na primjer kao na sl. 10:34. To, naravno, predstavlja novi problem. Može se pokazati (u što nećemo ulaziti) da se u slučaju kružnog presjeka javlja (u Descartesovom koordinatnom sistemu) pet komponenti tenzora napona različitih od nule, dok je samo $\sigma_{zz} = 0$, što je sasvim različito od slučaja čiste torzije sa dva koncentrisana sprega na krajevima, gdje je jedino $\sigma_{zx} \neq 0$ i $\sigma_{zy} \neq 0$. No, ako je greda dovoljno dugačka, tada se sa prihvatljivom tačnošću za inženjerske potrebe može uzeti da je

$$\tau_{\max} = \frac{M_t^{\max}}{W_t}, \quad (5)$$



Sl. 10:34.

gdje je M_t^{\max} maksimalni moment torzije koji se javlja u gredi, s obzirom da je $M_t = M_t(z)$.

Ni ovdje, kao ni u slučaju grede promjenljivog poprečnog presjeka, pomjeranja u ravni poprečnog presjeka ne daju čistu rotaciju poprečnog presjeka. Ipak, definišemo ugao torzije sa

$$\theta(z) = \frac{M_t(z)}{GI_t}, \quad (6)$$

tako da je relativno okretanje dva poprečna presjeka na udaljenju l približno jednako

$$\beta = \int_0^l \frac{M_t(z) dz}{GI_t} = \frac{1}{GI_t} \int_0^l M_t(z) dz. \quad (7)$$

Ako je u pitanju torzija neprizmatične grede distribuiranim momentom po bočnoj površini, tada je

$$\theta(z) = \frac{M_t(z)}{GI_t(z)}, \quad (8)$$

odnosno

$$\beta = \int_0^l \frac{M_t(z) dz}{GI_t(z)}. \quad (9)$$

Deformacioni rad u ovom slučaju jednak je

$$\mathcal{A} = \int_0^l \frac{M_t^2(z) dz}{2GI_t(z)}. \quad (10)$$

Ugao rotacije β na nekom mjestu nosača gdje djeluje koncentrisani spreg torzije \mathfrak{M}_t , možemo odrediti pomoću Castiglianovog stava

$$\beta = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathfrak{M}_t} = \int_0^l \frac{M_t(z) \frac{\partial M_t(z)}{\partial \mathfrak{M}_t}}{GI_t(z)} dz = \int_0^l \frac{M_t(z) \overline{M}_t(z)}{GI_t(z)} dz, \quad (11)$$

gdje je $\overline{M}_t(z) = \frac{\partial M_t(z)}{\partial \mathfrak{M}_t}$ momentna raspodjela usljed jediničnog momenta $\mathfrak{M}_t = 1$ na mjestu gdje se traži rotacija poprečnog presjeka.

U primjerima koji slijede ilustrovaćemo primjenu izvedenih obrazaca za torziju grede. Akcenat je dat na određivanju maksimalnog smičućeg napona i ugla uvijanja greda različitog poprečnog presjeka, kao i na rješavanju statički neodređenih grednih nosača opterećenih na torziju.

Primjeri:

Primjer 10.1.

Za presjek u obliku jednakostraničnog trougla visine a (sl. P 10.1 (a)) funkcija napona je

$$\varphi = -G\theta \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27}a^2 \right].$$

Odrediti napone i nacrtati raspodjelu napona σ_{zy} duž x ose. Izračunati torzionu krutost.

Rješenje:

Saglasno izrazima (10.1:4) je:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -G\theta y \left(1 + \frac{3}{a}x \right)$$

$$\sigma_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = G\theta \left[x - \frac{3}{2a}(x^2 - y^2) \right].$$

Napon σ_{zy} duž x ose je

$$\sigma_{zy}(y=0) = G\theta \left(x - \frac{3}{2a} x^2 \right),$$

što je skicirano na sl. P 10.1(b).

Moment torzije dobijamo prema izrazu (10.1:12)

$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int_A \varphi dA = -2G\theta \int_A \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27}a^2 \right] dA = \\ &= G\theta \frac{a^4}{15\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

odakle je torziona krutost

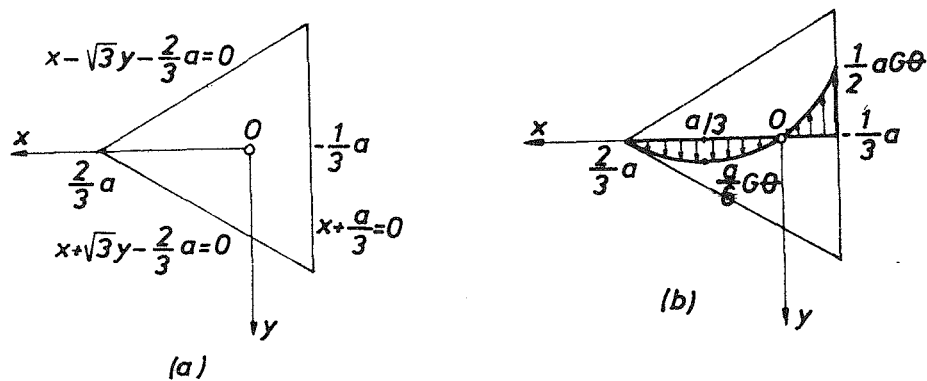
$$c = \frac{M_t}{\theta} = G \frac{a^4}{15\sqrt{3}}, \quad I_t = \frac{a^4}{15\sqrt{3}}.$$

Maksimalni smičući napon je (sl. P 10.1(b))

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} G\theta a = \frac{M_t}{\frac{2a^3}{15\sqrt{3}}}$$

pa je otporni moment

$$W_t = \frac{2a^3}{15\sqrt{3}}.$$



Sl. P 10.1.

Primjer 10.2.

a) Pokazati da za isti ugao torzije θ eliptični poprečni presjek ima veći maksimalni smičući napon nego kružni poprečni presjek poluprečnika jednakog manjoj poluosi elipse.

b) Koji poprečni presjek može prenijeti veći moment torzije za isti dati dozvoljeni napon smicanja τ_d ?

Rješenje:

a) Za eliptični poprečni presjek je

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad (a)$$

tako da je

$$M_t = GI_t \theta. \quad (b)$$

Kako je

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad W_t = \frac{\pi ab^2}{2}, \quad (c)$$

zamjenom (b) u (c) dobijamo

$$\tau_{\max} = \frac{GI_t}{W_t} \theta = \frac{2b}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} G\theta. \quad (d)$$

Za kružni poprečni presjek poluprenika $R = b$ je

$$\tau_{\max} = b G\theta. \quad (e)$$

Kako je $b < a$, imamo $\frac{2}{1 + (b/a)^2} > 1$, pa zaključujemo iz (d) i (e) da za isti ugao torzije eliptični poprečni presjek ima veći maksimalni smičući napon.

b) Iz uslova

$$\tau_{\max}^{el} = \frac{2M_t}{\pi ab^2} \leq \tau_d$$

dobijamo

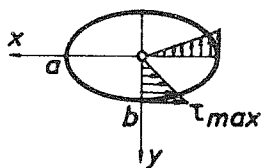
$$M_t \leq \frac{\pi ab^2}{2} \tau_d, \quad (f)$$

a iz uslova

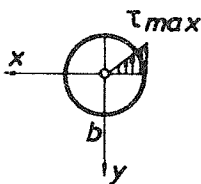
$$\tau_{\max}^{kr} = \frac{M_t}{I_0} b \leq \tau_d$$

dobijamo

$$M_t \leq \frac{\pi b^3}{2} \tau_d. \quad (g)$$



Sl. P 10.2.



Kako je $a > b$, iz (f) i (g) zaključujemo da veći moment može prenijeti eliptični poprečni presjek.

Primjer 10.3.

Odrediti dužinu čelične osovine modula smicanja $G = 8 \frac{\text{MN}}{\text{cm}^2}$ i prečnika $d = 5 \text{ cm}$ ako je pri uglu relativne rotacije krajeva osovine od $\beta = 6^\circ$ maksimalni smičući napon $\tau_{\max} = 9 \text{ kN/cm}^2$.

Rješenje:

Za kružni poprečni presjek je

$$\tau_{\max} = G \theta R, \quad (\text{a})$$

i pošto je ugao torzije $\theta = \frac{\beta}{l}$, zamjenom u (a) dobijamo

$$\tau_{\max} = G \frac{\beta d}{l 2}. \quad (\text{b})$$

Iz (b) je sada

$$l = \frac{G \beta d}{2 \tau_{\max}} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0,105 \cdot 5}{2 \cdot 9} = 232 \text{ cm}.$$

Primjer 10.4.

Koliki je minimalni prečnik štapa opterećenog na torziju momentom $M_t = 3,6 \text{ kNm}$ ako je $\tau_d = 2 \text{ kN/cm}^2$ i $\theta_d = 0,25^\circ/\text{m}$. Modul smicanja je $G = 8 \text{ MN/cm}^2$.

Rješenje:

Iz zahtjeva

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{\pi R^3}{2}} \leq \tau_d$$

dobijamo

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{2M_t}{\pi \tau_d}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 360}{\pi \cdot 2}} = 4,857 \text{ cm},$$

dok iz

$$\theta = \frac{M_t}{GI_0} = \frac{2M_t}{G\pi R^4} \leq \theta_d$$

slijedi

$$R \geq \sqrt[4]{\frac{2M_t}{\pi G \theta_d}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 360}{\pi \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 4,4 \cdot 10^{-5}}} = 5,05 \text{ cm}.$$

Prema tome, $R_{\min} = \max \{4,857; 5,05\} = 5,05 \text{ cm}$.

Primjer 10.5.

Štap pravougaonog poprečnog presjeka na sl. P 10.5 opterećen je momentom torzije $M_t = 20 \text{ kNm}$. Odrediti ugao torzije i maksimalni smičući napon. Modul klizanja je $G = 0,9 \text{ MN/cm}^2$.

Rješenje:

Ugao torzije i maksimalni smičući napon definisani su sa:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}.$$

Za pravougaoni poprečni presjek je:

$$I_t = k_2 (2a)^3 (2b), \quad W_t = \frac{k_2}{k_1} (2a)^2 (2b).$$

Iz tabele 10:1 za $b/a = 1,5$ nalazimo $k_1 = 0,8497$ i $k_2 = 0,196$, pa je:

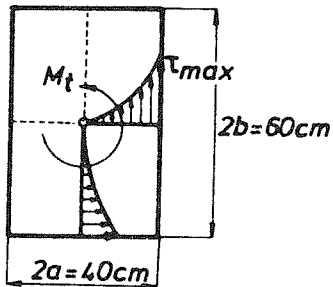
$$I_t = 0,196 \cdot (40)^3 \cdot 60 = 752\,640 \text{ cm}^4$$

$$W_t = \frac{0,196}{0,8497} (40)^2 \cdot 60 = 22\,144 \text{ cm}^3.$$

Prema tome:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \dots = 0,175^\circ/\text{m}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \dots = 0,09 \text{ kN/cm}^2.$$



Sl. P 10.5.

Primjer 10.6.

Izračunati ugao torzije i maksimalni smičući napon u štapu I profila na sl. P 10.6 ako je štap opterećen momentom torzije $M_t = 10 \text{ kNm}$. Modul klizanja $G = 1 \text{ MN/cm}^2$.

Rješenje:

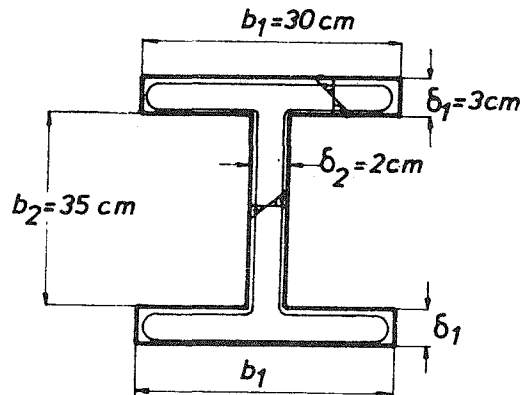
Za I profil je

$$I_t = \frac{1}{3} (2b_1 \delta_1^3 + b_2 \delta_2^3)$$

$$= \frac{1}{3} (2 \cdot 30 \cdot 3^3 + 35 \cdot 2^3) = 633 \text{ cm}^4,$$

pa je

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{10 \cdot 100}{1 \cdot 10^3 \cdot 633} = 1,58 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{cm}} = 9^\circ/\text{m}.$$



Sl. P 10.6.

Maksimalni smičući napon je

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{I_t} \delta_{\max} = \frac{10 \cdot 100}{633} \cdot 3 = 4,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Primjer 10.7.

Kružna i kvadratna tankozidna cijev napravljene su od istog materijala. Objе cijevi imaju istu dužinu, debljinu i površinu poprečnog presjeka i obadvije su opterećene istim momentom torzije M_t . Koliki je odnos smičućih napona i uglova uvijanja ove dvije cijevi? (Zanemariti uticaj koncentracije napona u uglovima kvadratne cijevi).

Rješenje:

Za zatvoreni tankozidni profil je:

$$\tau = \frac{M_t}{2\delta A}, \quad \theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad I_t = \oint \frac{ds}{\delta(s)} = \frac{4A^2\delta}{s}, \quad \delta = \text{const} \dots$$

Za tanki kružni prsten (sl. P 10.7(a)) površina poprečnog presjeka je

$$A_0 = \left(R + \frac{t}{2}\right)^2 \pi - \left(R - \frac{t}{2}\right)^2 \pi = 2Rt\pi,$$

pa je $R = \frac{A_0}{2\pi t}$. Površina ograničena srednjom linijom profila je

$$A = R^2 \pi = \frac{A_0^2}{4\pi t^2},$$

tako da je smičući napon

$$\tau = \frac{M_t}{2\delta A} = \frac{2\pi t}{A_0^2} M_t. \quad (a)$$

Moment inercije pri torziji je

$$I_t = \frac{4A^2\delta}{s} = \frac{A_0^3}{4\pi^2 t^2}, \quad s = 2R\pi,$$

a ugao torzije

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{1}{G} \frac{4\pi^2 t^2}{A_0^3} M_t. \quad (b)$$

Za kutijasti profil na sl. P 10.7(b) je

$$A_0 = (a+t)^2 - (a-t)^2 = 4at,$$

pa je $a = \frac{A_0}{4t}$, i

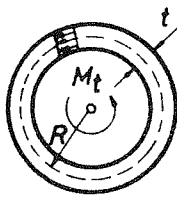
$$A = a^2 = \frac{A_0^2}{16t^2}.$$

Dakle:

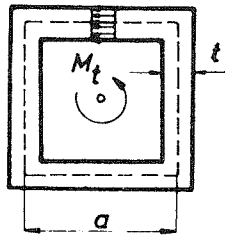
$$\tau = \frac{M_t}{2\delta A} = \frac{8t}{A_0^2} M_t \quad (c)$$

$$I_t = \frac{4A^2\delta}{s} = \frac{A_0^3}{64t^2}, \quad s=4a$$

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{1}{G} \frac{64t^2}{A_0^3} M_t \quad (d)$$



(a)



(b)

Sl. P 10.7.

Upoređujući izraze (a) i (c), (b) i (d), vidimo da je odnos smičućeg napona kod kućijastog profila (τ_1) prema smičućem naponu kod prstenastog profila (τ_2)

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{4}{\pi} = 1,273,$$

dok je odnos uglova torzije

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{16}{\pi^2} = 1,62.$$

Primjer 10.8.

Tanka kružna cijev unutrašnjeg prečnika $d=10$ cm opterećena je momentom torzije $M_t=5$ kNm. Ako je $\tau_d=8$ kN/cm², odrediti potrebnu debljinu cijevi.

Rješenje:

Maksimalni smičući napon je $\tau_{\max} = \frac{M_t}{2\delta A}$, gdje je

$$A = R^2\pi = \left(5 + \frac{\delta}{2}\right)^2 \pi \cong 5\pi(5 + \delta),$$

pa iz uslova

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2\delta \cdot 5\pi(5 + \delta)} \leq \tau_d$$

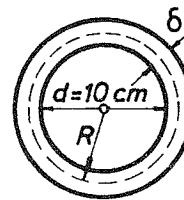
dobijamo

$$\delta^2 + 5\delta - 2 \geq 0,$$

odakle je $\delta \geq 0,37$ cm.

Primjer 10.9.

Uporediti uglove uvijanja tanke pravougaone cijevi $a \times b$ konstantne debljine δ na sl. P 10.9, sa i bez tankog reza, ako su obje cijevi opterećene istim momentom torzije M_t . Koliki je odnos ovih uglova ako je $\delta=0,1b$? Koliki je odnos maksimalnih smičućih napona pri datom momentu torzije?



Sl. P 10.8.

Rješenje:

Za zatvoreni tankozidni profil je:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad I_t = \frac{4A^2\delta}{s} = \frac{4(ab)^2\delta}{2(a+b)} = \frac{8}{3}b^3\delta, \quad (a)$$

a za otvoreni:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad I_t = \frac{1}{3}(2a+2b)\delta^3 = 2b\delta^3. \quad (b)$$

Upoređujući (a) i (b) dobijamo

$$\frac{\theta_{\text{otv.}}}{\theta_{\text{zatv.}}} = \frac{I_t^{\text{zatv.}}}{I_t^{\text{otv.}}} = \frac{\frac{8}{3}b^3\delta}{2b\delta^3} = \frac{4}{3}\left(\frac{b}{\delta}\right)^2.$$

Za $\delta=0,1b$ je $\theta_{\text{otv.}}=133,3\theta_{\text{zatv.}}$, tj. ugao torzije otvorenog tankozidnog profila je 133,3 puta veći od ugla torzije zatvorenog tankozidnog profila.

Smičući napon kod zatvorenog tankozidnog profila je

$$\tau = \frac{M_t}{2\delta A} = \frac{M_t}{2\delta(ab)} = \frac{M_t}{2\delta b^2}, \quad (c)$$

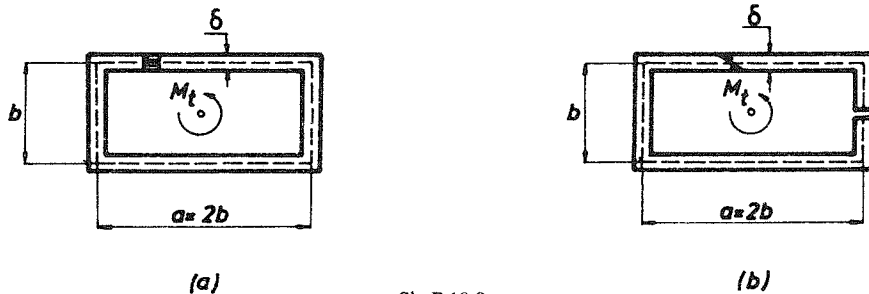
dok je maksimalni smičući napon kod otvorenog tankozidnog profila

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_t}{I_t}\delta = \frac{M_t}{2b\delta^3}\delta = \frac{M_t}{2b\delta^2}. \quad (d)$$

Upoređujući (c) i (d) dobijamo

$$\frac{\tau_{\text{max}}^{\text{otv.}}}{\tau_{\text{max}}^{\text{zatv.}}} = 2\frac{b}{\delta}.$$

Za $\delta=0,1b$ je $\tau_{\text{max}}^{\text{otv.}}=20\tau_{\text{max}}^{\text{zatv.}}$, tj. pri istom momentu torzije maksimalni smičući napon kod otvorenog profila je 20 puta veći nego kod zatvorenog tankozidnog profila.



Sl. P 10.9.

Primjer 10.10.

Štap je sastavljen iz šupljeg cilindra u koji je ubačen puni cilindar tako da se zajedno ponašaju kao jedan štap. Unutrašnji materijal ima modul smicanja G_A , a spoljašnji G_B . Izvesti formule za maksimalni smičući napon u dijelovima A i B ako je štap opterećen momentom torzije M_t .

Rješenje:

Ukupan moment torzije raspodjeljuje se na dio A i B tako da je

$$M_t = M_t^A + M_t^B, \quad (a)$$

dok su uglovi torzije dijela A i B isti

$$\theta_A = \theta_B. \quad (b)$$

Kako je:

$$\theta_A = \frac{M_t^A}{G_A I_0^A}, \quad \theta_B = \frac{M_t^B}{G_B I_0^B},$$

zamjenom u (b) i koristeći (a) dobijamo:

$$M_t^A = \frac{G_A I_0^A}{G_A I_0^A + G_B I_0^B} M_t, \quad M_t^B = \frac{G_B I_0^B}{G_A I_0^A + G_B I_0^B} M_t, \quad (c)$$

gdje su $I_0^A = \frac{\pi d^4}{32}$, $I_0^B = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$ polarni momenti inercije dijelova A i B .

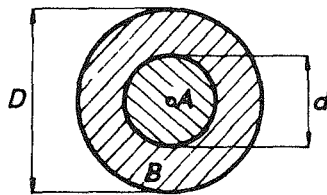
Maksimalni smičući naponi u dijelovima A i B su:

$$\tau_{\max}^A = \frac{M_t^A}{I_0^A} \frac{d}{2} = \frac{G_A}{G_A I_0^A + G_B I_0^B} \frac{d}{2} M_t, \quad (d)$$

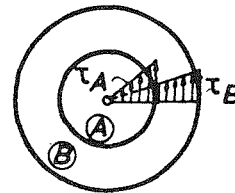
$$\tau_{\max}^B = \frac{M_t^B}{I_0^B} \frac{D}{2} = \frac{G_B}{G_A I_0^A + G_B I_0^B} \frac{D}{2} M_t. \quad (e)$$

Na primjer, za $D = 2d$ iz (c) slijedi:

$$M_t^A = \frac{G_A}{G_A + 15G_B} M_t, \quad M_t^B = \frac{G_B}{G_A + 15G_B} M_t,$$



(a)



(b)

Sl. P 10.10.

a ako je još $G_A = 2G_B$, dobijamo $M_t^A = \frac{2}{17} M_t$, $M_t^B = \frac{15}{17} M_t$, što zamjenom u (d) i (e) daje:

$$\tau_{\max}^A = \frac{\frac{2}{17} M_t}{\pi d^4} \frac{d}{2} = \frac{32}{17} \frac{M_t}{\pi d^3}$$

$$\tau_{\max}^B = \frac{\frac{15}{17} M_t}{\frac{15\pi d^4}{32}} d = \frac{32}{17} \frac{M_t}{\pi d^3}.$$

Primjer 10.11.

Obostrano uklještena greda opterećena je momentom torzije $M_t = 100 \text{ kNm}$ kao na sl. P 10.11 (a).

- Nacrtati dijagram momenta torzije duž ose grede.
- Odrediti maksimalni napon smicanja u gredi.
- Odrediti ugao rotacije poprečnog presjeka gdje djeluje spreg M_t .
- Nacrtati dijagram promjene ugla rotacije $\beta = \beta(z)$.

Modul smicanja je $G = 1 \text{ MN/cm}^2$.

Rješenje:

- Nosač je jedanput statički neodređen jer jednačina ravnoteže (sl. P 10.11 (b))

$$M_B + M_C - M_t = 0 \quad (a)$$

sadrži dvije nepoznate reakcije M_B i M_C . Drugu jednačinu dobićemo ako zamislimo da smo uklonili uklještenje C (sl. P 10.11 (c)), pa zahtijevamo da je rotacija presjeka C jednaka nuli, tj.

$$\beta_C = \int_0^L \frac{M_t(z)}{GI_t(z)} dz = \int_0^{L_1} \frac{(-M_B)}{GI_{t,1}} dz + \int_0^{L_2} \frac{M_C}{GI_{t,2}} dz = 0,$$

Oдавde je

$$\frac{M_B L_1}{GI_{t,1}} = \frac{M_C L_2}{GI_{t,2}}, \quad (b)$$

gdje je:

$$I_{t,1} = 0,196 \cdot 40^3 \cdot 60 = 752\,640 \text{ cm}^4, \quad I_{t,2} = \frac{4(36 \cdot 55)^2}{2 \left(\frac{36}{5} + \frac{55}{4} \right)} = 374\,262 \text{ cm}^4.$$

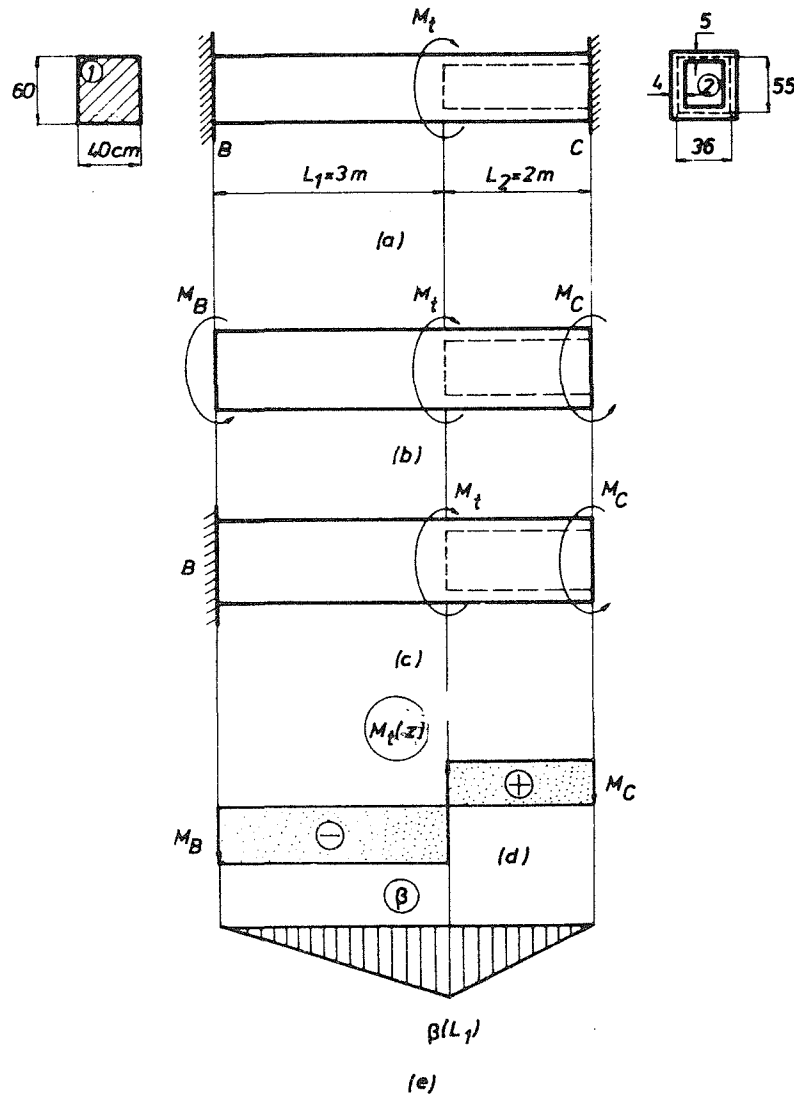
Zamjenom (a) u (b) imamo

$$\frac{(M_t - M_C) \cdot 300}{752640} = \frac{M_C \cdot 200}{374262},$$

tako da dobijamo:

$$M_C = 0,427 M_t = 42,7 \text{ kNm}, \quad M_B = M_t - M_C = 57,3 \text{ kNm}.$$

Dijagram momenta torzije duž ose grede prikazan je na sl. P 10.11 (d).



Sl. P 10.11.

b) Maksimalni napon smicanja u dijelu ① je

$$\tau_{\max,1} = \frac{M_{t,1}}{W_{t,1}} = \frac{5730}{22144} = 0,259 \text{ kN/cm}^2,$$

jer je:

$$M_{t,1} = M_B = 5730 \text{ kNcm}$$

$$W_{t,1} = \frac{0,196}{0,8497} \cdot 40^2 \cdot 60 = 22144 \text{ cm}^3.$$

Maksimalni napon smicanja u dijelu ② je

$$\tau_{\max,2} = \frac{M_{t,2}}{W_{t,2}} = \frac{4270}{15840} = 0,27 \text{ kN/cm}^2,$$

s obzirom da je:

$$M_{t,2} = M_C = 4270 \text{ kNcm}. \quad W_{t,2} = 2\delta_{\min}A = 2 \cdot 4 \cdot (36 \cdot 55) = 15840 \text{ cm}^3.$$

c) Ugao rotacije poprečnog presjeka gdje djeluje spreg M_t je

$$\beta(L_1) = \int_0^{L_1} \frac{M_t(z) dz}{GI_t(z)} = -\frac{M_B L_1}{GI_{t,1}} = -\frac{5730 \cdot 300}{10^3 \cdot 752640} = -2,28 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = -0,13^\circ.$$

d) Dijagram $\beta = \beta(z)$ prikazan je na sl. P 10.11 (e).

Primjer 10.12.

a) Dimenzionirati nosač na sl. P 10.12(a) ako je $\tau_d = 4 \text{ kN/cm}^2$.

b) Odrediti maksimalni ugao rotacije poprečnog presjeka.

Dato je: $m = 50 \text{ kNm/m}$, $M = 100 \text{ kNm}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $G = 8 \text{ MN/cm}^2$.

Rješenje:

a) Uslov ravnoteže (sl. P 10.12 (b)) je

$$M_A + mL - M + M_B = 0, \quad (a)$$

a uslov da nema rotacije presjeka B (sl. P 10.12(c)) je

$$\beta_B = \int_0^L \frac{M_t(z) dz}{GI_t(z)} = \int_0^a \frac{(M_A + mz)}{GI_0} dz + \int_0^a \frac{(M_A + ma)}{GI_0} dz + \int_0^{2a} \frac{(-M_B) dz}{GI_0(z)} = 0. \quad (b)$$

Kako je:

$$I_0(z) = \frac{\pi d^4(z)}{32} = I_0 \left(1 + \frac{z}{2a}\right)^4, \quad I_0 = \frac{\pi d^4}{32}, \quad d(z) = d \left(1 + \frac{z}{2a}\right),$$

zamjenom u (b) imamo

$$M_A a + m \frac{a^2}{2} + M_A a + ma^2 - M_B \int_0^{2a} \frac{dz}{\left(1 + \frac{z}{2a}\right)^4} = 0,$$

tj.

$$2M_A + \frac{3}{2} ma - \frac{7}{12} M_B = 0. \quad (c)$$

Rješavanjem jednačina (a) i (c) po M_A i M_B dobijamo:

$$M_A = \frac{1}{31} (7M - 25ma) = 2,4 \text{ kNm}, \quad M_B = \frac{6}{31} (4M - ma) = 72,6 \text{ kNm}.$$

Dijagram momenta je prikazan na sl. P 10.12(d). Maksimalni moment je $M_t^{\max} = 72,6 \text{ kNm}$, i javlja se na dijelu DB . Dimenzionisanje vršimo iz uslova

$$\tau_{\max} = \frac{M_t^{\max}}{W_t} \leq \tau_d. \quad (d)$$

Kritično mjesto (presjek) je neposredno desno od presjeka D , pa je $W_t = \frac{\pi d^3}{16}$, što zamjenom u (d) daje

$$\frac{M_t^{\max}}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq \tau_d, \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t^{\max}}{\pi \tau_d}} = \dots = 21 \text{ cm}.$$

b) Na dijelu AC ugao rotacije je

$$\beta(z) = \int_0^z \frac{(M_A + mz)}{GI_0} dz = \frac{1}{GI_0} (2,4z + 25z^2).$$

Rotacija poprečnog presjeka C je

$$\beta_c = \beta(a) = \frac{1}{GI_0} (2,4a + 25a^2) = \dots = 0,028^\circ.$$

Na dijelu BD je (mjereći ζ od B ulijevo)

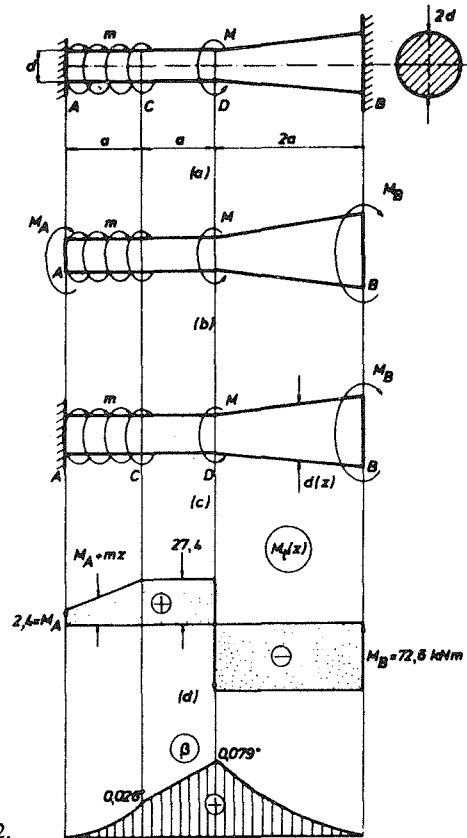
$$\beta(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{(-M_B) d\zeta}{GI_0(\zeta)} = -\frac{2a}{3} \frac{M_B}{GI_0} \left[\frac{1}{\left(2 - \frac{\zeta}{2a}\right)^3} - \frac{1}{8} \right].$$

Rotacija poprečnog presjeka D je

$$\beta_D = \beta(2a) = -\frac{7a}{12} \frac{M_B}{GI_0} = \dots = -0,079^\circ.$$

Znak „-“ znači da je rotacija u smjeru kazaljke na satu, gledajući u poprečni presjek sa lijeve strane. Dijagram ugla rotacije prikazan je na sl. P 10.12(e). Sa dijagrama je očigledno

$$\beta_{\max} = \beta_D = 0,079^\circ.$$

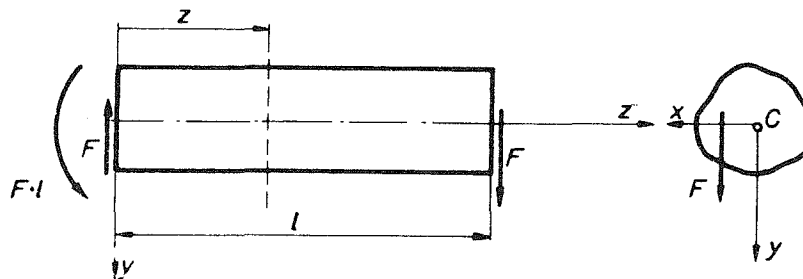


Sl. P 10.12.

11. SAVIJANJE GREDE SILAMA

11.1. Savijanje grede proizvoljnog punog poprečnog presjeka

Posmatrajmo punu prizmatičnu gredu dužine l koja je opterećena na desnom kraju silom F paralelno jednoj od glavnih centralnih osa inercije poprečnog presjeka grede, recimo y osi, kao što je prikazano na sl. 11 : 1. Na lijevom kraju grede djeluju sila $-F$ i spreg intenziteta $F l$ koji obezbjeđuju ravnotežu grede.



Sl. 11:1.

Pod dejstvom sile F u proizvoljnom poprečnom presjeku na udaljenju z od lijevog kraja javiće se komponentalni naponi koji se moraju redukovati u tom poprečnom presjeku na transferzalnu silu

$$T_y = F \quad (1)$$

i moment savijanja

$$M_x = -F(l - z). \quad (2)$$

Transferzalna sila T_y je rezultat smičućih napona koji se javljaju u ravni poprečnog presjeka, a moment M_x je rezultat normalnih napona σ_{zz} u ravni poprečnog presjeka grede. Zato ćemo, koristeći semi-inverzni metod, pretpostaviti da je:

$$\sigma_{xx} \neq 0, \quad \sigma_{zy} \neq 0, \quad \sigma_{zz} \neq 0 \quad (3)$$

i

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad (4)$$

jer je bočna površina grede slobodna od spoljašnjeg opterećenja. Osim toga, pretpostavićemo da su normalni naponi σ_{zz} raspoređeni u poprečnom presjeku na isti način kao i kod čistog savijanja spregovima na krajevima grede, tj.

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y, \quad (5)$$

s tim što je sada moment M_x različit u različitim poprečnim presjecima, kao što se vidi iz (2), pa je

$$\sigma_{zz} = -\frac{F(l-z)}{I_x} y. \quad (6)$$

Uvedene pretpostavke biće prihvaćene ako se sa njima mogu zadovoljiti jednačine elastičnosti. Jednačine ravnoteže (4.1:1) postaju, s obzirom na (3), (4) i (6):

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = -\frac{F}{I_x} y.$$

Prve dvije jednačine iz (7) pokazuju da su smičući naponi σ_{zx} i σ_{zy} nezavisni od z koordinate, tj. funkcije su samo od x i y . Treća jednačina u (7) je zadovoljena ako uvedemo funkciju napona $\Phi = \Phi(x, y)$, tako da je:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (8)$$

$$\sigma_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{F}{2I_x} y^2 + f(x),$$

gdje je $f(x)$ proizvoljna funkcija koju uvodimo zbog eventualne pogodnosti njenog korišćenja u narednom izvođenju.

Posmatrajmo dalje jednačine kompatibilnosti. Od šest jednačina (4.3:3) četiri su identički zadovoljene, a preostale dvije glase:

$$\nabla^2 \sigma_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_{zy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y \partial z} = 0, \quad (9)$$

tj., s obzirom na (6) i (8):

$$\frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Phi) = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Phi) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} - f''(x). \quad (10)$$

Iz prve od jednačina (10) slijedi

$$\nabla^2 \Phi = g(x), \quad (11)$$

što zamjenom u drugu od jednačina (10) daje

$$-g'(x) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} - f''(x), \quad (12)$$

ili nakon integracije

$$g(x) = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} x + f'(x) + c, \quad (13)$$

gdje je c konstanta. Fizički smisao konstante c je lako utvrditi. Zaista, može se pokazati koristeći definiciju rotacije (poglavlje 2.4)

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (14)$$

i gornje izraze da je

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2G} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} x - c \right), \quad (15)$$

gdje je G modul klizanja. Prema tome, ako hoćemo da nema relativne rotacije $\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right)$ elemenata težišne z ose (što u stvari znači da nema torzije poprečnog presjeka) moramo uzeti $c=0$. Iz (11) i (13) sada slijedi da za slučaj savijanja bez torzije funkciju Φ treba tražiti kao rješenje Poissonove diferencijalne jednačine

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} x + f''(x). \quad (16)$$

Iz graničnog uslova da je bočna (cilindrična) površina slobodna od opterećenja dalje slijedi da mora biti

$$n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} = 0, \quad (17)$$

tj., s obzirom na (8) i s obzirom da je $n_x = dy/ds$ i $n_y = -dx/ds$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{F}{2I_x} y^2 - f''(x) \right] dx = 0, \quad (18)$$

odnosno

$$\frac{d\Phi}{ds} = \left[-\frac{F}{2I_x} y^2 + f''(x) \right] \frac{dx}{ds} \quad (19)$$

po konturi poprečnog presjeka (ds je element luka konture).

Uslov (19) je konturni uslov za parcijalnu diferencijalnu jednačinu (16). Funkcija f je još uvijek proizvoljna i može se uzeti tako da uprosti ili diferencijalnu jednačinu (16) ili konturni uslov (19). Na konkretnim primjerima mi ćemo vidjeti da ćemo birati funkciju f tako da desna strana u (19) bude identički jednaka nuli po konturi poprečnog presjeka, čime konturni uslov (19) postaje $\Phi = \text{const.}$ po konturi. S obzirom da naponi u (8) zavise od izvoda funkcije Φ , funkciji Φ možemo dodati ili oduzeti neku konstantu a da to ne utiče na vrijednosti napona, pa ćemo za konturni uslov uzeti

$$\Phi = 0 \quad (20)$$

po konturi poprečnog presjeka.

Može se pokazati da je problem definisan diferencijalnom jednačinom (16) sa konturnim uslovom (20) analogan problemu membrane ravnomjerno zategnute nad otvorom oblika poprečnog presjeka grede i opterećene kontinualnim vertikalnim opterećenjem koje se mijenja saglasno desnoj strani jednačine (16).

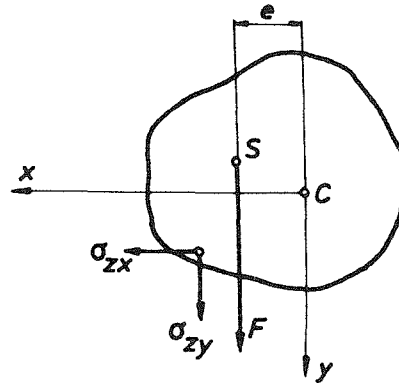
Posmatrajmo sada granične uslove na bazisima grede. Na desnom kraju $z=l$ naponi moraju da daju samo transferzalnu silu $T_y=F$. S obzirom da je na kraju $z=l$, $\sigma_{zz}=0$, ostaje samo da provjerimo da je:

$$\int_A \sigma_{zx} dA = 0 \quad (21)$$

$$\int_A \sigma_{zy} dA = F \quad (22)$$

$$\int_A (x\sigma_{zy} - y\sigma_{zx}) dA = F e, \quad (23)$$

gdje je e udaljenje pravca sile F od y ose (sl. 11:2).



Sl. 11:2.

Lako je dokazati da su uslovi (21) i (22) zadovoljeni izrazima (8). To slijedi nakon pogodnih transformacija površinskog u linijski integral korišćenjem Greenove formule. Mi ćemo ovdje interpretirati uslov (23). Smičući naponi σ_{zx} i σ_{zy} definisani sa (8), pri čemu je Φ određeno iz (16) i (20), redukuju se u težištu poprečnog presjeka na transverzalnu silu

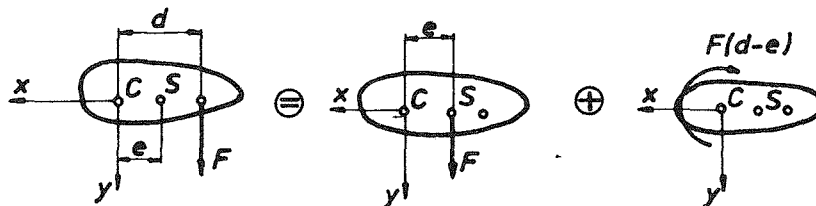
$$T_y = \int_A \sigma_{zy} dA \equiv F$$

i moment

$$M_x = \int_A (x\sigma_{zy} - y\sigma_{zx}) dA.$$

Ovo dvoje je dalje statički ekvivalentno sili F paralelno pomjerenoj na rastojanje e definisano sa (23). Dakle, ako sila F zaista djeluje na rastojanju e definisanom sa (23), tada je izvedeno rješenje tačno rješenje problema. Tačka S kroz koju prolazi napadna linija sile F naziva se centar savijanja (ili centar smicanja).

Ako sila F ne prolazi kroz centar savijanja, tada se pored savijanja javlja i torzija, pa rješenje treba dobiti superpozicijom, kao što je prikazano na sl. 11:3.



Sl. 11:3.

Na bazu $z=0$ moramo imati suprotnu silu $-F$ i moment $F l$, tj. naponi moraju biti raspoređeni na isti način kao što daje rješenje, ili bar, u smislu Saint-Venantovog principa, moraju biti statički ekvivalentni sili F i momentu $F l$.

Komponentalne deformacije dobijamo iz Hookeovog zakona:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= \frac{\nu F (l-z)}{E I_x} y, & \varepsilon_{zz} &= -\frac{1 F (l-z)}{E I_x} y \\ \varepsilon_{xy} &= 0, & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\varepsilon_{zy} = \frac{1}{2G} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{F}{2I_x} y^2 + f(x) \right].$$

Komponentalna pomjeranja slijede integracijom iz (24):

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\nu F}{EI_x} (l-z) xy + \theta zy + a_1 y + a_2 z + a_4 \\ u_y &= \frac{\nu F}{EI_x} (l-z) \frac{y^2 - x^2}{2} + \frac{F}{EI_x} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) - \theta zx - a_1 x + a_3 z + a_5 \\ u_z &= -\frac{F}{EI_x} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) y + w(x, y), \end{aligned} \quad (25)$$

gdje se $w = w(x, y)$ određuje integracijom iz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\nu F}{EI_x} xy - \theta y - a_2 \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{G} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{F}{2I_x} y^2 + f \right) + \frac{\nu F}{EI_x} \frac{y^2 - x^2}{2} + \theta x - a_3, \end{aligned} \quad (26)$$

a konstante $\theta, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ su konstante integracije. S obzirom da ne želimo torziju u izrazima (26) treba uzeti $\theta=0$ (inače bi bilo $\frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\nu F}{EI_x} x + \theta \neq 0$ i za $x=0$, što bi značilo torziju). Preostale konstante određujemo iz uslova na kraju $z=0$. Zahtijevajući da je $u_x = u_y = u_z = 0$ za $x=y=z=0$, nalazimo da je $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ (a_6 se javlja pri integraciji (26)). Konstante a_1, a_2, a_3 nalazimo, recimo, iz uslova da je za $x=y=z=0$: $\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$.

Očigledno je da je neutralna ravan (tj. ravan čija se uzdužna vlakna ne izdužuju, $\varepsilon_{zz}=0$) ravan $y=0$. Ona je, naravno, upravna na ravan savijanja yz , tj. ravan $x=0$, u kojoj leži deformisani oblik ose grede (pravo savijanje).

Očigledno je, dalje, analizom izraza (25) i (26) da poprečni presjeci ne ostaju ravni kao kod čistog savijanja, jer pomjeranje u_z nije linearna funkcija od koordinata y . Osim toga, pošto je $\varepsilon_{zy} \neq 0$, jasno je da uzdužna osa grede i poprečni presjeci grede ne ostaju upravni nakon deformacije.

Deformisani oblik ose grede dobijamo stavljajući $x = y = 0$ u izraz (25) za u_y ,

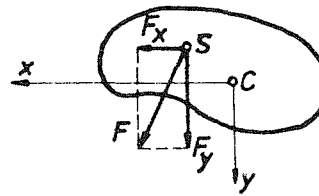
$$u_y = \frac{F}{EI_x} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + a_3 z, \quad (27)$$

pa je krivina deformisanog oblika ose grede, za slučaj malih deformacija, jednaka

$$\frac{1}{\rho} \cong \left| \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right| = \frac{F}{EI_x} (l - z) = -\frac{M_x}{EI_x}, \quad (28)$$

tj. proporcionalna je momentu M_x , kao i kod čistog savijanja, s tim što se sada moment M_x mijenja od presjeka do presjeka grede. Deformisani oblik ose grede dat sa (27) naziva se elastična linija grede.

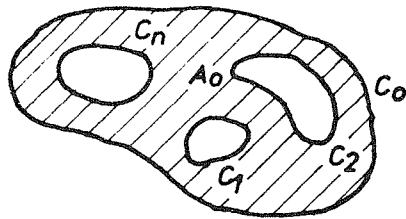
Naglašavamo da se rješenje izvedeno u ovom poglavlju odnosi na slučaj kada sila F djeluje kroz centar savijanja poprečnog presjeka paralelno glavnoj centralnoj osi inercije (y osi). Ako, međutim, sila prolazi kroz centar savijanja ali ima proizvoljan pravac, tada je moramo razložiti na komponente paralelne pravcima glavnih centralnih osa inercije (x i y), pa rješenje dobiti superpozicijom na bazi ovdje izvedenog rješenja (sl. 11:4). Ovo je tzv. koso savijanje silom za razliku od pravog savijanja (koje nastaje kada je sila F paralelna jednoj od glavnih centralnih osa inercije poprečnog presjeka).



Sl. 11:4.

11.2. Savijanje grede višestruko povezanog poprečnog presjeka

Dok je kod čistog savijanja grede spregovima na krajevima grede izvedeno rješenje važno bez obzira da li je greda punog ili šupljeg poprečnog presjeka, kod savijanja silama problem grede sa višestruko povezanim poprečnim presjekom moramo riješiti posebno. Dakle, neka je poprečni presjek grede, na primjer, kao na sl. 11:5.



Sl. 11:5.

Ponovo ćemo pretpostaviti da je:

$$\sigma_{zx} \neq 0, \quad \sigma_{zy} \neq 0, \quad \sigma_{zz} = -\frac{F(l-z)}{I_x} y \quad (1)$$

Jednačine ravnoteže biće zadovoljene ako, kao i prije, uvedemo funkciju napona $\Phi = \Phi(x, y)$, tako da je:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \sigma_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{F}{2I_x} y^2 + f(x), \quad (2)$$

gdje funkciju $f(x)$ treba uzeti kako je najpogodnije za uprošćavanje izvođenja koje slijedi. Iz graničnog uslova na slobodnim bočnim površinama C_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) slijedi da funkcija Φ mora zadovoljiti uslov

$$\frac{d\Phi}{ds} = \left[-\frac{F}{2I_x} y^2 + f(x) \right] \frac{dx}{ds} \quad \text{na } C_i. \quad (3)$$

Iz jednačina kompatibilnosti dalje slijedi da Φ zadovoljava Poissonovu jednačinu

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} x + f'(x), \quad (4)$$

dok od integralnih uslova kompatibilnosti za višestruko povezane oblasti:

$$\oint_{C_i} du_x = 0, \quad \oint_{C_i} du_y = 0, \quad \oint_{C_i} du_z = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

prva dva su identički zadovoljena, a treći daje

$$\oint_{C_i} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \int_{A_i} \left[-\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} x + f'(x) \right] dx \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

gdje je $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ izvod funkcije Φ po normali n na konturu C_i .

Pri rješavanju konkretnih problema šupljih greda najpraktičnije je uzeti da je

$$f'(x) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} x,$$

tj.

$$f(x) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{2I_x} x^2, \quad (7)$$

tako da jednačine koje vode rješenju problema savijanja grede višestruko povezanog poprečnog presjeka glase:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{u} \quad A_0 \quad (8)$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = \left[\frac{F}{2I_x} \left(\frac{\nu}{1+\nu} x^2 - y^2 \right) \right] \frac{dx}{ds} \quad \text{na} \quad C_i \quad (9)$$

$$\oint_{C_i} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

11.3. Savijanje grede eliptičnog poprečnog presjeka

Neka je poprečni presjek grede elipsa čija je kontura C_0 data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (1)$$

Da bismo riješili problem, treba da nađemo funkciju Φ koja zadovoljava jednačinu

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} x + f'(x) \quad (2)$$

u svakoj tački unutrašnjosti elipse, a na konturi zadovoljava uslov

$$\frac{d\Phi}{ds} = \left[-\frac{F}{2I_x} y^2 + f(x) \right] \frac{dx}{ds}. \quad (3)$$

Funkciju $f(x)$ izaberimo tako da je desna strana u (3) jednaka nuli. Očigledno, ovo je ispunjeno ako uzmemo

$$f(x) = \frac{F}{2I_x} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (4)$$

pa granični uslov po konturi postaje

$$\Phi = 0. \quad (5)$$

Diferencijalna jednačina (2) glasi

$$\nabla^2 \Phi = - \left(\frac{\nu}{1+\nu} + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{F}{I_x} x. \quad (6)$$

Rješenje jednačine (6) sa graničnim uslovom (5) potražimo u obliku

$$\Phi = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) F(x, y). \quad (7)$$

Granični uslov (5) je automatski zadovoljen. Jednačina (6) je takođe zadovoljena ako uzmemo $F(x, y) = Ax$, $A = \text{const.}$, tj. ako je

$$\Phi = A x \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (8)$$

Zamjenom u (6) nalazimo da je

$$A = - \frac{F b^2}{2I_x} \frac{b^2 + \frac{\nu}{1+\nu} a^2}{3b^2 + a^2}. \quad (9)$$

Smičuće napone sada dobijamo diferenciranjem:

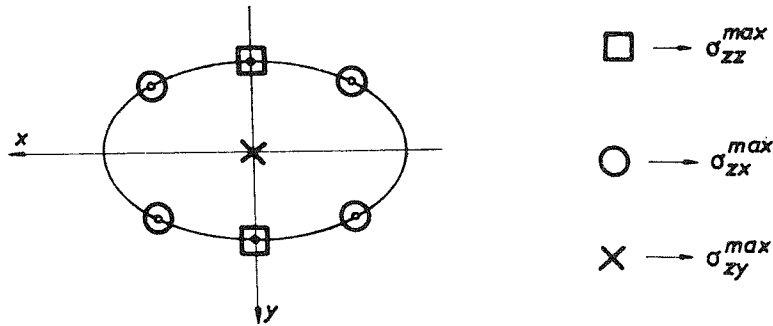
$$\sigma_{xx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{F a b}{2I_x} \frac{b^2 + \frac{\nu}{1+\nu} a^2}{3b^2 + a^2} \frac{x y}{a b} \quad (10)$$

$$\sigma_{zy} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{F y^2}{2I_x} + f(x) = \frac{F b^2}{2I_x} \left[\frac{2b^2 + \frac{1}{1+\nu} a^2}{3b^2 + a^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{a^2}{3b^2 + a^2} \frac{x^2}{a^2} \right], \quad (11)$$

dok je normalni napon

$$\sigma_{zz} = - \frac{F(l-z)}{I_x} y. \quad (12)$$

Analizom izraza (10), (11) i (12) nalazimo da su ekstremne vrijednosti napona u tačkama poprečnih presjeka označenim na sl. 11:6.



Sl. 11:6.

Maksimalne vrijednosti smičućih napona su:

$$\sigma_{zx}^{\max} = \sigma_{zx} \left(x = \frac{a}{\sqrt{2}}, y = -\frac{b}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1 + \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{a^2}{b^2} Fab}{3 + \frac{a^2}{b^2}} \frac{1}{4I_x} \quad (13)$$

$$\sigma_{zy}^{\max} = \sigma_{zy} (x=0, y=0) = \frac{2 + \frac{1}{1 + \nu} \frac{a^2}{b^2} Fb^2}{3 + \frac{a^2}{b^2}} \frac{1}{2I_x} \quad (14)$$

Na primjer, za $\nu = 1/3$ i $a = b$, iz (13) i (14) dobijamo da je $\sigma_{zx}^{\max} = 22,7\% \sigma_{zy}^{\max}$, dok se za $a = 1/2 b$ dobija $\sigma_{zx}^{\max} = 12\% \sigma_{zy}^{\max}$.

Ako je elipsa vrlo uska $\left(\frac{a}{b} \ll 1 \right)$, tada:

$$\sigma_{zx} \rightarrow 0 \quad (15)$$

$$\sigma_{zy} \rightarrow \frac{Fb^2}{3I_x} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (16)$$

a maksimalni smičući napon je

$$\sigma_{zy}^{\max} = \frac{Fb^2}{3I_x} \quad (17)$$

Ako je, međutim, $\frac{a}{b} \gg 1$, tada je:

$$\sigma_{zy} (y=0) = \left(\frac{1}{1 + \nu} - \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{Fb^2}{2I_x} \quad (18)$$

$$\sigma_{zy} (x=y=0) = \frac{2}{1 + \nu} \frac{F}{ab\pi}, \quad \sigma_{zy} (x = \pm a, y=0) = \frac{4\nu}{1 + \nu} \frac{F}{ab\pi}$$

No, za *ovakve profile* σ_{zx}^{max} *postaje reda veličine i veće od* σ_{zy}^{max} . Zaista, za $a=6b$ i za $\nu=1/3$

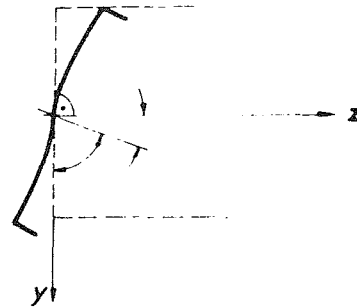
$$\sigma_{zx}^{max} = \frac{30 F b^2}{39 2I_x}, \quad \sigma_{zy}^{max} = \frac{29 F b^2}{39 2I_x}, \quad (19)$$

dok je za $a=10b$, $\sigma_{zx}^{max} \cong 170\%$, σ_{zy}^{max} . Međutim, za tanke široke profile ($\frac{a}{b} \gg 1$) smičući naponi imaju malu ulogu jer je maksimalni normalni napon σ_{zz} veoma veliki i dominira u proračunima.

Odredimo na kraju pomjeranja. Iz izraza (11.1:25) i (11.1:26) dobija se za eliptični poprečni presjek:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\nu F}{EI_x} (l-z) xy \\ u_y &= \frac{F}{EI_x} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + \frac{F}{EI_x} b^2 \frac{2(1+\nu)b^2 + a^2}{3b^2 + a^2} z + \frac{\nu F}{EI_x} (l-z) \frac{y^2 - x^2}{2} \\ u_z &= -\frac{F}{EI_x} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) y + \frac{F}{EI_x} \frac{\nu(a^2 - b^2) - 2(a^2 + 2b^2)}{2(3b^2 + a^2)} y^3 + \frac{F}{EI_x} \frac{\nu(b^2 - a^2) - 2b^2}{2(3b^2 + a^2)} x^2 y \end{aligned} \quad (20)$$

Neutralna ravan je, naravno, ravan xz (ravan $y=0$), jer je za njene tačke $u_z=0$, tj. njena uzdužna vlakna se ne izdužuju. Za tačke neutralne ravni jedino je komponenta pomjeranja $u_y \neq 0$, pa neutralna ravan prelazi nakon deformacije u površ trećeg reda, kao što se vidi iz druge od jednačina (20). Osim toga, poprečni presjeci ne ostaju ravni jer u_z nije linearna, već kubna funkcija od y . Pošto je klizanje $\epsilon_{zy} \neq 0$, uzdužna osa grede i poprečni presjeci ne ostaju upravni nakon deformacije (sl. 11:7). Deformisani oblik ose grede dobijamo stavljajući $x=y=0$ u izraz (20) za u_z .



Sl. 11:7.

$$u_y = \frac{F}{EI_x} \left[\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + b^2 \frac{2(1+\nu)b^2 + a^2}{3b^2 + a^2} z \right]. \quad (21)$$

Prvi član u (21) predstavlja dio pomjeranja usljed napona σ_{zz} , a drugi usljed smičućih napona.

11.4. Savijanje grede kružnog poprečnog presjeka

Rješenje za kružni poprečni presjek direktno slijedi iz rješenja za eliptični poprečni presjek stavljajući $a=b=R$. Dobija se:

$$\sigma_{zx} = -\frac{FR^2}{2I_x} \frac{1 + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{x}{R} \frac{y}{R}}{4} \quad (1)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{FR^2}{2I_x} \left[\frac{1}{1+\nu} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) - \frac{1-2\nu}{4(1+\nu)} \frac{x^2}{R^2} \right]. \quad (2)$$

Očigledno je iz (1) i (2) da je σ_{zx} neparna funkcija od x i y , a σ_{zy} parna funkcija, tako da je ukupna (rezultujuća) sila u presjeku u pravcu y ose.

Ako je Poissonov koeficijent, recimo, $\nu = 1/3$, tada je iz izraza (1) i (2):

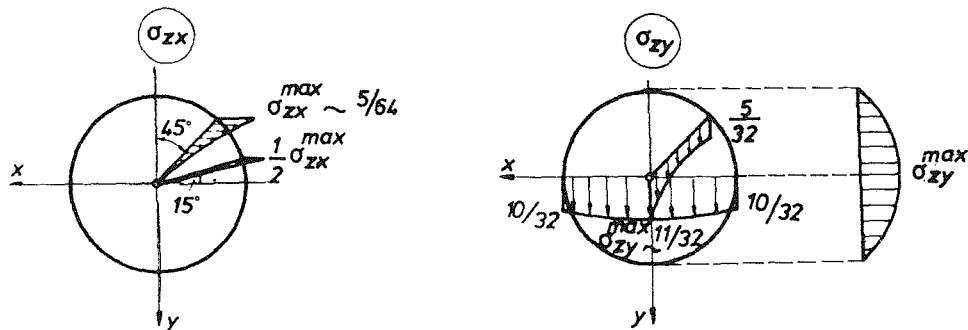
$$\sigma_{zx} = -\frac{5}{32} \frac{FR^2}{I_x} \frac{x}{R} \frac{y}{R}$$

$$\sigma_{zy} = \frac{1}{32} \frac{FR^2}{I_x} \left[11 \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) - \frac{x^2}{R^2} \right],$$

što je dijagramski prikazano na nekoliko karakterističnih mjesta poprečnog presjeka na sl. 11:8. Maksimalne vrijednosti ovih napona su:

$$\sigma_{zx}^{\max} = \frac{5}{64} \frac{FR^2}{I_x}, \quad \sigma_{zy}^{\max} = \frac{11}{32} \frac{FR^2}{I_x}.$$

Za $l = 10R$ je $\sigma_{zz}^{\max} = 10 \frac{FR^2}{I_x}$, tako da je u tom slučaju $\sigma_{zx}^{\max} = 22,7\%$ σ_{zy}^{\max} i $\sigma_{zy}^{\max} = 3,4\%$ σ_{zz}^{\max} .



Sl. 11:8.

11.5. Savijanje grede pravougaonog poprečnog presjeka

Posmatrajmo gredu pravougaonog poprečnog presjeka dimenzija $2a \times 2b$ na sl. 11:9. Jednačina konture ovog presjeka je

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0. \quad (1)$$

Ako funkciju f u (11.1:16) izaberemo da je

$$f(x) = \frac{Fb^2}{2I_x}, \quad (2)$$

tada diferencijalna jednačina koja definiše napone (11.1:16) postaje

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} x, \quad (3)$$

a konturni uslov (11.1:19)

$$\Phi = 0, \quad (4)$$

jer je na stranicama pravougaonika $y = \pm b$, $y^2 - b^2 = 0$, a na stranicama $x = \pm a$ je $\frac{dx}{ds} = 0$. Rješenje nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine (3) potražićemo kao zbir homogenog i partikularnog rješenja, tj.

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_p. \quad (5)$$

Da bismo našli Φ_p , pretpostavimo da je $\Phi_p = \Phi_p(x)$, što zamjenom u (3) daje nakon integracije

$$\Phi_p(x) = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{Fx^3}{6I_x} + C_1 x + C_2, \quad (6)$$

odnosno, birajući $C_1 = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Fa^2}{6I_x}$ i $C_2 = 0$,

$$\Phi_p(x) = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{6I_x} x(x^2 - a^2). \quad (7)$$

Konstantu C_1 izabrali smo tako da je $\Phi_p(\pm a) = 0$, što će biti pogodno u izvođenju koje slijedi.

Dio rješenja Φ_h naći ćemo rješavanjem homogene jednačine

$$\nabla^2 \Phi_h = 0 \quad (8)$$

uz granične uslove:

$$\Phi_h = 0 \quad \text{za} \quad x = \pm a \quad (9)$$

$$\Phi_h = -\Phi_p(x) \quad \text{za} \quad y = \pm b. \quad (10)$$

Jednačinu (8) možemo riješiti metodom razdvajanja promjenljivih pretpostavljajući da je

$$\Phi_h = X(x) \cdot Y(y), \quad (11)$$

što zamjenom u (8) daje:

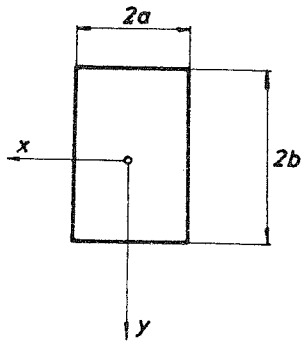
$$X(x) = A_n \cos \alpha_n x + B_n \sin \alpha_n x \quad (12)$$

$$Y(y) = C_n \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \operatorname{sh} \alpha_n y.$$

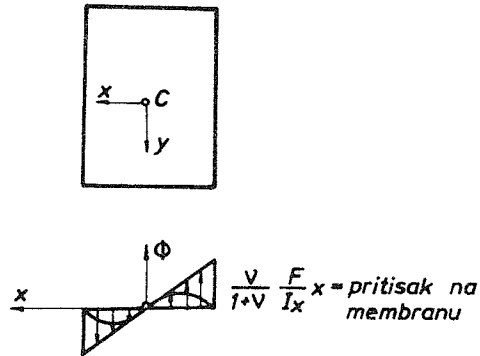
Zbog linearnosti jednačine (8) i suma rješenja (12) je rješenje jednačine, pa ćemo uzeti da je

$$\Phi_h = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \alpha_n x + B_n \sin \alpha_n x) (C_n \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \operatorname{sh} \alpha_n y). \quad (13)$$

No, na osnovu membranske analogije očekujemo da funkcija Φ ima oblik kao što je skicirano na sl. 11:10.



Sl. 11:9.



Sl. 11:10.

Odavde zaključujemo da funkcija Φ , pa prema tome i Φ_h , mora da bude neparna funkcija po x i parna po y , što znači da je u (13) $A_n = D_n = 0$, tj.

$$\Phi_h = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \alpha_n x \operatorname{ch} \alpha_n y. \quad (14)$$

Iz graničnog uslova da je $\Phi_h = 0$ za $x = \pm a$ dalje slijedi

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (15)$$

pa je

$$\Phi_h = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y. \quad (16)$$

Iz preostalog graničnog uslova (10) imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} x = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{6I_x} x (x^2 - a^2). \quad (17)$$

U relaciji (17) vidimo da su $\left(E_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b\right)$ Fourierovi koeficijenti funkcije na desnoj strani od (17), tj.

$$E_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a \left[\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{6I_x} x (x^2 - a^2) \right] \sin \frac{n\pi}{a} x dx, \quad (18)$$

odakle je nakon integracije

$$E_n = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b} \frac{2}{a} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{6I_x} \frac{a^4}{(n\pi)^3} (-1)^n. \quad (19)$$

Prema tome je konačno

$$\Phi_h = \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{Fa^3}{I_x} \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b} \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y, \quad (20)$$

pa je

$$\Phi = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} \left[\frac{1}{6} (x^3 - a^2 x) - \frac{2a^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b} \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y \right]. \quad (21)$$

Smičući naponi slijede diferenciranjem:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} \frac{2a^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b} \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zy} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{F}{2I_x} (b^2 - y^2) \\ &= \frac{F}{2I_x} (b^2 - y^2) + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} \left[\frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{3} \right) - \frac{2a^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b} \cos \frac{n\pi}{a} x \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Iz (23) se vidi da se komponenta smičućeg napona σ_{zy} mijenja duž x ose tako da je σ_{zy} maksimalno za $x = \pm a$, a minimalno za $x = 0$. To je zato što je $\partial \Phi / \partial x$ negativno na sredini vertikalnih stranica pravougaonika, a pozitivno u sredini pravougaonika.

Može se pokazati da je za pravougaonike čije su stranice veličine istog reda ($a \sim b$), smičući napon σ_{zx}^{\max} znatno manji od σ_{zy}^{\max} . Na primjer, za kvadrat $a = b$ i za $\nu = 1/3$ je $\sigma_{zx}^{\max} \approx 0,05 \frac{Fa^2}{I_x}$ (ovo je u stvari σ_{zx} u tački $x = \frac{2}{3}a$ i $y = 0$, gdje očekujemo σ_{zx}^{\max} jer je tamo nagib funkcije Φ prema y osi približno najveći), dok je $\sigma_{zy}^{\max} = 0,56 \frac{Fa^2}{I_x}$ (u tački $x = y = 0$), pa je $\sigma_{zx}^{\max} \approx 9\% \sigma_{zy}^{\max}$.

Za uske pravougaonike ($b \gg a$) (sl. 11:11) je približno $\Phi = \Phi(x)$ (izuzev u okolini krajeva $y = \pm b$), pa je:

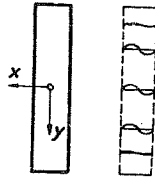
$$\sigma_{zx} = 0 \quad (24)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{F}{2I_x} (b^2 - y^2) + \frac{F}{2I_x} \frac{\nu}{1+\nu} \left(x^2 - \frac{a^2}{3} \right), \quad (25)$$

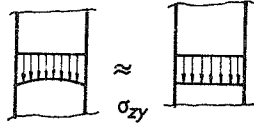
što slijedi direktnom integracijom obične diferencijalne jednačine po Φ . Očigledno je iz (25) da se σ_{zy} mijenja sa x , no je ta promjena toliko mala da se može zanemariti i sa dovoljno tačnosti uzeti da je

$$\sigma_{zy} = \frac{F}{2I_x} (b^2 - y^2), \quad (26)$$

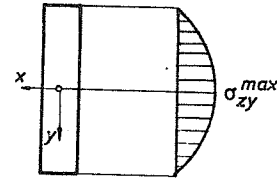
tj. σ_{zy} je konstantno po pravama paralelnim sa x osom (sl. 11:12), a parbolično se mijenja sa y osom (sl. 11:13).



Sl. 11:11.



Sl. 11:12.



Sl. 11:13.

Ako je, međutim, pravougaonik veoma širok ($b \ll a$), tada se može približno uzeti da je Φ linearna funkcija od x (osim u okolini krajeva $x = \pm a$) (sl. 11:14), pa je

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} x, \quad (27)$$

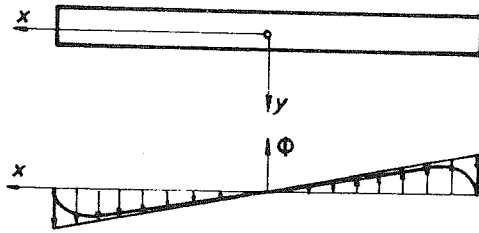
tj.

$$\Phi = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{2I_x} x (y^2 - b^2). \quad (28)$$

Naponi su:

$$\sigma_{zx} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{I_x} xy \quad (29)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{1}{1+\nu} \frac{F}{2I_x} (b^2 - y^2). \quad (30)$$



Sl. 11:14.

Važno je uočiti da za velike odnose a/b maksimalni smičući napon nije σ_{zy} već σ_{zx} (u tačkama na donjoj i gornjoj ivici pravougaonika blizu krajeva $x = \pm a$). No, za široke profile je uticaj smičućih napona zanemarljiv jer je veoma veliki normalni napon σ_{zz} .

11.6. Savijanje grede kružnog prstenastog poprečnog presjeka

Kružni prstenasti poprečni presjek grede izabrali smo da bismo ilustrovali rješavanje problema višestruko povezanog poprečnog presjeka. Kao što smo pokazali u poglavlju 11.2, treba riješiti Laplaceovu jednačinu (11.2:8) u unutrašnjosti prstena uz granični uslov (11.2:9) na konturama C_0 i C_1 i uslov (11.2:10). Zbog pogodnosti rješenja uvedimo polarne koordinate (r, θ) (sl. 11:15) tako da jednačine (11.2:8) – (11.2:10) glase:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{Fa^3}{2I_x} \left(\sin^2 \theta - \frac{\nu}{1+\nu} \cos^2 \theta \right) (-\sin \theta) \text{ na } C_0 \quad (2)$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{Fb^3}{2I_x} \left(\sin^2 \theta - \frac{\nu}{1+\nu} \cos^2 \theta \right) (-\sin \theta) \text{ na } C_1 \quad (3)$$

$$\oint_{C_1} \frac{\partial \Phi}{\partial r} d\theta = 0. \quad (4)$$

Granični uslovi (2) i (3) mogu se prepisati u obliku:

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{Fa^3}{8(1+\nu)I_x} [-(2\nu+3)\sin \theta + (1+2\nu)\sin 3\theta] \text{ na } C_0 \quad (5)$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{Fb^3}{8(1+\nu)I_x} [-(2\nu+3)\sin \theta + (1+2\nu)\sin 3\theta] \text{ na } C_1. \quad (6)$$

Ovakav oblik graničnih uslova više će nam odgovarati zbog strukture rješenja jednačine (1). Jednačinu (1) riješićemo metodom razdvajanja promjenljivih pretpostavljajući da je

$$\Phi(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta), \quad (7)$$

tako da dobijamo:

$$\begin{aligned} r^2 R'' + rR' - \alpha_n^2 R &= 0 \\ \Theta'' + \alpha_n^2 \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Oдавde je integracijom:

$$\begin{aligned} R &= A_n r^{\alpha_n} + B_n r^{-\alpha_n} \\ \Theta &= C_n \sin \alpha_n \theta + D_n \cos \alpha_n \theta, \end{aligned} \quad (9)$$

pa je

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{\alpha_n} + B_n r^{-\alpha_n}) (C_n \sin \alpha_n \theta + D_n \cos \alpha_n \theta). \quad (10)$$

Rješenje (10) zadovoljiće granične uslove (5) i (6) ako uzmemo da je:

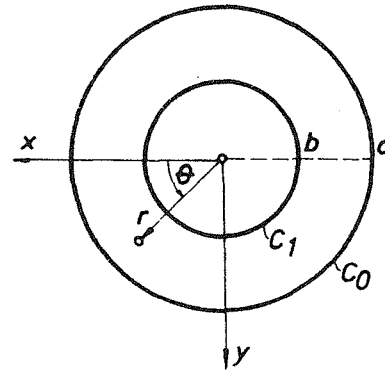
$$\begin{aligned} \alpha_n &= n, & C_n &= 0 & (n=1, 2, 3, \dots) \\ D_n &= 1 & (n=1, 3), & & D_n = 0 & (n=2, 4, 5, 6, \dots), \end{aligned}$$

pa je

$$\Phi = (A_1 r + B_1 r^{-1}) \cos \theta + (A_3 r^3 + B_3 r^{-3}) \cos 3\theta. \quad (11)$$

Konstante A_1, B_1, A_3, B_3 sada slijede iz (5) i (6):

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{F}{8I_x} \frac{2\nu+3}{1+\nu} (a^2 + b^2), & B_1 &= -\frac{F}{8I_x} \frac{2\nu+3}{1+\nu} a^2 b^2 \\ A_3 &= -\frac{F}{24I_x} \frac{1+2\nu}{1+\nu}, & B_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$



Sl. 11:15.

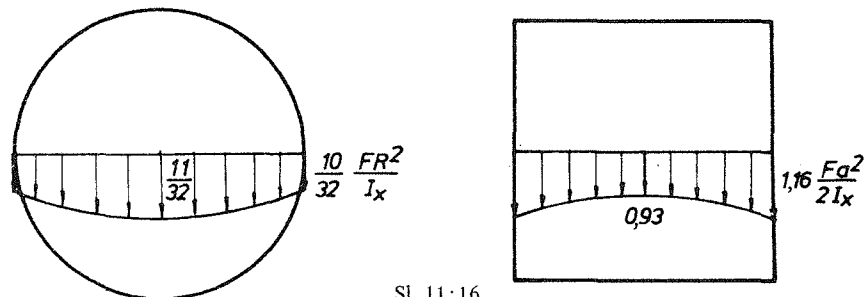
Integralni uslov (4) je očigledno ispunjen rješenjem (11). Naponi se dobijaju diferenciranjem iz (11) sa konstantama određenim u (12), saglasno izrazima:

$$\begin{aligned}\sigma_{zx} &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} \sin\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \frac{\cos\theta}{r} \\ \sigma_{zy} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \cos\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \frac{\sin\theta}{r} + \frac{Fr^2}{2I_x} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \cos^2\theta - \sin^2\theta \right)\end{aligned}\quad (13)$$

11.7. Elementarna teorija savijanja grede

U prethodnim poglavljima riješili smo egzaktno problem savijanja grede za slučaj nekoliko karakterističnih poprečnih presjeka grede (krug, elipsa, pravougaonik), tj. dobili smo tačne izraze za sve tri komponente napona σ_{zx} , σ_{zy} i σ_{zz} . Pri tome smo vidjeli da je od dvije komponente smičućeg napona σ_{zx} i σ_{zy} dominantnija komponenta σ_{zy} . Zaista, za kružni poprečni presjek je $\sigma_{zx}^{\max} = 22,7\% \sigma_{zy}^{\max}$, a za eliptični odnosa poluosu $a/b = 0,5$ je $\sigma_{zx}^{\max} = 12\% \sigma_{zy}^{\max}$. Ako je a/b manje od $0,5$, σ_{zx}^{\max} je još manje u poređenju sa σ_{zy}^{\max} . Za pravougaoni poprečni presjek je $\sigma_{zx}^{\max} = 9\% \sigma_{zy}^{\max}$ (za $a=b$), a ako je $b \gg a$, tada $\sigma_{zx} \rightarrow 0$. (Istina, za široke presjeke, recimo elipsu i pravougaonik kod kojih je $a \gg b$, σ_{zx}^{\max} može biti veće od σ_{zy}^{\max} , ali je tada normalni napon σ_{zz}^{\max} toliko veliki da su obje komponente smičućeg napona zanemarljivog uticaja u praktičnim proračunima). Zato se u inženjerskim proračunima savijanja grede obično zanemaruje komponenta smičućeg napona σ_{zx} i uzima u obzir samo komponenta σ_{zy} .

Osim toga, iz dobijenih tačnih izraza za σ_{zy} vidimo da se duž pravih $y = \text{const.}$ poprečnog presjeka σ_{zy} malo mijenja, tj. približno je konstantno duž tih pravih. Na primjer, duž prave $y=0$ (neutralne ose) σ_{zy} izgleda za krug i kvadrat kao što je prikazano na sl. 11:16.

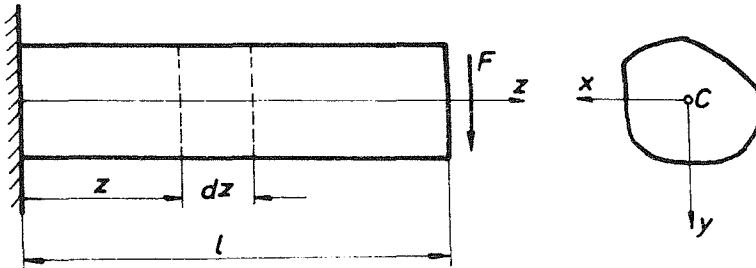


Sl. 11:16.

Zato se u inženjerskim proračunima uvodi i pretpostavka da je $\sigma_{zy} = \sigma_{zy}(y)$. Prema tome, u elementarnoj (tehničkoj) teoriji savijanja grede pretpostavlja se da je komponenta smičućeg napona paralelna ravni savijanja konstantna duž pravih paralelnih sa neutralnom osom, a komponenta smičućeg napona upravna na ravan savijanja se zanemaruje, tj.:

$$\begin{aligned}\sigma_{zy} &= \sigma_{zy}(y) \\ \sigma_{zx} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Ovo je tzv. hipoteza Žuravskog koja veoma uprošćava približno sračunavanje smičućeg napona u savijenoj gredi. Pokazaćemo sada kako se polazeći od ove hipoteze može jednostavno odrediti raspodjela smičućeg napona u savijenoj gredi. U tom cilju posmatrajmo konzolu opterećenu silom F na desnom kraju (sl. 11:17). Izdvojimo na mjestu z elementa grede dužine dz . Uticaj odbačenog dijela grede na ovaj dio predstavimo normalnim i smičućim naponima kao na sl. 11:18 (a). Izdvojimo, dalje, šrafirani dio grede na visini y od neutralne ose, kao što je prikazano na sl. 11:18 (b). (Napon σ_{zz} na slici je uzet po apsolutnoj vrijednosti).

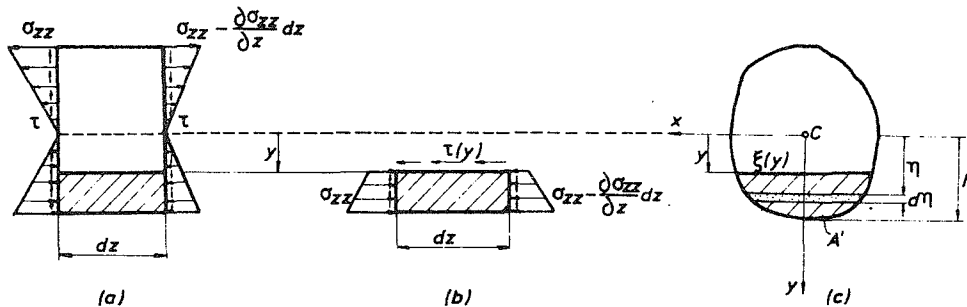


Sl. 11:17.

Iz uslova ravnoteže uočenog dijela grede da je suma svih sila u pravcu z ose jednaka nuli, slijedi

$$\int_{A'} \sigma_{zz} dA' - \tau(y) dz \cdot \xi(y) - \int_{A'} \left(\sigma_{zz} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \right) dA' = 0, \quad (2)$$

gdje je A' površina dijela poprečnog presjeka iznad nivoa $\xi(y)$ (sl. 11:18 (c)), dok je sa τ označen smičući napon σ_{zy} .



Sl. 11:18.

Iz (2) je dalje

$$\tau(y) \xi(y) = \int_{A'} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dA'. \quad (3)$$

No, normalni napon σ_{zz} na udaljenju η od neutralne ose dat je izrazom

$$\sigma_{zz}(\eta) = \frac{M_x(z)}{I_x} \eta, \quad (4)$$

gdje je $M_x(z) = -F(l-z)$, pa je

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{dM_x/dz}{I_x} \eta = \frac{F}{I_x} \eta. \quad (5)$$

Ovo zamjenom u (3) daje izraz za smičući napon na nivou y od neutralne ose

$$\tau(y) = \frac{F S'_x(y)}{I_x \xi(y)}. \quad (6)$$

U izrazu (6) veličina

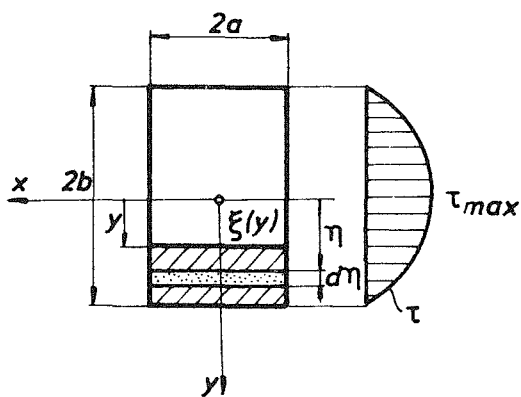
$$S'_x(y) = \int_{A'} \eta dA' = \int_y^h \eta \xi(\eta) d\eta \quad (7)$$

je statički moment dijela površine poprečnog presjeka iznad nivoa $\xi(y)$ (tj. površine A' na sl. 11:18 (c)).

Dakle, po elementarnoj teoriji savijanja grede smičući napon u poprečnom presjeku konzole opterećene silom F na kraju određuje se aproksimativno izrazom (6), dok je normalni napon dat tačnim izrazom (4). U inženjerskoj praksi se izrazi (4) i (6) koriste i u slučaju savijanja grede proizvoljno oslonjene i opterećene raspoređenim silama po bočnoj površini, s tim što se uzima da je:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x(z)}{I_x} y \quad \tau = \frac{T_y(z) S'_x(y)}{I_x \xi(y)}. \quad (8)$$

Dakle, naponi u bilo kom poprečnom presjeku, dovoljno daleko od opterećenja, zavise samo od veličine momenta savijanja i transferzalne sile u tom poprečnom presjeku. U okolini tačaka dještva spoljašnjih sila postoji složenija raspodjela napona, ali je ovo lokalnog karaktera.



Sl. 11:19.

Ako se i poprečni presjek grede postepeno mijenja, tada se za normalni napon aproksimativno može koristiti izraz

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x(z)}{I_x(z)} y, \quad (9)$$

dok je izraz

$$\tau = \frac{T_y(z) S'_x(y)}{I_x(z) \xi(y)}$$

sasvim nezadovoljavajući za određivanje smičućih napona, pa treba koristiti drugi izraz koji se može izvesti, u što se mi ovdje nećemo upuštati.

Ilustrujmo primjenu obrasca (6) na pravougaonom poprečnom presjeku (sl. 11:19).

Za pravougaonik je:

$$\xi(y) = 2a, \quad I_x = \frac{1}{12} (2a) (2b)^3 = \frac{4}{3} ab^3$$

$$S'_x(y) = \int_{A'} \eta dA' = \int_y^b \eta \cdot 2a d\eta = a (b^2 - y^2),$$

pa zamjenom u (6) dobijamo:

$$\tau(y) = \frac{3F}{8ab^3} (b^2 - y^2), \quad (10)$$

tj. smičući napon τ se mijenja duž y ose po zakonu kvadratne parabole. Maksimalna vrijednost je u tačkama neutralne ose i iznosi

$$\tau_{\max} = \frac{3F}{8ab} = \frac{3F}{2A}, \quad (11)$$

gdje je $A = 4ab$ površina poprečnog presjeka.

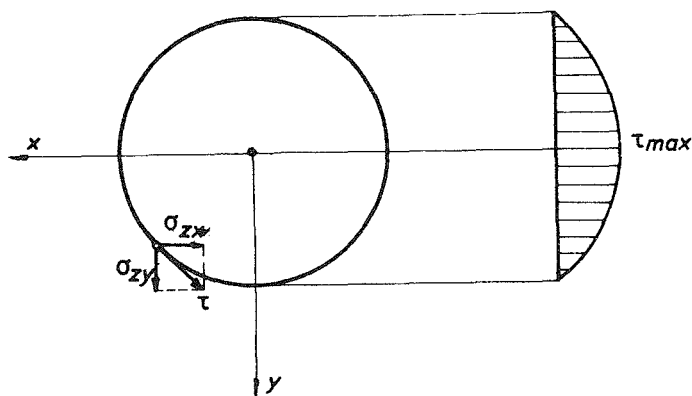
Poređenjem izraza (10) za smičući napon $\tau = \sigma_{xy}$ dobijenog na osnovu hipoteze Žuravskog sa tačnim izrazom (11.5:23), vidimo da dio tačnog rješenja koji je dat u (11.5:23) sa $(-\partial\Phi/\partial x)$ predstavlja korekciju rješenja (10). Ova korekcija je, međutim, veoma mala, pa je približno rješenje (10) sasvim zadovoljavajuće u praktičnoj upotrebi.

Za kružni poprečni presjek poluprečnika R dobija se po hipotezi Žuravskog

$$\tau(y) = \frac{4}{3} \frac{F}{\pi R^4} (R^2 - y^2), \quad (12)$$

što takođe predstavlja paraboličnu promjenu po y osi, sa maksimalnom vrijednošću za $y=0$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{F}{A}. \quad (13)$$

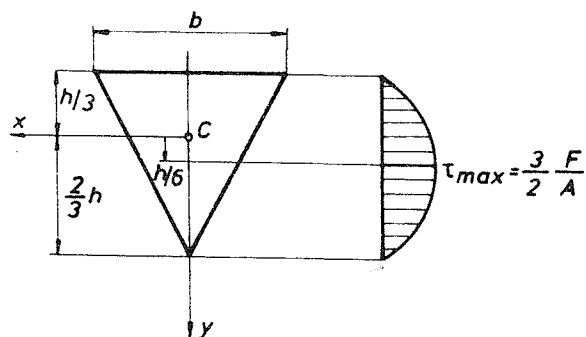


Sl. 11:20.

Napominjemo, međutim, da (12) predstavlja komponentu smičućeg napona σ_{zy} jer je evidentno da postoji i komponenta smičućeg napona $\sigma_{zx} \neq 0$, koju smo zanemarili. Zaista, zbog stava o konjugovanosti smičućih napona ukupan smičući napon u tačkama konture poprečnog presjeka mora biti tangentan na konturu, jer je bočna površina grede slobodna od opterećenja. Prema tome, pored komponente σ_{zy} koju smo odredili izrazom (12), postoji i komponenta σ_{zx} koja, zajedno sa σ_{zy} , čini ukupan smičući napon tangentan na konturu, kao što je prikazano na sl. 11:20. Mi

samo ranije pokazali da je σ_{zx}^{\max} najčešće znatno manje od σ_{zy}^{\max} i da je u proračunima dovoljno uključiti samo komponentu napona σ_{zy} sračunatu po hipotezi Žuravskog, ali je važno biti svjestan ograničenja i pravog značenja te aproksimacije i uprošćenja.

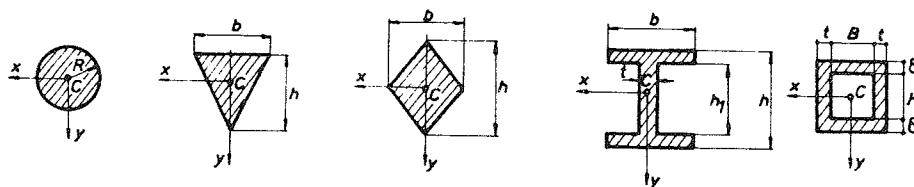
Slično se određuju smičući naponi za ostale poprečne presjeke. Iako je to slučaj sa pravougaonim i kružnim poprečnim presjekom, maksimalni smičući napon τ_{\max} ne mora biti u tačkama neutralne ose. Na primjer, za trougaoni poprečni presjek na sl. 11:21, τ_{\max} se javlja u tačkama na udaljenju $y = \frac{1}{6}h$ od neutralne ose, tj. na polovini visine trougla.



Sl. 11:21.

Primjer 11.1.

Koristeći hipotezu Žuravskog odrediti smičuće napone usljed transferzalne sile za poprečne presjeke na sl. P 11.1 (a).



Sl. P 11.1 (a).

Rješenje:

a) Za kružni poprečni presjek (sl. P 11.1 (b)) je:

$$\xi(\eta) = 2\sqrt{R^2 - \eta^2}$$

$$S'_x(y) = \int_y^R \eta dA' = \int_y^R \eta \xi(\eta) d\eta = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2},$$

pa zamjenom u formulu (11.7:6) dobijamo

$$\tau(y) = \frac{F}{3I_x} (R^2 - y^2), \quad I_x = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Maksimalni smičući napon je

$$\tau_{\max} = \tau(y=0) = \frac{4F}{3A}, \quad A = R^2\pi.$$

b) Za trougao na sl. P 11.1 (c) je:

$$\xi(\eta) = \frac{2b}{3} - \frac{b}{h}\eta$$

$$S'_x(y) = \int_y^{2h/3} \eta \left(\frac{2b}{3} - \frac{b}{h}\eta \right) d\eta = \frac{4}{81}bh^2 + \frac{by^3}{h3} - \frac{b}{3}y^2,$$

pa je

$$\tau(y) = \frac{F}{27I_x} (2h^2 + 3hy - 9y^2), \quad I_x = \frac{1}{36}bh^3.$$

Maksimalni smičući napon je određen iz

$$\frac{d\tau}{dy} = 0, \quad y = \frac{1}{6}h,$$

što daje

$$\tau_{\max} = \frac{3F}{2A}, \quad A = \frac{bh}{2}.$$

c) Za deltoid (sl. P 11.1 (d)) je:

$$\xi(\eta) = b \left(1 - \frac{2\eta}{h} \right)$$

$$S'_x(y) = \int_y^{h/2} \eta b \left(1 - \frac{2\eta}{h} \right) d\eta = \frac{1}{24}b \left(h^2 + 16\frac{y^3}{h} - 12y^2 \right),$$

pa je

$$\tau(y) = \frac{F}{24I_x} (h^2 + 2hy - 8y^2), \quad I_x = \frac{bh^3}{48}.$$

Očigledno $\tau_0 = \tau(y=0) = \frac{F}{A}$, dok je maksimalni smičući napon

$$\tau_{\max} = \tau \left(y = \frac{1}{8}h \right) = \frac{9F}{8A} = 1,125 \tau_0.$$

d) Za I profil na sl. P 11.1 (e) imamo za $y \leq \frac{h}{2}$, $\xi = t$ i

$$S'_x(y) = \frac{t}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \frac{b}{2} \delta (h + \delta).$$

pa je

$$\tau(y) = \frac{F}{2I_x} \left[\left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + b \frac{\delta}{t} (h + \delta) \right].$$

Prema tome je:

$$\tau_{\max} = \tau(y=0) = \frac{F}{2I_x} \left[\frac{h^2}{4} + b \frac{\delta}{t} (h + \delta) \right]$$

$$\tau\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = \frac{F}{2I_x} \left[b \frac{\delta}{t} (h + \delta) \right] \cong 80\% \tau_{\max}.$$

Za $y \geq h/2$ je $\xi = b$ i

$$S'_x(y) = \frac{1}{2} b \left[\left(\frac{h}{2} + \delta \right)^2 - y^2 \right],$$

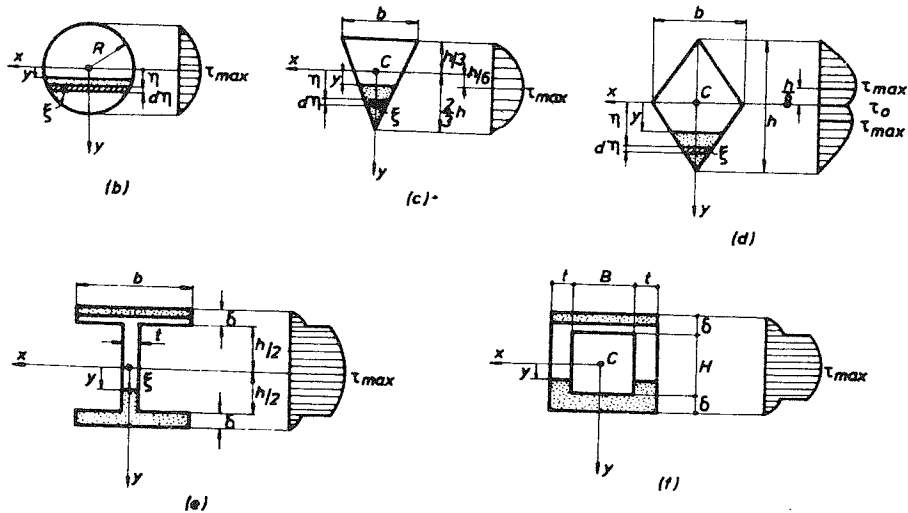
pa je:

$$\tau(y) = \frac{F}{2I_x} \left[\left(\frac{h}{2} + \delta \right)^2 - y^2 \right]$$

$$\tau\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = \frac{F}{2I_x} [\delta (h + \delta)].$$

e) Za kutijasti profil na sl. P 11.1 (f) za $y \leq \frac{H}{2}$ je $\xi = 2t$ i

$$S'_x(y) = 2t \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) + \frac{1}{2} \delta (B + 2t) (H + \delta),$$



Sl. P 11.1 (b) - (f).

pa je:

$$\tau(y) = \frac{F}{I_x} \left[\left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) + \frac{\delta}{4t} (B + 2t) (H + \delta) \right]$$

$$\tau_{\max} = \tau(y=0) = \frac{F}{I_x} \left[\frac{H^2}{4} + \frac{\delta}{4t} (B + 2t) (H + \delta) \right]$$

$$\tau \left(y = \pm \frac{H}{2} \right) = \frac{F}{I_x} \left[\frac{\delta}{4t} (B + 2t) (H + \delta) \right]$$

Za $y \geq \frac{H}{2}$ imamo $\xi = B + 2t$ i

$$S'_x(y) = \frac{B + 2t}{2} \left[\left(\frac{H}{2} + \delta \right)^2 - y^2 \right]$$

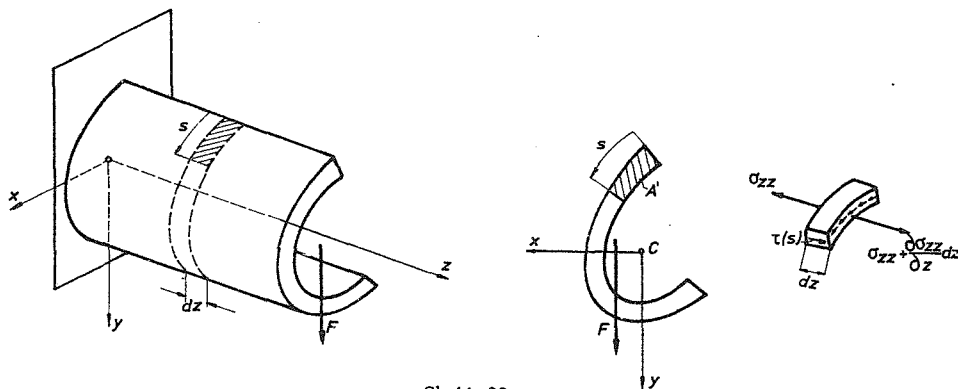
pa je:

$$\tau(y) = \frac{F}{2I_x} \left[\left(\frac{H}{2} + \delta \right)^2 - y^2 \right]$$

$$\tau \left(y = \pm \frac{H}{2} \right) = \frac{F}{2I_x} [\delta (H + \delta)].$$

11.8. Savijanje grede tankozidnog otvorenog profila

Pokazaćemo sada kako se na elementaran način mogu naći smičući naponi u gredi tankozidnog otvorenog profila (poprečnog presjeka) opterećenoj silama na savijanje. Neka je debljina poprečnog presjeka δ , a ukupna dužina profila L ($\delta \ll L$). Neka su x i y glavne centralne ose inercije poprečnog presjeka i neka sila F djeluje paralelno y osi (sl. 11:22).



Sl. 11:22.

Izdvojimo na mjestu z elemenat grede dz dužine s kao što je prikazano na sl. 11:22. Uticaj odbačenog dijela grede na ovaj dio predstaviceemo normalnim i smičućim naponima. Pri tome pretpostavljamo da je smičući napon konstantan po debljini

$\delta = \delta(s)$ i da je u pravcu srednje linije profila, tj. paralelan sa bočnom površinom grede, što zadovoljava uslov da je bočna površina grede slobodna od opterećenja. Iz uslova ravnoteže da je suma svih sila u pravcu z ose jednaka nuli, slijedi

$$\int_0^s \sigma_{zz} dA' - \tau(s) dz \delta(s) - \int_0^s \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \right) dA' = 0, \quad (1)$$

gdje je $A' = \int_0^s \delta(s) ds$ površina izdvojenog dijela poprečnog presjeka. Iz (1) je dalje

$$\tau(s) = \frac{-1}{\delta(s)} \int_0^s \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dA'. \quad (2)$$

No, normalni napon na udaljenju η od neutralne ose je dat izrazom

$$\sigma_{zz}(\eta) = \frac{M_x(z)}{I_x} \eta, \quad (3)$$

gdje je $M_x(z) = -F(l-z)$, pa je

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{F}{I_x} \eta, \quad (4)$$

što zamjenom u (2) daje

$$\tau(s) = - \frac{F S'_x(s)}{I_x \delta(s)}. \quad (5)$$

U (5) je

$$S'_x(s) = \int_0^s \eta dA' \quad (6)$$

statički moment površine A' u odnosu na neutralnu x osu. Ovo je potpuno analogno formuli Žuravskog (11.7: 6), s tim što je ovdje $\tau = \tau(s)$ smičući napon koji je paralelan srednjoj liniji tankozidnog poprečnog presjeka i konstantan po debljini poprečnog presjeka. Proizvod

$$\tau(s) \delta(s) = - \frac{F S'_x(s)}{I_x} \quad (7)$$

naziva se tok smicanja. Ovaj tok ima stalan smjer duž profila, jednak je nuli na krajevima profila, a ima maksimalnu vrijednost tamo gdje je S'_x maksimalno.

Ako bismo sada redukovali napone (5) na težište C poprečnog presjeka, dobili bismo silu $T_y = F$ i moment

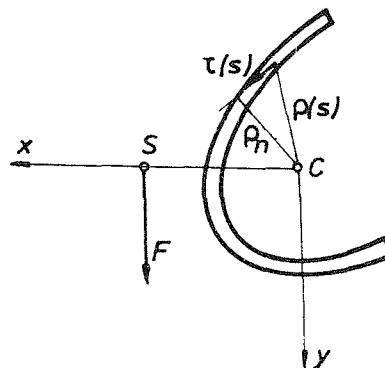
$$M_z = \int_0^L \rho_n(s) \tau(s) \delta(s) ds. \quad (8)$$

Prema tome, rješenje (5) odgovaraće slučaju kada sila F djeluje paralelno y osi na udaljenju

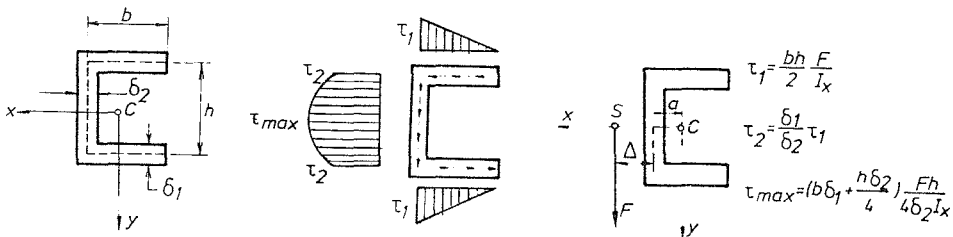
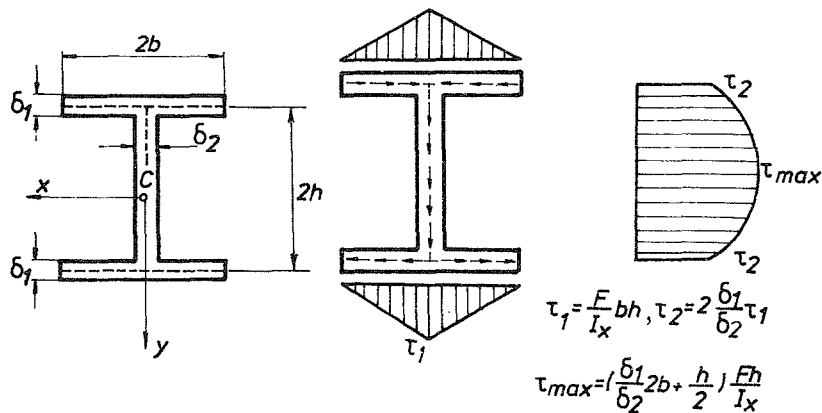
$$e = \frac{M_z}{F} \quad (9)$$

od težišta poprečnog presjeka (sl. 11:23). Tačka S kroz koju prolazi linija dještva sile F naziva se centar savijanja (ili smicanja) datog profila.

Lako je pokazati koristeći formulu (5) da je raspodjela smičućeg napona kod I profila kao na sl. 11:24. S obzirom da I profil ima dvije ose simetrije, centar smicanja mu je u težištu.



Sl. 11:23.

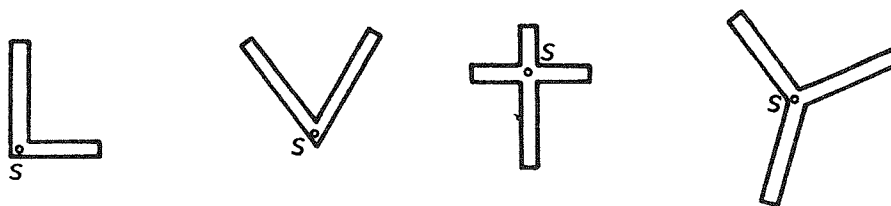


Za [profil na sl. 11:25 se, međutim, dobija

$$\Delta = \frac{b^2 h^2 \delta_1}{4I_x} = \frac{3b^2 \delta_1}{h\delta_2 + 6b\delta_1},$$

tj. centar smicanja je tačka S udesno pomjerena za $e = a + \Delta$.

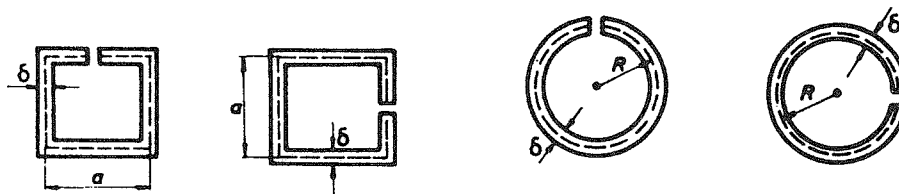
Očigledno je da je za profile sastavljene iz dva ili više pravougaonih dijelova koji se svi susstiču u jednoj tački (sl. 11:26) centar smicanja u tački susticanja. Ako profil ima osu simetrije, centar smicanja je na njoj. Ako profil ima dvije ose simetrije, centar smicanja je u presjeku tih osa (tj. u težištu profila). Centar smicanja poklapa se sa težištem i za profile koji imaju simetriju u odnosu na težište (na primjer Z profil).



Sl. 11:26.

Primjer 11.2.

Odrediti smičuće napone za tankozidne profile na sl. P 11.2 (a) pod djejtvom sile $T_y = F$. Odrediti centar smicanja za svaki od profila.



Sl. P 11.2 (a).

Rješenje:

a) Na dijelu 1–2 profila na sl. P 11.2 (b) je:

$$S'_x = \delta x \left(-\frac{a}{2} \right), \quad \tau = + \frac{F}{2I_x} ax.$$

Na dijelu 2–3 je:

$$S'_x = -\frac{a^2\delta}{4} + \frac{\delta}{2}\left(y^2 - \frac{a^2}{4}\right), \quad \tau = \frac{F}{I_x} \left[+\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{a^2}{4}\right) \right].$$

Na dijelu 3–4 je:

$$S'_x = -\delta \frac{a^2}{4} + \delta \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right), \quad \tau = \frac{F}{I_x} \left[+\frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right) \right],$$

što je dijagramski prikazano na sl. P 11.2 (b). Centar smicanja se poklapa sa težištem profila.

b) Na dijelu 1–2 je:

$$S'_x = -\frac{1}{2}\delta y^2, \quad \tau = +\frac{F}{2I_x} y^2.$$

Na dijelu 2–3 je:

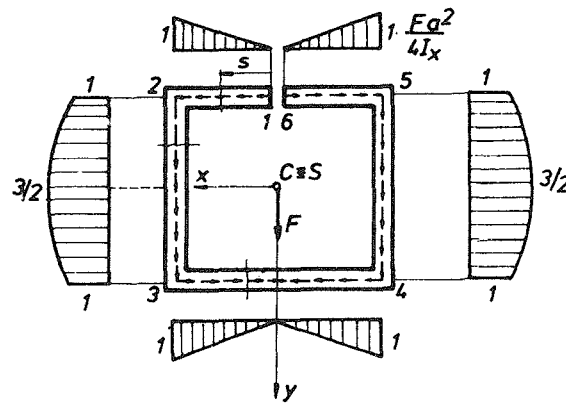
$$S'_x = -\frac{3}{8}\delta a^2 - \frac{1}{2}\delta ax, \quad \tau = +\frac{F}{I_x} \left(\frac{3a^2}{8} + \frac{a}{2}x \right),$$

a na dijelu 3–4:

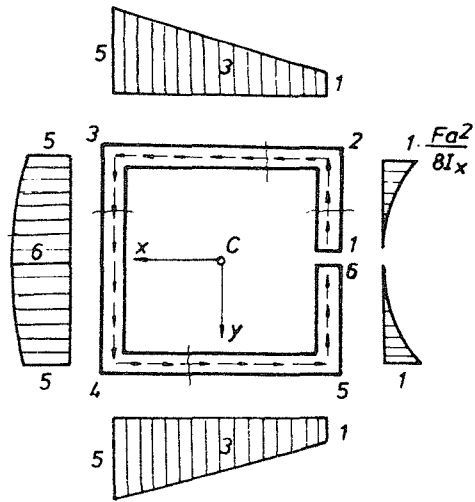
$$S'_x = -\frac{5}{8}\delta a^2 + \frac{1}{2}\delta \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right), \quad \tau = \frac{F}{I_x} \left[+\frac{5a^2}{8} - \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right) \right].$$

Najzad, na dijelu 4–5 je:

$$S'_x = -\frac{5}{8}\delta a^2 + \frac{1}{2}\delta a \left(\frac{a}{2} - x \right), \quad \tau = \frac{F}{I_x} \left[+\frac{5a^2}{8} - \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - x \right) \right].$$



Sl. P 11.2 (b).



Sl. P 11.2 (c).

Dijagrami su prikazani na sl. P 11.2 (c). Da bismo našli centar smicanja profila, nađimo prvo rezultujuće sile po dijelovima profila (sl. P 11.2 (d)). Imamo:

$$F_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^0 + \frac{F}{I_x} \frac{y^2}{2} \delta dy = \frac{F \delta a^3}{48 I_x} = \frac{1}{32} F$$

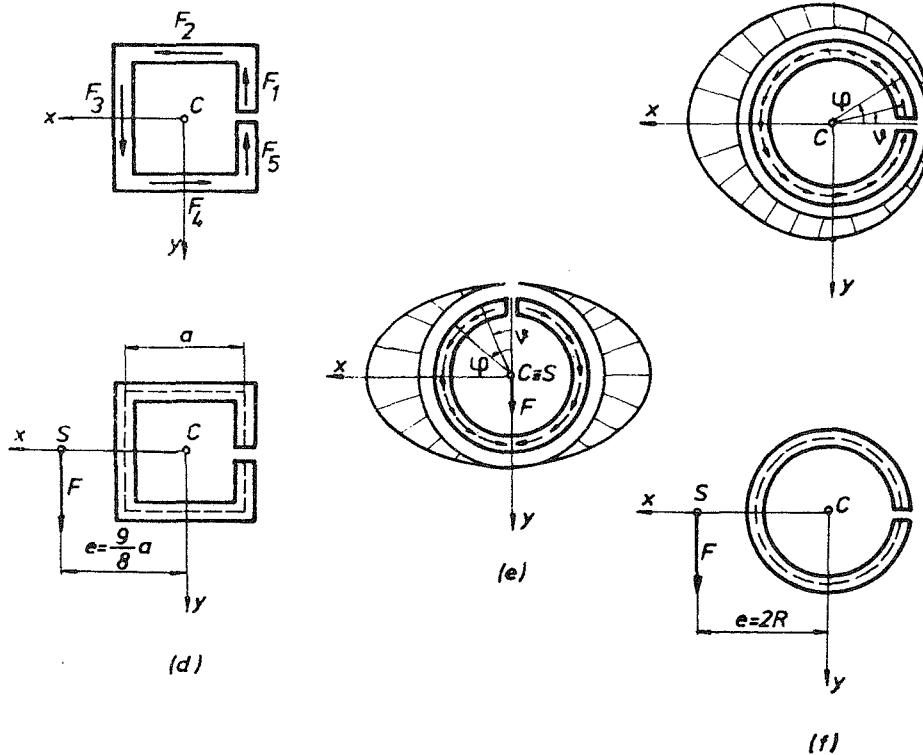
$$\equiv F_5$$

$$F_2 = \frac{9}{16} F \equiv +F_4, \quad F_3 = \frac{17}{16} F.$$

Centar smicanja dobijamo iz:

$$e = \frac{M_c}{F} = -\frac{9}{8} a$$

$$M_c = F_3 \frac{a}{2} + F_1 \frac{a}{2} + F_5 \frac{a}{2} + F_2 \frac{a}{2} + F_4 \frac{a}{2} = \frac{9}{8} a F.$$



Sl. P 11.2 (d) - (f).

c) U ovom slučaju je:

$$S'_x = \int_0^\varphi -R \cos \vartheta \delta R d\vartheta = -R^2 \delta \sin \varphi$$

$$\tau = \frac{F}{\pi R \delta} \sin \varphi, \quad I_x = \pi R^3 \delta,$$

a centar smicanja se poklapa sa težištem profila (sl. P 11.2 (e)).

d) Za profil na sl. P 11.2 (f) je:

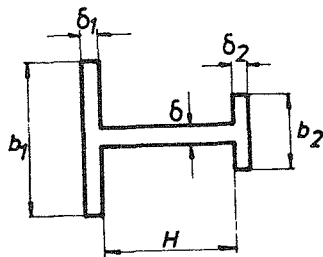
$$S'_x = \int_0^\varphi -R \sin \vartheta \delta R d\vartheta = R^2 \delta (\cos \varphi - 1)$$

$$\tau = \frac{F}{\pi R \delta} (1 - \cos \varphi)$$

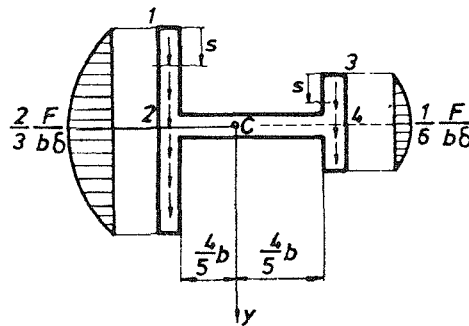
Centar smicanja dobijamo iz:

$$e = \frac{|M_c|}{F} = 2R$$

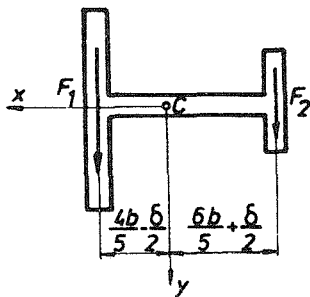
$$M_c = \int_0^{2\pi} \tau \delta R^2 d\varphi = +2FR.$$



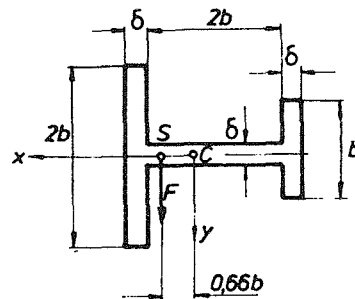
(a)



(b)



(c)



(d)

Sl. P 11.3.

Primjer 11.3.

Za profil na sl. P 11.3 (a) odrediti centar smicanja. Dato je:

$$b_1 = 2b, \quad b_2 = b, \quad H = 2b, \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta.$$

Rješenje:

Moment inercije profila je $I_x = \frac{3}{4} b^3 \delta$. Dalje imamo (sl. P 11.3 (b)):

dio 1–2:

$$S'_x(s) = \delta s \left(b - \frac{s}{2} \right), \quad \tau(s) = \frac{F}{I_x} \left(b - \frac{s}{2} \right) s$$
$$\tau_2 = \tau(s=b) = \frac{2}{3} \frac{F}{b\delta},$$

dio 3–4:

$$S'_x(s) = \delta s \left(\frac{b}{2} - \frac{s}{2} \right), \quad \tau(s) = \frac{F}{2I_x} (b-s) s$$
$$\tau_4 = \tau\left(s = \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{6} \frac{F}{b\delta},$$

dio 2–4:

$$S'_x = 0, \quad \tau = 0$$

(tj. dio 2–4 ne prihvata opterećenje, već samo vertikalna rebra).

Rezultujuće sile u rebrima su (sl. P 11.3 (c)):

$$F_1 = 2 \int_0^b \delta \tau ds = 2 \int_0^b \delta \frac{F}{I_x} \left(b - \frac{s}{2} \right) s ds = \frac{8}{9} F$$
$$F_2 = \frac{1}{9} F,$$

a centar smicanja dobijamo iz

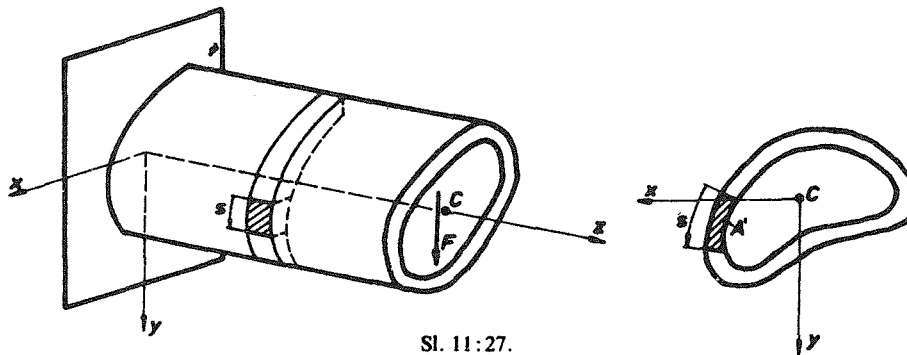
$$e = \frac{M_c}{F} = 0,58 b + 0,4 \delta, \quad M_c = F_1 \left(\frac{4}{5} b + \frac{\delta}{2} \right) - F_2 \left(\frac{6}{5} b + \frac{\delta}{2} \right).$$

Na primjer, za $\delta = 0,2b$ je $e = 0,66b$ (sl. P 11.3 (d)).

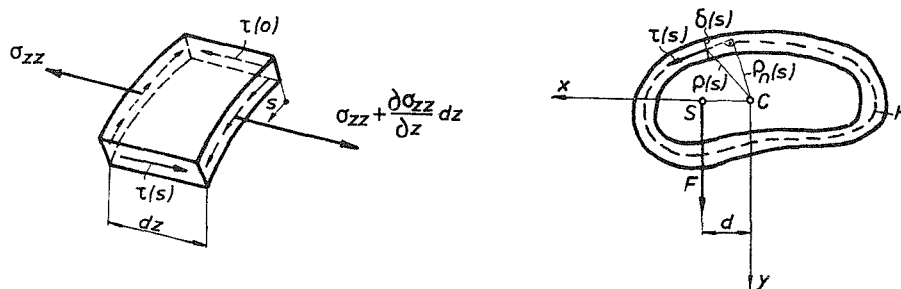
11.9. Savijanje grede tankozidnog zatvorenog profila

Neka je greda zatvorenog tankozidnog profila opterećena na savijanje silom F koja je paralelna y osi, pri čemu su x i y glavne centralne ose inercije poprečnog presjeka (profila) (sl. 11:27). Izdvojimo na nekom mjestu z element grede dz dužine s . Lučnu koordinatu s mjerimo počev od proizvoljnog mjesta, recimo od tačke $y=0$ profila. Uticaj odbačenog dijela grede na ovaj dio predstavimo

normalnim i smičućim naponima kao što je prikazano na sl. 11:28. Pri tome pretpostavljamo da je smičući napon $\tau = \tau(s)$ konstantan po debljini $\delta = \delta(s)$ i da je u pravcu srednje linije profila, tj. paralelan sa bočnom površinom grede (što zadovoljava uslov da je bočna površina slobodna od opterećenja).



Sl. 11:27.



Sl. 11:29.

Sa $\tau(0)$ označen je smičući napon na mjestu $s=0$, a sa $\tau(s)$ na mjestu s . Iz uslova ravnoteže da je suma svih sila u pravcu z ose jednaka nuli slijedi

$$\int_0^s \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \delta(s) ds - \tau(0) \delta(0) + \tau(s) \delta(s) = 0. \quad (1)$$

Normalni napon na visini $y=y(s)$ od neutralne ose je

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x(z)}{I_x} y(s) = -\frac{F(l-z)}{I_x} y(s), \quad (2)$$

što zamjenom u (1) daje

$$\frac{F}{I_x} \int_0^s y(s) dA' - \tau(0) \delta(0) + \tau(s) \delta(s) = 0. \quad (3)$$

Oдавде je

$$\tau(s) = \frac{\delta(0)}{\delta(s)} \tau(0) - \frac{F S'_x(s)}{I_x \delta(s)}, \quad (4)$$

gdje je

$$S'_x(s) = \int_0^s y(s) dA' \quad (5)$$

statički moment površine A' šrafirano prikazane na sl. 11:27.

Izraz (4) je traženi izraz za smičući napon $\tau = \tau(s)$ u gredi (konzoli) tankozidnog zatvorenog profila. Kao što vidimo, on se razlikuje od izraza za otvoreni profil (11.8:5) za član $[\delta(0)/\delta(s)] \tau(0)$. Veličina napona $\tau(0)$ je još uvijek neodređena i zavisi od mjesta na kom djeluje sila F , tj. od udaljenja sile F od y ose. Zaista, izborom vrijednosti za $\tau(0)$ (recimo $\tau(0) = \tau_0$), (4) predstavlja rješenje problema u kome sila djeluje na rastojanju d od težišta definisanom sa

$$d = \frac{M_z}{F}, \quad (6)$$

gdje je

$$M_z = \oint_K \rho_n(s) \tau(s) \delta(s) ds \quad (7)$$

moment koji se dobija redukcijom napona $\tau(s)$ na težište C profila (sl. 11:29).

Očigledno, za različiti izbor vrijednosti za τ_0 dobijamo različitu vrijednost za d , tj. različite vrste opterećenja koje se međusobno razlikuju za odgovarajuću, superponiranu torziju. Pitanje se onda logično nameće: na kom udaljenju od y ose treba da djeluje sila F pa da imamo samo savijanje bez torzije tankozidne zatvorene cijevi. Odgovor je, naravno, da sila F treba da djeluje na onom udaljenju od y ose za koje je ugao torzije (θ) jednak nuli. Ovaj uslov definiše vrijednost konstante $\tau(0)$ u (4) koja odgovara savijanju bez torzije, a onda iz (6) nalazimo korespondentno udaljenje sile F od y ose.

Može se pokazati da je ugao torzije profila opterećenog transferzalnom silom F dat sa

$$\theta = \frac{1}{2GA} \oint_K \tau(s) ds, \quad (8)$$

gdje je G modul klizanja, a A površina ograničena srednjom linijom K profila.

Izraz (8) identičan je sa Bredtovom formulom koja daje ugao torzije tankozidne zatvorene cijevi usljed čistog uvijanja momentom torzije, s tom što je u (8) smičući napon $\tau(s)$ posljedica transferzalne sile F dat izrazom (4), dok je kod čiste torzije smičući napon posljedica momenta torzija M_t i dat je izrazom $\tau(s) = M_t/2\delta(s)A$. Osim toga kod čiste torzije poprečni presjek geometrijski ne mijenja oblik u svojoj ravni, tj. prosto zarotira u njoj (plus, naravno, vitoperenje), dok kod savijanja silom poprečni presjek geometrijski mijenja oblik u svojoj ravni i ne vrši prostu rotaciju u njoj.

Ako hoćemo savijanje bez torzije, mora biti

$$\oint_K \tau(s) ds = 0, \quad (9)$$

što definiše korespondentnu vrijednost konstante $\tau(0)$ u (4). Unošenjem (4) u (9) dobijamo

$$\tau(0) = \frac{F}{\delta(0)I_x} \frac{\oint_K \frac{S'_x(s)}{\delta(s)} ds}{\oint_K \frac{ds}{\delta(s)}}. \quad (10)$$

Položaj sile koji odgovara savijanju bez torzije sada nalazimo iz (6), nakon što je u (7) unijeto (4) sa konstantom $\tau(0)$ određenom iz (10). Tačka S kroz koju prolazi ovako određeni pravac sile F predstavlja centar smicanja (savijanja) profila. Ako sila F ne prolazi kroz S , tada imamo savijanje sa torzijom, pa na rješenje od savijanja bez torzije treba superponirati i rješenje od čistog uvijanja momentom $M_s = Fa$, gdje je a odstojanje sile F od centra smicanja.

Primjer 11.4.

Odrediti smičuće napone u tankom kružnom prstenu na sl. P 11.4 (a).

Rješenje:

Kako je

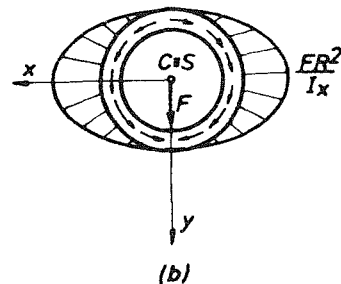
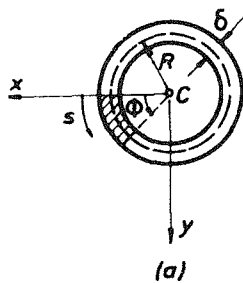
$$S'_x(s) = \int_0^\Phi R \sin \Phi R \delta d\Phi = R^2 \delta (1 - \cos \Phi),$$

iz (11.9:4) imamo

$$\tau(\Phi) = \tau(0) - \frac{FR^2}{I_x} (1 - \cos \Phi),$$

gdje je $\tau(0)$ određeno sa (11.9:10)

$$\tau(0) = \frac{F}{\delta I_x} \frac{\int_0^{2\pi} R^2 \delta (1 - \cos \Phi) d\Phi}{2\pi} = \frac{FR^2}{I_x}.$$



Sl. P 11.4.

Dakle,

$$\tau(\Phi) = \frac{FR^2}{I_x} \cos \Phi,$$

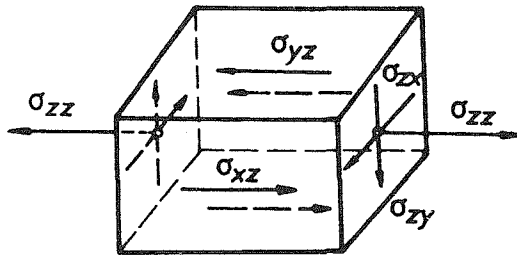
što je prikazano na sl. P 11.4 (b).

Centar smicanja određen je iz

$$e = \frac{M_z}{F} = 0, \quad M_z = \int_0^{2\pi} \tau(\Phi) \delta R^2 d\Phi \equiv 0,$$

pa je $e = 0$, tj. centar smicanja se poklapa sa težištem profila.

11.10. Glavni naponi kod grede savijene silama



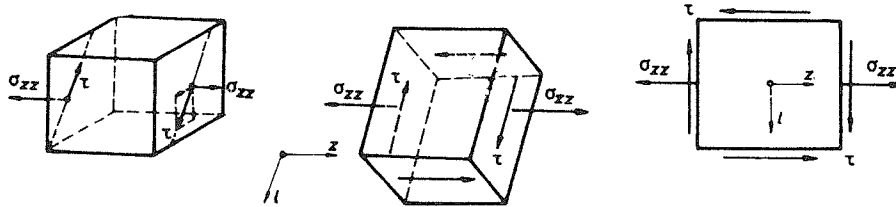
Sl. 11:30.

Vidjeli smo da su od šest komponenti napona u gredi savijenoj silama tri komponente različite od nule, pa tenzor napona u proizvoljnoj tački grede glasi

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Ako izdvojimo element napregnute grede sa stranama paralelnim koordinatnim ravnima, on je u stanju napona kao što je prikazano na sl. 11:30. Ako, međutim, saberemo smičuće napone σ_{zx} i σ_{zy} u rezultujući smičući napon τ koji djeluje u ravni $z-l$ (sl. 11:31), onda je evidentno da

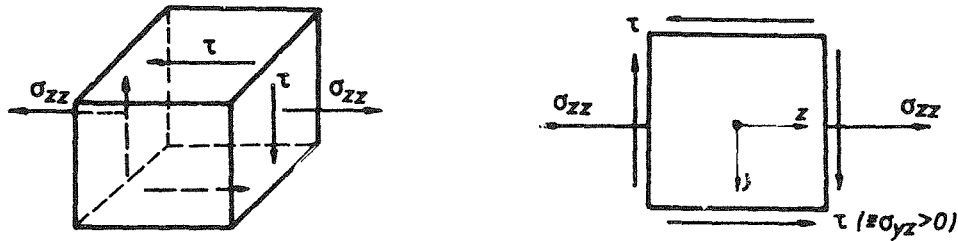
imamo ravno stanje napona u ravni $z-l$.



Sl. 11:31.

Ako zanemarimo komponentu smičućeg napona σ_{zx} (što po pravilu radimo u elementarnoj, tehničkoj teoriji savijanja), onda imamo ravno stanje napona u ravni $y-z$, kao što je prikazano na sl. 11:32. Da bismo odredili glavne napone i njihove pravce u datoj tački grede, koristimo se obrascima (1.12.1:11):

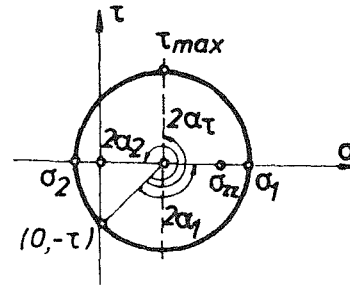
$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} \pm \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2}) \quad \text{tg } 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma_{zz}}. \quad (1)$$



Sl. 11:32.

Mohrov krug napona prikazan je, na sl. 11:33. Određivanje glavnih napona u opterećenoj gredi je izuzetno važno jer se preko njih (saglasno nekoj od hipoteza o slomu) formuliše kriterijum za izdržljivost grede i njeno dimenzionisanje i proračun.

Jasno je da se glavni naponi mijenjaju od tačke do tačke u gredi. Da bismo to ilustrovali, posmatrajmo stanje napona u gredi pravougao-nog prečnog presjeka u tačkama A, B, C, D, E , kao što je prikazano na sl. 11:34 (a). Koristeći elementarnu teoriju savijanja grede možemo lako naći u svim ovim tačkama napone σ_{zz} i τ , što onda definiše naponsko stanje u svakoj od ovih tačaka i što je skicirano izdvajajući male pravougaone elemente oko tačaka $A-E$ na sl. 11:34 (b). Jasno je da je napon σ_{zz}

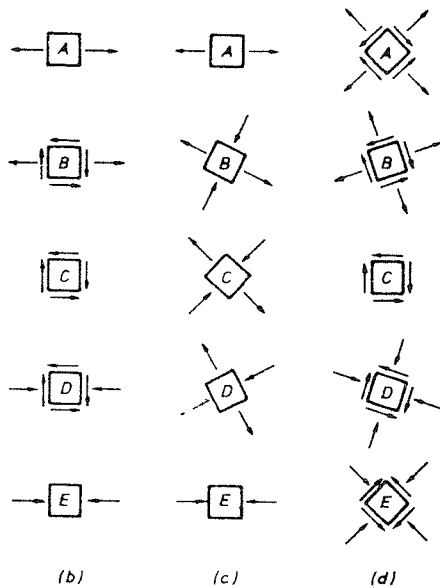
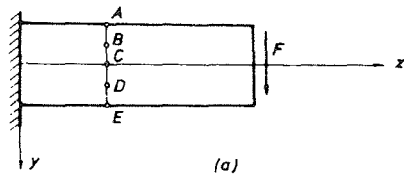


Sl. 11:33.

maksimalan u tačkama najudaljenijim od neutralne ose, a jednak nuli u tačkama neutralne ose. Smičući napon je maksimalan u tačkama neutralne ose, a jednak nuli u najudaljenijim tačkama od neutralne ose. Veličinu i pravce glavnih napona u tačkama $A-E$ sada možemo dobiti iz obrazaca (1), pa su na sl. 11:34 (c) izdvojeni elementi oko tačaka $A-E$ na čijim stranama djeluju glavni naponi. Na sl. 11:34 (d) izdvojeni su elementi na čijim stranama djeluju maksimalni smičući naponi. Naravno, ravni u kojima djeluju maksimalni smičući naponi su pod uglom od 45° u odnosu na ravni u kojima djeluju glavni naponi, kao što se vidi sa sl. 11:34 (c) i (d).

Ponavljajući ovo isto za ostale poprečne presjeke duž ose grede dobijamo kompletnu sliku o glavnim naponima u gredi. Na bazi toga možemo nacrtati dvije familije ortogonalnih krivih koje se zovu trajektorije napona (sl. 11:35), a u čijoj svakoj tački tangenta na krivu otkriva pravac jednog glavnog napona u toj tački. Ove dvije familije se sijeku pod pravim uglom (jer su glavni pravci napona u svakoj tački međusobno upravni), sve krive sijeku neutralnu osu pod uglom od 45° (jer je tamo normalni napon jednak nuli), a sa gornjim i donjim vlaknima grede zaklapaju ugao od 0° ili 90° (jer je tamo smičući napon jednak nuli).

Na sl. 11:36 (a) prikazane su trajektorije glavnih napona za gredju pravougao-nog poprečnog presjeka opterećenu koncentrisanom silom u sredini raspona. Punc linije odgovaraju zatežućim, a isprekidane pritiskujućim naponima.



Sl. 11.34.

Poznavanje trajektorija glavnih napona od velikog je značaja pri konstruisanju armirano-betonskih nosača. Pošto beton ima veoma malu otpornost na istezanje, dodaje mu se čelična armatura, čiji je zadatak da preuzme zatežuće napone. Armatura se približno raspoređuje u pravcima glavnih zatežućih napona (sl. 11.36 (b)).

Druga vrsta krivih koje se mogu nacrtati su tzv. nivo linije glavnih napona. To su linije koje spajaju tačke grede sa jednakim glavnim naponima. Na sl. 11.37 prikazane su nivo linije glavnog napona istezanja za konzolu pravougaonog poprečnog presjeka opterećenu silom F na kraju.

U kojoj tački poprečnog presjeka je najveći glavni napon, zavisi od oblika poprečnog presjeka. To su najčešće najudaljenije tačke od neutralne ose, ali mogu biti i njima okolne tačke. U kom poprečnom presjeku grede treba tražiti najveći glavni napon, zavisi od vrste grede, tj. vrste opterećenja i oslanjanja.

11.11. Dimenzionisanje grede pri savijanju silama

Da bi se izvršilo dimenzionisanje grede opterećene silama na savijanje, neophodno je odrediti kritičnu tačku u gredi u kojoj prvo dolazi do pojave plastične deformacije, odnosno sloma, saglasno usvojenoj hipotezi o slomu. Ako je greda dugačka (vitka), tada su normalni naponi znatno veći od smičućih ($\sigma_{zz} \gg \tau$), pa se sa dovoljno tačnosti dimenzionisanje može vršiti samo prema maksimalnom normalnom naponu, koji se, naravno, javlja u kritičnom presjeku grede i u najudaljenijim tačkama od neutralne ose poprečnog presjeka. Kako je u tim tačkama smičući napon nula, to je napon σ_{zz} istovremeno glavni napon, pa po bilo kojoj od hipoteza o slomu slijedi da mora biti

$$\sigma_{zz}^{\max} \leq \sigma_d, \quad (1)$$

što predstavlja uslov za dimenzionisanje.

Ako materijal ima iste osobine na pritisak i zatezanje, tada je kritični presjek onaj u kome je moment maksimalan, a ako ima različite osobine na pritisak i zatezanje, onda to ne mora biti, pa treba provjeriti nekoliko presjeka da bi se našao kritični presjek (vidjeti primjer 11.9).

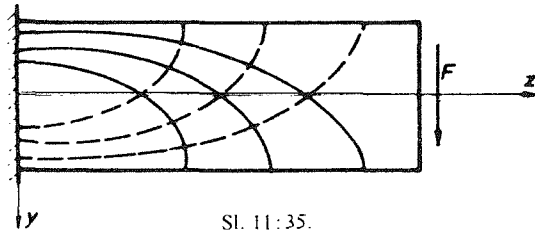
Kod kratkih greda, međutim, smičući naponi mogu biti za neke poprečne presjeke greda reda veličine normalnih napona, tako da je određivanje kritične tačke u gredi složeniji zadatak. Kao što se vidi u primjeru 11.7, kritične tačke ne moraju biti najudaljenije tačke od neutralne ose u kritičnom presjeku, već mogu biti i njoj obližnje tačke, pa čak i tačke na neutralnoj osi, zavisno o usvojenom kriterijumu (hipotezi) o kritičnosti, tj. nastanku plastične deformacije ili sloma. Osim toga, kritičan presjek ne mora biti presjek gdje je moment maksimalan, već može biti neki drugi, u kome je moment manji, ali je zato transferzalna sila velika. Tako je u primjeru 11.7 kritičan presjek *D* u kome je $M_x = 3,625 \text{ kNm}$ i $F_T = 18,125 \text{ kN}$, a ne presjek *C*, iako je u njemu $M_x = 3,75 \text{ kNm}$, ali je $F_T = 9,375 \text{ kN}$. Osim toga, najveći glavni napon javlja se u tački 2 poprečnog presjeka (I profil), a ne u tački 1 (najudaljenoj tački od neutralne ose). Kritična tačka poprečnog presjeka je tačka 2 ili tačka 3 (na neutralnoj osi), zavisno od usvojene hipoteze: po I i II hipotezi kritična je tačka 2, ali je po III i IV hipotezi kritična tačka 3.

Zato se u inženjerskim proračunima dimenzionisanje približno vrši prosto zahtijevajući da je:

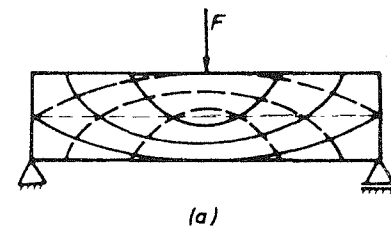
$$\sigma_{zz}^{\max} \leq \sigma_d \quad (2)$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_d, \quad (3)$$

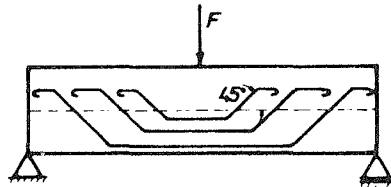
tj. provjerava se tačka u kojoj je σ_{zz} maksimalno (najudaljenije tačke od neutralne ose) i tačka u kojoj je τ maksimalno, pa se određuju dimenzije (ili opterećenje) nosača tako da su oba uslova, (2) i (3), ispunjena.



Sl. 11:35.

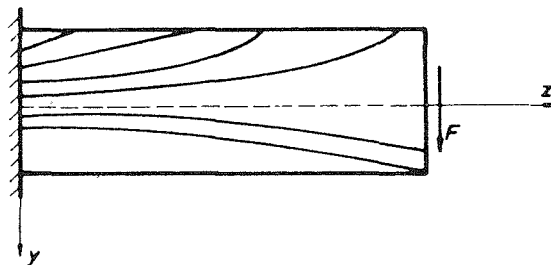


(a)



(b)

Sl. 11:36.



Sl. 11:37.

Kod dugačkih greda, međutim, dovoljno je provjeriti uslov (2) jer je onda uslov (3) sigurno ispunjen, s obzirom da su smičući naponi znatno manji od normalnih. Ovo isto važi i za neke kratke grede sa malim stepenom iskorišćenja poprečnog presjeka, kao što je krug, kvadrat i sl., jer je i kod njih σ_{zz}^{\max} znatno veće od τ_{\max} .

Kao što ćemo kasnije vidjeti, za dimenzionisanje može biti mjerodavan i zahtjev da pomjeranja izvjesnih tačaka nosača (ugibi i nagibi) ne pređu neku, unaprijed zadatu (dozvoljenu) vrijednost. To je dimenzionisanje prema dozvoljenim ugibima ili nagibima, kada se zahtijeva da je:

$$v_{\max} \leq v_d$$

ili

$$\varphi_{\max} \leq \varphi_d.$$

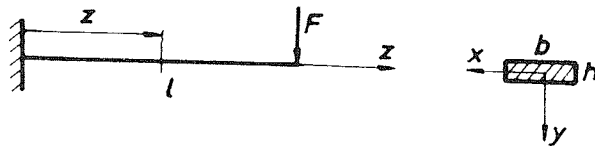
O ugibima i nagibima grede detaljno ćemo govoriti u poglavlju 11.13.

Primjer 11.5.

Određiti idealni oblik konzole pravougaonog poprečnog presjeka:

- konstantne visine h ,
- konstantne širine b ,

opterećene silom F na desnom kraju. (Idealni oblik grede ima ako joj je isti maksimalni normalni napon σ_{zz} u svim poprečnim presjecima).



Sl. P 11.5 (a).

Rješenje:

- a) U ovom slučaju je $h = \text{const.}$, $b = b(z)$. Idealni oblik dobićemo iz uslova $\sigma_{zz}^{\max} = \text{const.}$ Dakle:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x(z)}{I_x} y, \quad I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad M_x(z) = -F(l-z)$$

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{6 F (l-z)}{h^2 b} = \text{const.} = \sigma_0,$$

odakle je

$$b = b(z) = b_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right), \quad b_0 = \frac{6FL}{h^2 \sigma_0},$$

što je prikazano na sl. P 11.5 (b).

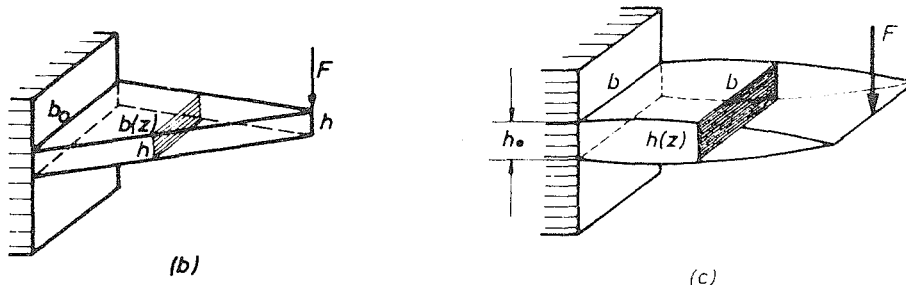
b) U ovom slučaju je $b = \text{const.}$ i $h = h(z)$, pa je

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{6Fl}{b} \frac{1 - \frac{z}{l}}{h^2} = \text{const.} = \sigma_0,$$

tako da je

$$h = h(z) = h_0 \sqrt{1 - \frac{z}{l}}, \quad h_0 = \sqrt{\frac{6Fl}{b\sigma_0}}.$$

što je prikazano na sl. P 11.5 (c).



Sl. P 11.5 (b) - (c).

Primjer 11.6.

Prosta greda pravougaonog poprečnog presjeka opterećena je silom $F = 80 \text{ kN}$ na sredini raspona (sl. P 11.6 (a)).

- Odrediti glavne napone u tačkama K , L , M , I , K' .
- Odrediti napone u tački L' u ravni čija normala zaklapa ugao od 30° sa z osom.

Rješenje:

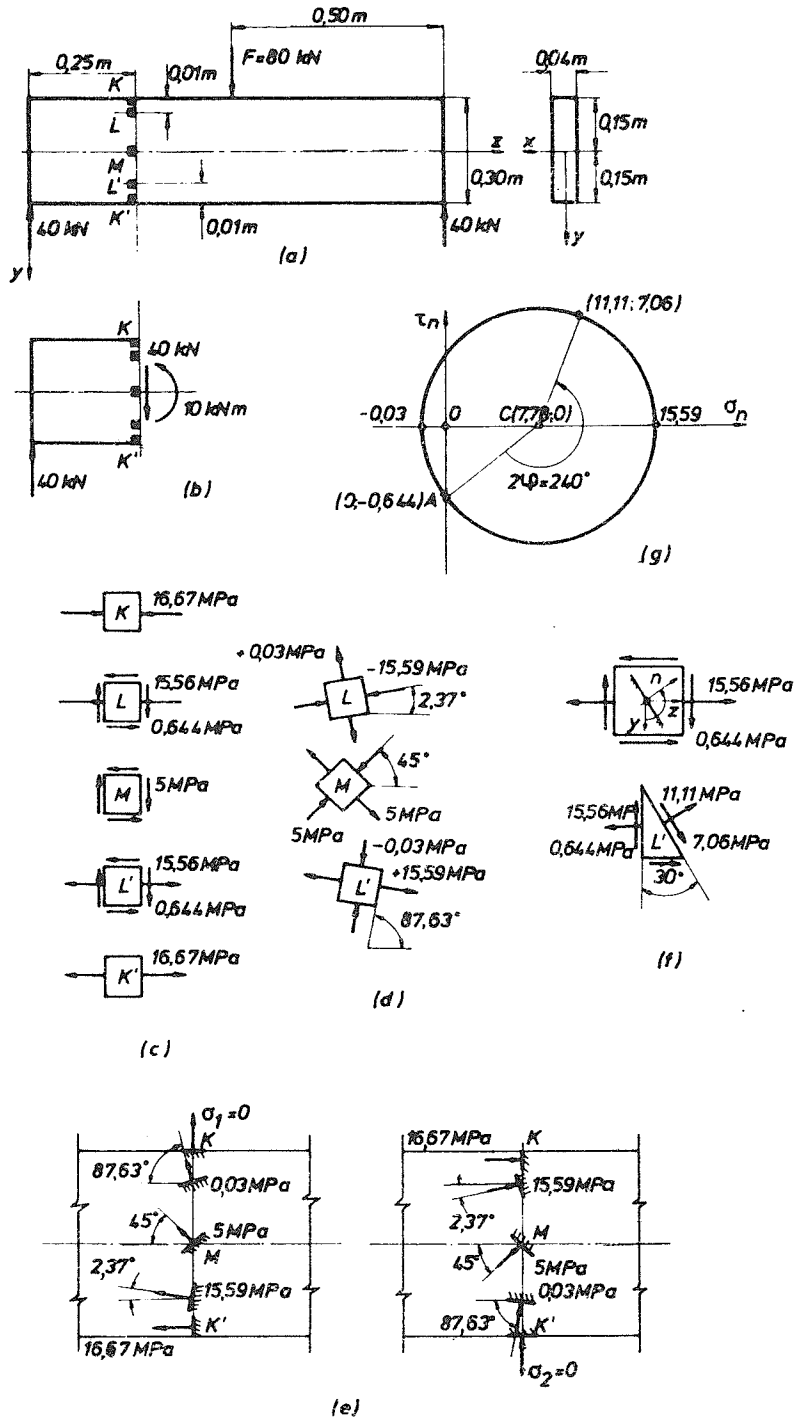
- Moment savijanja i transferzalna sila u presjeku $K-K'$ (sl. P 11.6 (b)) su $M_x = 10 \text{ kNm}$ i $T_y = 40 \text{ kN}$. Normalni napon u presjeku je

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{1000}{9000} y = 0,111 y \quad \left[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right], \quad (a)$$

dok je smičući napon (vidi (11.7: 10))

$$\tau = \frac{T_y S_x'}{I_x z} = \frac{40 \cdot 2 \cdot (15^2 - y^2)}{9000 \cdot 4} = 0,0022 (225 - y^2) \quad \left[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right]. \quad (b)$$

Vrijednosti normalnog i smičućeg napona u tačkama K , L , M , L' , K' , dobijaju se iz (a) i (b) respektivno za $y = -15, -14, 0, 14, 15 \text{ [cm]}$. Ove vrijednosti su prikazane na sl. P 11.6 (c). Očigledno je da je u tačkama K i K' stanje napona linearno, dok je u tački M stanje čistog smicanja.



Sl. P 11.6.

Glavne napone računamo po obrascu

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} \pm \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2}), \quad (c)$$

a njihove pravce dobijamo iz izraza

$$\operatorname{tg} 2\tilde{\alpha} = - \frac{2\tau}{\sigma_{zz}} \quad (d)$$

Zamjenom vrijednosti na napone σ_{zz} i τ koje su date na sl. P 11.6 (c) u izraze (c) i (d) dobijamo glavne napone i glavne pravce u tačkama K, L, M, L', K' . Dobijene vrijednosti su prikazane na sl. P 11.6 (d), dok su na sl. P 11.6 (e) prikazane ravni kroz tačke $K-K'$ po kojima djeluju najveći naponi zatezanja, odnosno pritiska.

- b) Napone u tački L' za ravan sa normalom pod uglom od 30° prema z osi dobićemo iz izraza (1.12:5) i (1.12:8) za ravno stanje napona u ravni (y, z) (sl. P 11.6 (f)):

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{yy} \cos^2 \varphi + \sigma_{zz} \sin^2 \varphi + \sigma_{yz} \sin 2\varphi = 15,56 \cdot \sin^2 120^\circ + 0,644 \cdot \sin 240^\circ = \\ &= 11,11 [\text{MPa}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \sin 2\varphi - \sigma_{yz} \cos 2\varphi = \frac{1}{2} (-15,56) \sin 240^\circ - 0,644 \cdot \cos 240^\circ = \\ &= 7,06 [\text{MPa}]. \end{aligned}$$

Iste vrijednosti se dobijaju i pomoću Mohrovog kruga napona (sl. P 11.6 (g)).

Primjer 11.7.

Za nosač prikazan na sl. P 11.7 (a) odrediti:

- najveći glavni napon u gredi,
- kritičnu tačku nosača respektujući prve četiri hipoteze o slomu.

Rješenje:

- a) U presjeku C je: $T_y = 9,375 \text{ kN}$, $M_x = 3,75 \text{ kNm}$.
Normalni napon u presjeku C je

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{375}{7189} y = 0,0522 y,$$

tako da je u tačkama 1, 2 i 3 (sl. P 11.7 (b)):

$$\sigma_{zz}^1 = 0,522 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_{zz}^2 = 0,417 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_{zz}^3 = 0.$$

Smičući napon određujemo iz izraza

$$\tau = \frac{T_y S'_x}{I_x \xi},$$

pa je u tačkama 1, 2 i 3:

$$\tau^1 = 0, \quad \tau^2 = \frac{9,375 \cdot 360}{7189 \cdot 2} = 0,2 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \tau^3 = \frac{9,375 \cdot 424}{7189 \cdot 2} = 0,2765 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Glavne napone dobijamo iz

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} \pm \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2}),$$

odakle je:

$$1: \begin{cases} \sigma_1 = 0,522 \\ \sigma_2 = 0 \end{cases}, \quad 2: \begin{cases} \sigma_1 = 0,4975 \\ \sigma_2 = -0,08 \end{cases}, \quad 3: \begin{cases} \sigma_1 = 0,2765 \\ \sigma_2 = -0,2765 \end{cases} \quad [\text{kN/cm}^2].$$

Dakle, najveći glavni napon u presjeku C je u tački 1, $\sigma_1 = 0,522 \text{ kN/cm}^2$.
U presjeku D je $T_y = 18,125 \text{ kN}$, $M_x = 3,625 \text{ kNm}$, pa je:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{362,5}{7189} y = 0,0504 y$$

$$\sigma_{zz}^1 = 0,504 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_{zz}^2 = 0,4032 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_{zz}^3 = 0$$

i:

$$\tau = \frac{T_y S'_x}{I_x \xi}$$

$$\tau^1 = 0, \quad \tau^2 = \frac{18,125 \cdot 360}{7189 \cdot 2} = 0,454 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \tau^3 = \frac{18,125 \cdot 424}{7189 \cdot 2} = 0,5345 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Prema tome, glavni naponi u tačkama 1, 2 i 3 su:

$$1: \begin{cases} \sigma_1 = 0,504 \\ \sigma_2 = 0 \end{cases}, \quad 2: \begin{cases} \sigma_1 = 0,6983 \\ \sigma_2 = -0,2951 \end{cases}, \quad 3: \begin{cases} \sigma_1 = 0,5345 \\ \sigma_2 = -0,5345 \end{cases} \quad [\text{kN/cm}^2],$$

pa je najveći glavni napon u presjeku D u tački 2, $\sigma_1 = 0,6983 \text{ kN/cm}^2$.
Upoređujući dobijene rezultate vidimo da je najveći glavni napon u gredi u tački 2 presjeka D i iznosi $\sigma_1 = 0,6983 \text{ kN/cm}^2$.

b) Kritičan presjek je presjek D . Kandidati za kritične tačke u njemu su tačke 2 i 3.

Tačka 2:

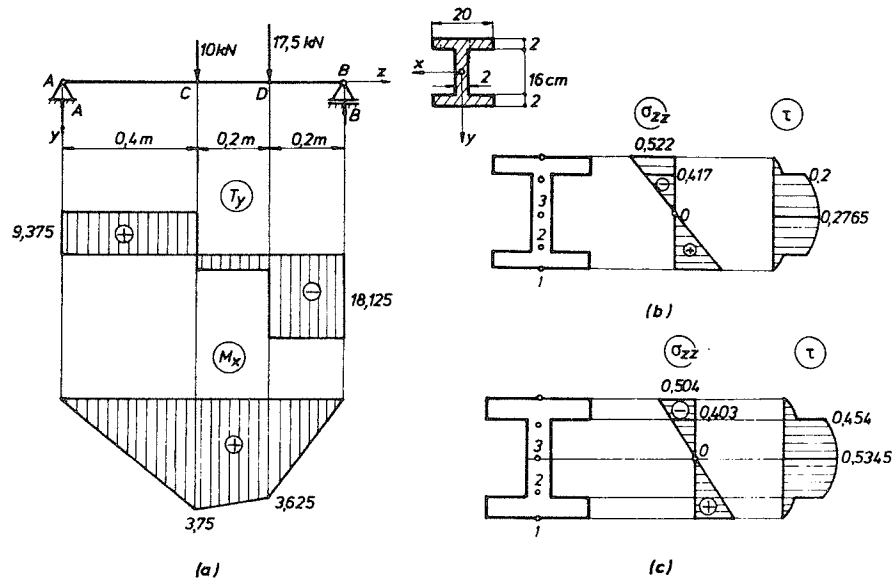
$$\text{I: } \sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 = 0,6983 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \text{II: } \sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 - \nu \sigma_2 = 0,7967 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad (\nu = 1/3)$$

$$\text{III: } \sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 - \sigma_2 = 0,9934 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \quad \text{IV: } \sigma_{\text{upor}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2]^{\frac{1}{2}} = 0,8835 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Tačka 3:

$$\begin{aligned} \text{I: } \sigma_{\text{upor}} &= 0,5345 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, & \text{II: } \sigma_{\text{upor}} &= 0,7127 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \\ \text{III: } \sigma_{\text{upor}} &= 1,069 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, & \text{IV: } \sigma_{\text{upor}} &= 0,9258 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}. \end{aligned}$$

Dakle, po I i II hipotezi kritična je tačka 2, a po III i IV hipotezi tačka 3 presjeka D.



Sl. P 11.7.

Primjer 11.8.

Za gredu I profila opterećenu kao na slici izvršiti dimenzionisanje (tj. izabrati I profil) respektujući uslove: $\sigma_{zz}^{\max} \leq \sigma_d$ i $\tau_{\max} \leq \tau_d$. Dato je: $q = 100 \text{ kN/m}$, $l = 2 \text{ m}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $\sigma_d = 15 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_d = 10 \text{ kN/cm}^2$.

Rješenje:

Dijagrami transferzalne sile i momenta savijanja u gredi prikazani su na sl. P 11.8. Maksimalni moment savijanja je $M_x^{\max} = 43,95 \text{ kNm}$. Dimenzionisanje vršimo iz uslova

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq \sigma_d,$$

odakle je otporni moment

$$W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{\sigma_d} = \frac{4395}{15} = 293 \text{ cm}^3.$$

Iz Tablica profila nalazimo da je za profil I 24 $W_x = 354 \text{ cm}^3$, što je prva veća vrijednost od $W_x = 293 \text{ cm}^3$, pa usvajamo I 24 profil.

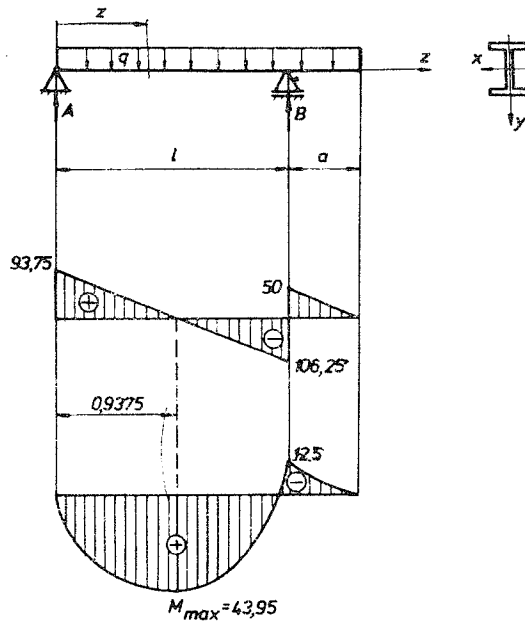
Maksimalni normalni napon σ_{zz} koji se sada javlja u gredi je

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} = \frac{4395}{354} = 12,4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Provjerimo još da li usvojeni I 24 profil zadovoljava uslov $\tau_{\max} \leq \tau_d$. Kako je maksimalna transferzalna sila neposredno lijevo od presjeka B ($T_y^{\max} = 106,25 \text{ kN}$), imamo

$$\tau_{\max} = \frac{T_y^{\max}}{I_x} \left(\frac{S'_x}{\xi} \right)_{\max} = \frac{106,25}{4250} \cdot \frac{206}{0,87} = 5,92 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < \tau_d = 10 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Prema tome, usvojeni profil zadovoljava i uslov o smičućim naponima. (Iz Tablica za I 24 profil nalazimo: $I_x = 4250 \text{ cm}^4$ i $S'_x = 206 \text{ cm}^3$, $\xi = 0,87 \text{ cm}$ za tačke neutralne ose, gdje je smičući napon maksimalan).



Sl. P 11.8.

Primjer 11.9.

Odrediti maksimalno dozvoljeno opterećenje F grede od livenog gvožđa na sl. P 11.9 (a). ako je $\sigma_d^+ = 4 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_d^- = 12 \text{ kN/cm}^2$. Poprečni presjek grede je T profil na slici. Kako treba postaviti profil za veću izdržljivost nosača, sa pojasom okrenutim gore ili dolje?

Rješenje:

Sa dijagrama momenta savijanja grede vidimo da je $M_x^{\max} = \frac{3}{2} aF$. Kako je M_x^{\max} pozitivno (isteže donja vlakna) i kako liveno gvožđe znatno bolje podnosi pritisak od zatezanja, T profil treba postaviti sa pojasom okrenutim dolje (sl. P 11.9 (b)), jer je tada σ_{zz}^{\max} negativno. Dimenzionisanje vršimo na sljedeći način. U presjeku C je moment maksimalan $M_x^{\max} = \frac{3}{2} aF$, pa je:

$$\sigma_{zz}^{\max,+} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 30 \cdot F}{918} \cdot 4 \leq 4, \quad F \leq 20,40 \text{ kN}$$

$$\sigma_{zz}^{\max,-} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 30 \cdot F}{918} \cdot 11 \leq 12, \quad F \leq 22,25 \text{ kN.}$$

Dakle, što se tiče presjeka C, mora biti $F \leq 20,40 \text{ kN}$. No, proračun još nije završen. Može se, naime, dogoditi da je presjek B opasniji od presjeka C iako je $|M_B| < M_C$, jer je profil postavljen tako da se u presjeku B pojas nalazi u sabijenoj zoni, tj. profil nije racionalno iskorišten u presjeku B. Dakle, u presjeku B je:

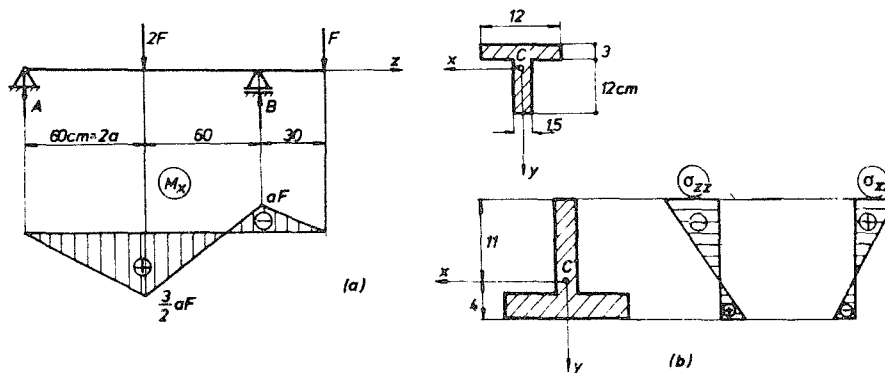
$$\sigma_{zz}^{\max,+} = \frac{30 F}{918} \cdot 11 \leq 4, \quad F \leq 11,13 \text{ kN}$$

$$\sigma_{zz}^{\max,-} = \frac{30 F}{918} \cdot 4 \leq 12, \quad F \leq 91,8 \text{ kN.}$$

pa, što se tiče presjeka B, mora biti $F \leq 11,13 \text{ kN}$.

Prema tome, maksimalno dozvoljeno opterećenje grede je

$$F_{\max} = \min \{20,40; 11,13\} = 11,13 \text{ kN.}$$



Sl. P 11.9.

Primjer 11.10.

Za nosač i opterećenje na sl. P 11.10 (a) izvršiti:

- dimenzionisanje nosača zahtijevajući da je $\sigma_{zz}^{\max} \leq \sigma_d$,
- dimenzionisanje nosača prema momentu koji iznosi 60% od najvećeg momenta, i nosač pojačati lamelama.

Dato je: $a=h$, $\delta=0,2 a$, $F=20 \text{ kN}$, $q=30 \text{ kN/m}$, $l=2 \text{ m}$, $r=0,5 \text{ m}$,
 $\sigma_d=14 \text{ kN/cm}^2$.

Rješenje:

a) Iz

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq \sigma_d$$

slijedi

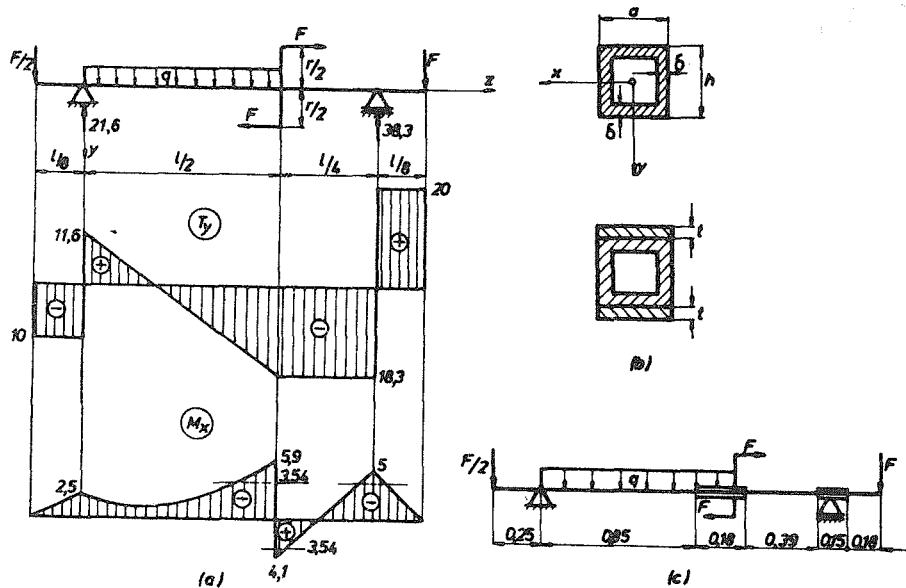
$$W_x = \frac{M_x^{\max}}{\sigma_d} = \frac{590}{14} = 42,1 \text{ cm}^3. \quad (\text{a})$$

No, otporni moment je definisan sa $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$, pa pošto je:

$$I_x = \frac{1}{6} \left(1 + 3 \frac{a}{h} \right) \delta h^3 = 0,13 a^4, \quad y_{\max} = \frac{a}{2} + \frac{\delta}{2},$$

slijedi

$$W_x = 0,22 a^3. \quad (\text{b})$$



Sl. P 11.10.

Iz (a) i (b) je sada $0,22a^3 \geq 42,1$, tj. $a \geq 5,75$ cm.

Dakle, usvajamo: $a = h = 6,0$ cm, $\delta = 0,2 a = 1,2$ cm.

b) Iz uslova

$$\sigma_{zz} = \frac{60\% M_x^{\max}}{W_x} \leq \sigma_d$$

slijedi

$$W_x = 0,22 a^3 \geq \frac{0,60 \cdot 590}{14} = 25,29 \text{ cm}^3, \quad a \geq 4,9 \text{ cm.}$$

No, kutijasti profil dimenzije $a = 4,9$ cm zadovoljava samo u dijelu nosača gdje je $M_x \leq 60\% M_x^{\max} = 3,54$ kNm. U ostalim dijelovima nosač treba pojačati lamelama (sl. P 11.10 (b)) čiju debljinu određujemo iz:

$$\frac{M_x^{\max}}{W_x^*} \leq \sigma_d, \quad W_x^* \geq \frac{M_x^{\max}}{\sigma_d} = 42,1 \text{ cm}^3$$

$$W_x^* = \frac{I_x^*}{y_{\max}^*} = \frac{I_x + 2 \left(\frac{a + \delta}{2} + \frac{t}{2} \right)^2 (a + \delta) t}{\frac{a + \delta}{2} + t} = \frac{74,9 + 2 (2,94 + 0,5t)^2 5,88}{2,94 + t} \geq 42,1$$

dakle je $t \geq 0,6$ cm. Nosač pojačan lamelama prikazan je na sl. P 11.10 (c).

11.12. Deformacioni rad pri savijanju grede silama

Deformacioni rad akumuliran u gredi savijenoj silama je

$$\mathcal{A} = \int_V \mathcal{A}^* dV, \quad (1)$$

gdje je

$$\mathcal{A}^* = \frac{1}{2} \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx} + \sigma_{zy} \varepsilon_{zy}, \quad (2)$$

s obzirom da su ostale komponente tenzora napona jednake nuli.

Ograničavajući se na tehničku teoriju savijanja, tj. zanemarujući komponentu smičućeg napona σ_{zx} , (2) postaje

$$\mathcal{A}^* = \frac{1}{2} \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{zy} \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2E} \sigma_{zz}^2 + \frac{1}{2G} \sigma_{zy}^2, \quad (3)$$

odakle, s obzirom da je:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x(z)}{I_x} y, \quad \sigma_{zy} = \frac{T_y(z) S'_x(y)}{I_x \xi(y)}, \quad (4)$$

dobijamo

$$\mathcal{A}^* = \frac{1}{2E} \frac{M_x^2(z)}{I_x^2} y^2 + \frac{1}{2G} \frac{T_y^2(z)}{I_x^2} \frac{S_x'^2(y)}{\xi^2(y)}. \quad (5)$$

Integraleći (5) po ukupnoj zapremini grede dobijamo

$$\mathcal{A} = \int_0^l \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x} + \kappa \int_0^l \frac{T_y^2(z) dz}{2GA}, \quad (6)$$

gdje je A površina poprečnog presjeka grede, a

$$\kappa = \frac{A}{I_x^2} \int_A \frac{S_x'^2(y) dA}{\xi^2(y)} \quad (7)$$

koeficijent koji zavisi od oblika poprečnog presjeka grede (na primjer, za krug je $\kappa = \frac{10}{9}$, za pravougaonik je $\kappa = \frac{6}{5}$, itd.).

Prvi član u (6) je dio deformacionog rada od normalnog napona, a drugi član od smičućeg napona. Ovaj drugi dio je redovno znatno manji od dijela deformacionog rada usljed normalnog napona, pa se u primjenama može zanemariti, tj. uzeti da je akumulirani deformacioni rad u gredi savijenoj silama

$$\mathcal{A} = \int_0^l \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x}. \quad (8)$$

Ako je u pitanju greda promjenljivog poprečnog presjeka ($I_x = I_x(z)$), tada je

$$\mathcal{A} = \int_0^l \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x(z)}. \quad (9)$$

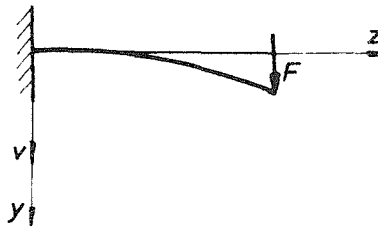
11.13. Elastična linija grede

11.13.1. Diferencijalna jednačina elastične linije

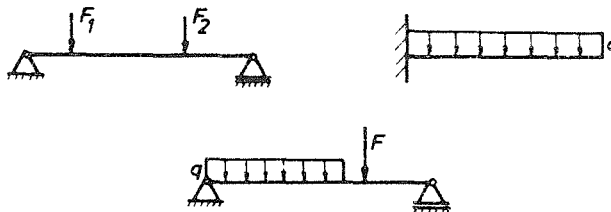
Deformisani oblik osovine grede naziva se elastična linija grede (sl. 11:38). Kao što smo vidjeli u poglavlju 11.1, krivina elastične linije konzole opterećene silom na kraju proporcionalna je momentu, tj.

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right| = - \frac{M_x(z)}{EI_x}. \quad (1)$$

gdje je sa v označeno pomjerenje u , tačka osovine grede. Na različitim mjestima z moment je različit, pa prema tome i krivina. (Kod čistog savijanja spregovima krivina je konstantna duž ose grede jer je $M_x = \text{const.}$ duž ose grede). Ako je, međutim, u pitanju greda opterećena na savijanje silama raspoređenim po bočnoj površini, krivina nije proporcionalna momentu savijanja, ali je razlika toliko mala da se u praktičnim proračunima može zanemariti. Zato ćemo koristiti jednačinu (1) za određivanje elastične linije grede bez obzira na vrstu oslanjanja i opterećenja grede, dakle i u slučajevima kao na sl. 11:39. Ovo, u stvari, znači da ćemo pri određivanju elastične linije grede zanemarivati uticaj smičućih napona na krivinu grede.

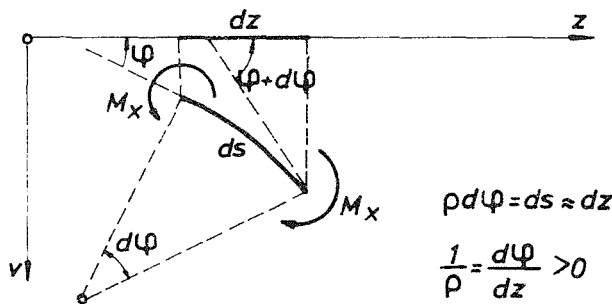


Sl. 11:38.



Sl. 11:39.

Ordinate elastične linije nazivaju se ugibi grede, a nagibi tangente na elastičnu liniju nazivaju se nagibi grede. (Nagibi, u stvari, predstavljaju obrtanje poprečnih presjeka grede ako zanemarimo smičuću deformaciju i činjenicu da poprečni presjeci ne ostaju ravni i upravni na osu grede).



Sl. 11:40.

Da bismo izveli diferencijalnu jednačinu elastične linije grede, dovoljno je uočiti da u koordinatnom sistemu (z, v) pozitivnu krivinu izaziva negativan moment (sl. 11:40). No, za male deformacije je $\varphi \cong \text{tg } \varphi = \frac{dv}{dz}$, pa je

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d^2v}{dz^2}. \quad (2)$$

Upoređujući (1) i (2) zaključujemo da je

$$\frac{d^2v}{dz^2} = - \frac{M_x(z)}{EI_x}, \quad (3)$$

gdje je sa $M_x(z)$ označen moment na mjestu z (uz usvojenu konvenciju o pozitivnom momentu).

Jednačina (3) je diferencijalna jednačina elastične linije grede. Njenom integracijom dobijamo jednačinu elastične linije

$$v = v(z). \quad (4)$$

Napominjemo da s obzirom na relacije:

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y(z) \quad \frac{d^2M_x}{dz^2} = -q(z), \quad (5)$$

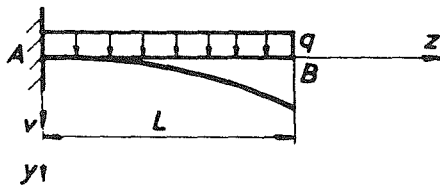
gdje su $T_y(z)$ i $q(z)$ transferzalna sila i spoljašnje opterećenje grede, jednačinu (3) možemo prepisati i u obliku:

$$\frac{d^3v}{dz^3} = -\frac{T_y(z)}{EI_x} \quad (6)$$

$$\frac{d^4v}{dz^4} = -\frac{q(z)}{EI_x}. \quad (7)$$

Pri integraciji diferencijalne jednačine (3), odnosno (6) ili (7), integracione konstante određujemo iz graničnih uslova. Na primjer, u tački oslonca su ugib i moment jednaki nuli ($v=0$, $v''=0$), u uklještenju su ugib i nagib jednaki nuli ($v=0$, $v'=0$), dok su na slobodnom kraju grede moment i transferzalna sila jednaki nuli ($v''=0$, $v'''=0$).

U primjerima koji slijede ilustrovaćemo postupak integracije diferencijalne jednačine elastične linije (3), tj. određivanje jednačine elastične linije (4).



Sl. P 11.11.

Primjer 11.11.

Određiti jednačinu elastične linije kontinualno opterećene konzole na sl. P 11.11.

Rješenje:

Moment savijanja u presjeku z konzole je

$$M_x(z) = -\frac{q}{2}(L-z)^2,$$

pa diferencijalna jednačina elastične linije (11.13.1:3) glasi

$$EI_x v'' = \frac{q}{2}(L-z)^2.$$

Odavde integracijom slijedi:

$$EI_x v' = -\frac{q}{6}(L-z)^3 + C_1, \quad EI_x v = \frac{q}{24}(L-z)^4 + C_1 z + C_2.$$

Integracione konstante dobijamo iz graničnih uslova da je za $z=0$: $v=0$, $v'=0$, odakle je $C_1 = \frac{1}{6}qL^3$, $C_2 = -\frac{1}{24}qL^4$. Prema tome je:

$$v' = \frac{q}{6EI_x} z(3L^2 - 3Lz + z^2), \quad v = \frac{q}{24EI_x} z^2(6L^2 - 4Lz + z^2).$$

Ugib i nagib slobodnog kraja konzole su:

$$v_B = v(z=L) = \frac{qL^4}{8EI_x}$$

$$\varphi_B = v'(z=L) = \frac{qL^3}{6EI_x}$$

Primjer 11.12.

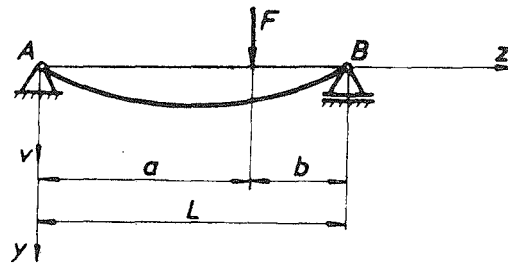
Odrediti jednačinu elastične linije proste grede opterećene koncentrisanom silom kao na sl. P 11.12.

Rješenje:

Moment savijanja u gredi je definisan sa:

$$M_x(z) = \frac{b}{L} Fz, \quad 0 \leq z \leq a$$

$$M_x(z) = \frac{b}{L} Fz - F(z-a), \quad a \leq z \leq L,$$



Sl. P 11.12.

pa je diferencijalna jednačina elastične linije:

$$EI_x v'' = -\frac{b}{L} Fz, \quad 0 \leq z \leq a$$

$$EI_x v'' = -\frac{b}{L} Fz + F(z-a), \quad a \leq z \leq L.$$

Nakon integracije dobijamo:

$$EI_x v' = -\frac{b}{L} F \frac{z^2}{2} + C_1; \quad EI_x v = -\frac{b}{L} F \frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2, \quad 0 \leq z \leq a$$

$$EI_x v' = -\frac{b}{L} F \frac{z^2}{2} + F \frac{(z-a)^2}{2} + C_3; \quad EI_x v = -\frac{b}{L} F \frac{z^3}{6} + F \frac{(z-a)^3}{6} + C_3 z + C_4, \quad a \leq z \leq L.$$

Granični uslovi su: $v(0) = 0$, $v(L) = 0$, $v'_1(a) = v'_2(a)$, $v_1(a) = v_2(a)$, odakle dobijamo:

$$C_1 = C_3 = \frac{Fb}{6L} (L^2 - b^2), \quad C_2 = C_4 = 0.$$

Dakle:

$$EI_x v = \frac{Fb}{6L} z (L^2 - b^2 - z^2), \quad 0 \leq z \leq a$$

$$EI_x v = \frac{Fb}{6L} z (L^2 - b^2 - z^2) + \frac{F(z-a)^3}{6}, \quad a \leq z \leq L.$$

Maksimalni ugib je oko sredine grede, lijevo od sile ako je sila bliže desnom kraju grede, i obratno. Nagibi na krajevima su:

$$\varphi_A = v'(z=0) = \frac{Fab(L+b)}{6LEI_x}, \quad \varphi_B = v'(z=L) = -\frac{Fab(L+a)}{6LEI_x}.$$

Ako je $a=b$, tada imamo:

$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{FL^2}{16EI_x}, \quad v_{\max} = v\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI_x}.$$

Primjer 11.13.

Odrediti elastičnu liniju grede na sl. P 11.13 (a). Dato je: \mathfrak{M} , a , b , EI_x .

Rješenje:

Moment savijanja je:

$$M_x(z) = \frac{\mathfrak{M}}{L}z, \quad 0 \leq z \leq a$$

$$M_x(z) = \frac{\mathfrak{M}}{L}z - \mathfrak{M}, \quad a \leq z \leq L,$$

pa diferencijalna jednačina elastične linije glasi:

$$EI_x v'' = -\frac{\mathfrak{M}}{L}z, \quad 0 \leq z \leq a$$

$$EI_x v'' = -\frac{\mathfrak{M}}{L}z + \mathfrak{M}, \quad a \leq z \leq L.$$

Integracijom dobijamo:

$$EI_x v' = -\frac{\mathfrak{M}}{L}\frac{z^2}{2} + C_1, \quad EI_x v = -\frac{\mathfrak{M}}{L}\frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2, \quad 0 \leq z \leq a$$

$$EI_x v' = -\frac{\mathfrak{M}}{L}\frac{z^2}{2} + \mathfrak{M}z + C_3, \quad EI_x v = -\frac{\mathfrak{M}}{L}\frac{z^3}{6} + \mathfrak{M}\frac{z^2}{2} + C_3 z + C_4, \quad a \leq z \leq L.$$

Granični uslovi su:

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v'_1(a) = v'_d(a), \quad v_l(a) = v_d(a),$$

odakle dobijamo integracione konstante:

$$C_1 = \mathfrak{M}\left(a - \frac{L}{3} - \frac{a^2}{2L}\right), \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{\mathfrak{M}}{L}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{L^2}{3}\right), \quad C_4 = \mathfrak{M}\frac{a^2}{2}.$$

Prema tome je:

$$v(z) = \frac{\mathfrak{M}L^2}{6EI_x} \left[-\left(\frac{z}{L}\right)^3 + \left(\frac{6a}{L} - \frac{3a^2}{L^2} - 2\right) \frac{z}{L} \right], \quad 0 \leq z \leq a \quad (a)$$

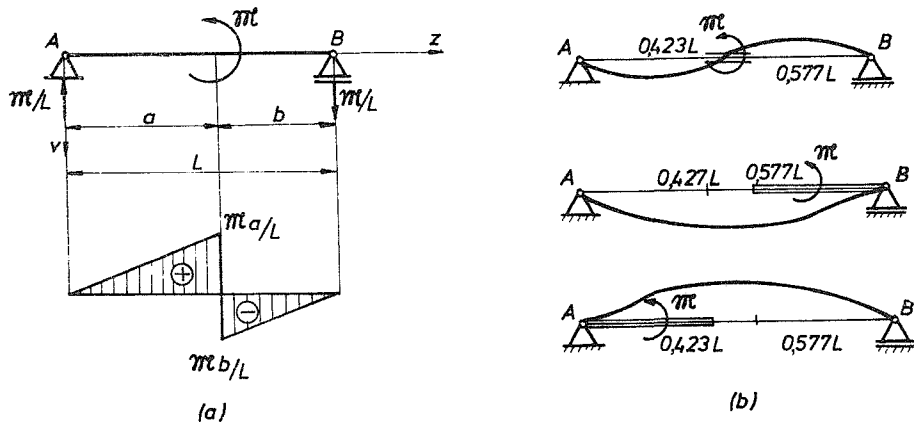
$$v(z) = \frac{\mathfrak{M}L^2}{6EI_x} \left[-\left(\frac{z}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{z}{L}\right)^2 - \left(3\frac{a^2}{L^2} + 2\right) \frac{z}{L} + 3\frac{a^2}{L^2} \right], \quad a \leq z \leq L.$$

Iz izraza (a) slijedi da je:

$$v(a) = \frac{\mathfrak{M}}{3EI_x} \frac{ab(a-b)}{L}$$

$$\varphi_A = v'(0) = \frac{\mathfrak{M}L}{6EI_x} \left[1 - 3\left(\frac{b}{L}\right)^2 \right], \quad \varphi_B = v'(L) = \frac{\mathfrak{M}L}{6EI_x} \left[1 - 3\left(\frac{a}{L}\right)^2 \right]. \quad (b)$$

Analiza: Da bi bilo $\varphi_A > 0$, iz (b) slijedi da je $b < 0,577L$ i $a > 0,423L$. Ako je i $\varphi_B > 0$, onda mora biti $a < 0,577L$ i $b > 0,423L$. Prema tome, ako je $\varphi_A > 0$ i $\varphi_B > 0$, spreg \mathfrak{M} djeluje u intervalu $(0,423L; 0,577L)$ (sl. P 11.13 (b)). Slično slijedi za preostale mogućnosti ($\varphi_A > 0, \varphi_B < 0$) i ($\varphi_A < 0, \varphi_B < 0$) (sl. P 11.13 (b)).



Sl. P 11.13.

Primjer 11.14.

Odrediti jednačinu elastične linije Gerberove grede na sl. P 11.14.

Rješenje:

Diferencijalna jednačina elastične linije je

$$EI_x v'' = -M_x(z),$$

gdje je moment savijanja definisan sa:

$$M_x(z) = \frac{F}{2}z - \frac{FL}{2}, \quad 0 \leq z \leq L$$

$$M_x(z) = \frac{F}{2}z - \frac{FL}{2}, \quad L \leq z \leq 2L$$

$$M_x(z) = \frac{F}{2}z - \frac{FL}{2} - F(z-2L), \quad 2L \leq z \leq 3L.$$

Granični uslovi su:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v_1(L) = v_d(L)$$

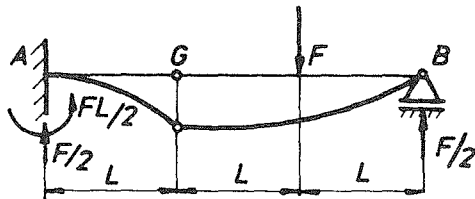
$$v_1(2L) = v_d(2L), \quad v'_1(2L) = v'_d(2L), \quad v(3L) = 0,$$

što daje integracione konstante koje se javljaju pri integraciji diferencijalne jednačine elastične linije:

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{12}FL^2, \quad C_4 = \frac{1}{12}FL^3, \quad C_5 = \frac{23}{12}FL, \quad C_6 = \frac{15}{12}FL^3.$$

Jednačina elastične linije onda glasi

$$v(z) = \frac{FL^3}{12EI_x} \left[3 \left(\frac{z}{L} \right)^2 - \left(\frac{z}{L} \right)^3 \right]_{z > L} + 1 - \frac{z}{L} \Big|_{z > 2L} + 2 \left(\frac{z}{L} \right)^3 - 12 \left(\frac{z}{L} \right)^2 + 24 \frac{z}{L} - 16 \Big].$$



Sl. P 11.14.

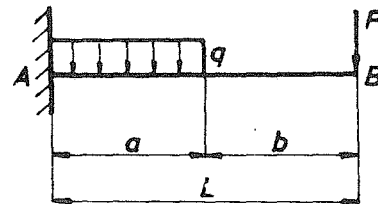
Oдавде specijalno slijedi:

$$v_G = v(L) = \frac{FL^3}{6EI_x}$$

$$\phi'_G = \frac{FL^2}{4EI_x}, \quad \phi''_G = \frac{FL^2}{6EI_x}.$$

11.3.2. Određivanje ugiba i nagiba grede metodom superpozicije

Diferencijalna jednačina elastične linije grede je linearna diferencijalna jednačina, pa ima osobinu, ako su v_1 i v_2 rješenja diferencijalne jednačine, tada je i $v_1 + v_2$ rješenje diferencijalne jednačine. Ovo omogućuje metodu superpozicije pri određivanju ugiba i nagiba grede. Naime, ako je $v_1 = v_1(z)$ ugib grede koji se javlja pod djelovanjem opterećenja $q_1 = q_1(z)$, a $v_2 = v_2(z)$ ugib grede pod djelovanjem opterećenja $q_2 = q_2(z)$, tada je $v_1(z) + v_2(z)$ ugib grede koji se javlja pod djelovanjem opterećenja $q_1(z) + q_2(z)$. Metod superpozicije se veoma često koristi, pogotovu kada se spoljašnje opterećenje grede može razdvojiti na dijelove za koje imamo rješenja (recimo iz Tablica, i sl.). Na primjer, na sl. 11:41 ugib od kontinualnog opterećenja q i koncentri-



Sl. 11:41.

sane sile F možemo naći kao zbir ugiba posebno od kontinualnog opterećenja i posebno od koncentrisane sile. Koristeći Tablice ugiba (vidi Dodatak B), dobijamo da je ugib kraja B konzole jednak

$$v_B = \frac{qa^3(3a+4b)}{24EI_x} + \frac{FL^3}{3EI_x}$$

Primjer 11.15.

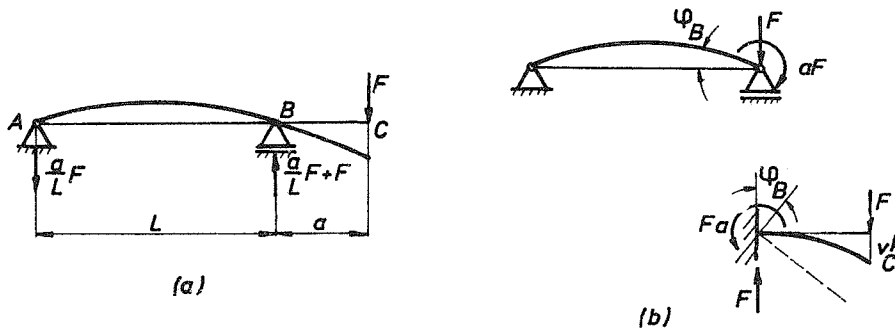
Odrediti metodom superpozicije (pomoću Tablica) ugib i nagib tačke C grede s prepustom na sl. P 11.15 (a).

Rješenje:

Zamislamo da smo gredu razdvojili na dva dijela kao na sl. P 11.15 (b). Tada je očigledno:

$$v_C = v_C^k + \varphi_B \cdot a = \frac{Fa^3}{3EI_x} + \frac{(Fa)L}{3EI_x} \cdot a = \frac{Fa^3}{3EI_x} \left(1 + \frac{L}{a}\right)$$

$$\varphi_C = \varphi_C^k + \varphi_B = \frac{Fa^2}{2EI_x} + \frac{(Fa)L}{3EI_x} = \frac{Fa^2}{6EI_x} \left(3 + 2\frac{L}{a}\right)$$



Sl. P 11.15.

11.3.3. Maxwell-Mohrova metoda fiktivnog nosača

Ova metoda određivanja ugiba i nagiba elastične linije bazira se na matematičkoj analogiji između diferencijalne jednačine elastične linije grednog nosača

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x(z)}{EI_x} \quad (1)$$

i diferencijalne zavisnosti između napadnog momenta i spoljašnjeg opterećenja grednog nosača

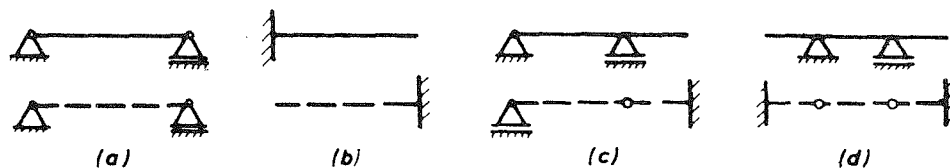
$$\frac{d^2M}{dz^2} = -q(z) \quad (2)$$

Evidentno je da su jednačine (1) i (2) istog oblika. Prema tome, ugib v grednog nosača možemo odrediti tretirajući desnu stranu jednačine (1) kao fiktivno opterećenje grednog nosača, pa za njega odrediti (nacrtati) „napadni moment“. Tako dobijene vrijednosti „napadnog momenta“ od fiktivnog opterećenja predstavljaju ugibe elastične linije. Kako je

$$\frac{dM_x(z)}{dz} = T_y(z), \quad (3)$$

to su nagibi elastične linije jednaki „transferzalnoj sili“ od fiktivnog opterećenja datog desnom stranom jednačine (1).

Međutim, analogija diferencijalnih jednačina (1) i (2) nije dovoljna. Neophodno je takođe obezbijediti i analogiju graničnih uslova. Zato se fiktivnim opterećenjem mora opteretiti ne stvarni, već fiktivni nosač dobijen tako da se ispune uslovi analogije graničnih uslova. Slobodno oslonjenom kraju stvarnog nosača ($v=0$, $v' \neq 0$) odgovara takođe slobodno oslonjen kraj fiktivnog nosača ($M_x=0$, $T_y \neq 0$). Slobodnom kraju stvarnog nosača ($v \neq 0$, $v' \neq 0$) odgovara uklještenje fiktivnog nosača ($M_x \neq 0$, $T_y \neq 0$), uklještenom kraju odgovara slobodan kraj, Gerberovom zglobu odgovara oslonac, itd., kao što je prikazano na sl. 11:42.

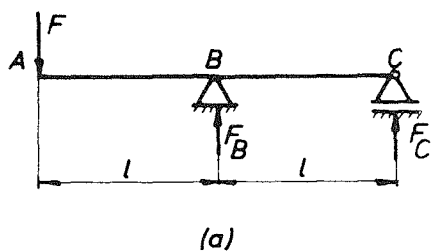


Sl. 11:42.

Primjer 11.16.

Za nosač na sl. P 11.16 (a) odrediti ugib tačke A i nagibe u tačkama A i C . Dato je F , l , EI_x .

Rješenje:

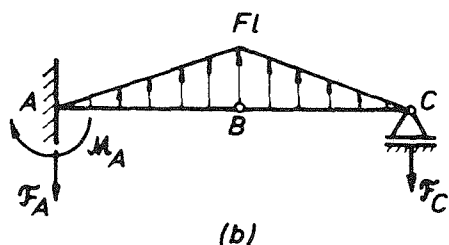


Fiktivni nosač i fiktivno opterećenje prikazani su na sl. P 11.16 (b). Iz uslova ravnoteže fiktivnog nosača slijedi:

$$\mathcal{F}_A = \frac{5}{6} Fl^2 \quad (-), \quad \mathcal{F}_C = \frac{1}{6} Fl^2 \quad (+),$$

$$\mathcal{M}_A = \frac{2}{3} Fl^3 \quad (+).$$

Prema tome je:



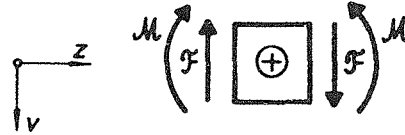
Sl. P 11.16 (a)–(b).

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{F}_A}{EI_x} = -\frac{5 Fl^2}{6 EI_x},$$

$$\varphi_C = \frac{\mathcal{F}_C}{EI_x} = \frac{1 Fl^2}{6 EI_x},$$

$$v_A = \frac{\mathcal{M}_A}{EI_x} = \frac{2 Fl^3}{3 EI_x}.$$

Napomena: Ugib i nagib nosača na nekom mjestu su pozitivni ukoliko su fiktivni moment i transferzalna sila pozitivni na tom mjestu, saglasno usvojenoj konvenciji o smjeru pozitivnog momenta, odnosno transferzalne sile (sl. P 11.16 (c)).



Sl. P 11.16 (c).

Primjer 11.17.

Koristeći se metodom fiktivnog nosača naći ugib i nagib u tački *E* nosača na sl. P 11.17 (a). Dato je *F*, *L*, *EI_x*. Odrediti takođe nagib u tački *B*.

Rješenje:

Fiktivni nosač i opterećenje prikazani su na sl. P 11.17 (b). Fiktivne reakcije su:

$$\mathcal{F}_C = -\frac{13}{6} FL^2, \quad \mathcal{F}_B = \frac{25}{6} FL^2,$$

a fiktivni moment i transferzalna sila u presjeku *E* su:

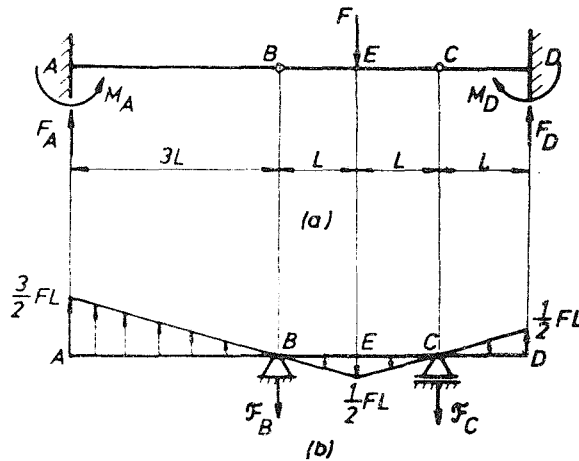
$$\mathcal{M}_E = \frac{15}{6} FL^3, \quad \mathcal{F}_E = -\frac{13}{6} FL^2.$$

Prema tome je:

$$v_L = \frac{\mathcal{M}_E}{EI_x} = \frac{15 FL^3}{6 EI_x}, \quad \varphi_E = \frac{\mathcal{F}_E}{EI_x} = -\frac{13 FL^2}{6 EI_x}.$$

Nagib u tači *B* definisan je sa:

$$\varphi_B^l = \frac{\mathcal{F}_B^l}{EI_x}, \quad \varphi_B^d = \frac{\mathcal{F}_B^d}{EI_x},$$



Sl. P 11.17.

pa kako je:

$$\mathcal{F}_B^l = \frac{9}{4} FL^2, \quad \mathcal{F}_B^d = -\frac{23}{12} FL^2,$$

dobijamo:

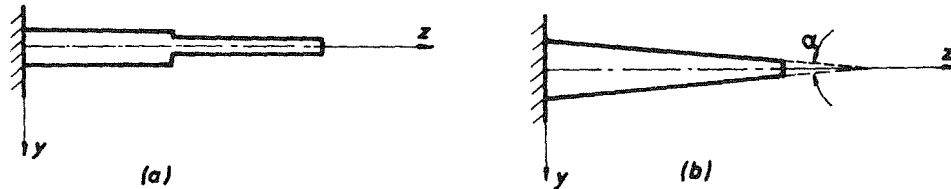
$$\phi_B^l = \frac{9 FL^2}{4 EI_x}, \quad \phi_B^d = -\frac{23 FL^2}{12 EI_x}.$$

11.13.4. Određivanje ugiba i nagiba grede promjenljivog poprečnog presjeka

Diferencijalna jednačina elastične linije

$$v'' = -\frac{M_x(z)}{EI_x} \quad (1)$$

može se približno koristiti i za grede neprizmatičnog oblika, recimo kao na sl. 11:43, s tim što je sada $I_x = I_x(z)$. Za grede sa naglom promjenom poprečno presjeka (kao na sl. 11:43 (a)) postoji lokalna koncentracija napona u tačkama nagle promjene, ali ovo nema značajan efekat na veličinu ugiba grede. Za gred kontinualno promjenljivog poprečnog presjeka (kao na sl. 11:43 (b)), vrijednosti z : ugibe i nagibe sračunate koristeći (1) biće dovoljno tačne pod uslovom da je promjena postepena, tj. ugao α mali (do oko 20°).



Sl. 11:43.

Ilustrirajmo integraciju diferencijalne jednačine (1) za neprizmatičnu gredu na sl. 11:44. Greda je pojačana u središnjem dijelu tako da joj je moment inercije u tom dijelu dva puta veći. Zbog simetrije dovoljno je posmatrati samo lijevu polovinu grede. Diferencijalna jednačina elastične linije je:

$$v'' = -\frac{\frac{F}{2}z}{EI_x}, \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{4}$$

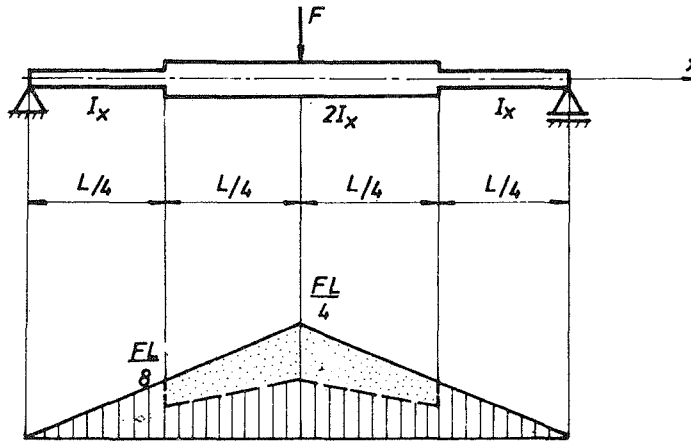
$$v'' = -\frac{\frac{F}{2}z}{2EI_x}, \quad \frac{L}{4} \leq z \leq \frac{L}{2}.$$

Integracijom ove dvije diferencijalne jednačine dobijamo četiri integracione konstante (po dvije za svaku jednačinu), koje možemo odrediti iz uslova $v(0)=0$, $v'(\frac{L}{2})=0$, $v_l(\frac{L}{4})=v_d(\frac{L}{4})$, $v_l'(\frac{L}{4})=v_d'(\frac{L}{4})$. Ova četiri uslova daju četiri integracione konstante, čime su u potpunosti određene jednačine elastične linije grede u oba dijela grede.

Ponekad se greda promjenljivog poprečnog presjeka posmatra kao prizmatična greda, s tim što se redukuje momentni dijagram. Na primjer, za slučaj grede na sl. 11:44 možemo pri određivanju elastične linije smatrati da je greda prizmatična sa konstantnim momentom inercije I_x , s tim da se momentni dijagram u središnjem dijelu redukuje (smanji) dva puta, s obzirom da je tamo

$$v'' = -\frac{\frac{F}{2}z}{2EI_x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{F}{2}z\right)EI_x$$

Dakle, treba integraliti diferencijalnu jednačinu (1) sa vrijednostima momenta $M_x = M_x(z)$ koji je crtkano prikazan na Sl. 11:44. Umjesto formalnog integraljenja diferencijalne jednačine, uz ovo se često koristi metoda fiktivnog nosača pri određivanju ugiba i nagiba na karakterističnim mjestima.



Sl. 11:44.

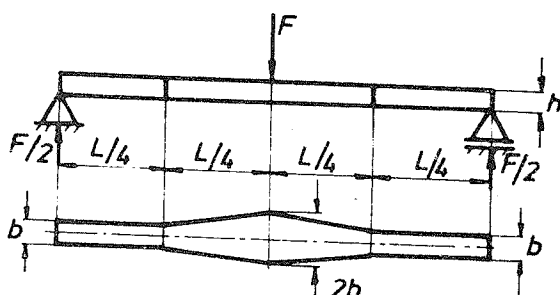
Primjer 11.18.

Odrediti ugib na sredini grede na sl. P 11.18.

Rješenje:

Zbog simetrije posmatraćemo samo polovinu grede. Moment savijanja je

$$M_x(z) = \frac{F}{2}z, \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$$



Sl. P 11.18.

a momenti inercije su:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \equiv I, \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{4}$$

$$I_x = \frac{4z}{L} I, \quad \frac{L}{4} \leq z \leq \frac{L}{2}$$

Prema tome, diferencijalna je načina elastične linije glasi:

$$EI v'' = -\frac{F}{2} z, \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{4}$$

$$EI v'' = -\frac{LF}{4} \frac{z}{2}, \quad \frac{L}{4} \leq z \leq \frac{L}{2}$$

Integracijom slijedi:

$$EI v' = -\frac{F}{4} z^2 + C_1, \quad EI v = -\frac{F}{12} z^3 + C_1 z + C_2, \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{4}$$

$$EI v' = -\frac{FL}{8} \frac{z}{2} + C_3, \quad EI v = -\frac{FL}{16} z^2 + C_3 z + C_4, \quad \frac{L}{4} \leq z \leq \frac{L}{2}$$

Granični uslovi su:

$$v(0) = 0, \quad v_1\left(\frac{L}{4}\right) = v_2\left(\frac{L}{4}\right), \quad v_1\left(\frac{L}{4}\right) = v_2\left(\frac{L}{4}\right), \quad v'\left(\frac{L}{2}\right) = 0,$$

$$\text{što daje: } C_1 = \frac{3}{64} FL^2, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{FL^2}{16}, \quad C_4 = -\frac{1}{768} FL^3.$$

Prema tome je:

$$EI v = \frac{FL^3}{768} \left[-64 \left(\frac{z}{L}\right)^3 + 36 \left(\frac{z}{L}\right) \right], \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{4}$$

$$EI v = \frac{FL^3}{768} \left[-48 \left(\frac{z}{L}\right)^2 + 48 \left(\frac{z}{L}\right) - 1 \right], \quad \frac{L}{4} \leq z \leq \frac{L}{2}$$

$$\text{Ugib na sredini grede je } v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{11 FL^3}{768 EI}.$$

Primjer 11.19.

Za nosač na sl. P 11.19 (a):

- izvršiti dimenzionisanje u presjecima 1-1 i 2-2 ako je $\sigma_d = 12 \text{ kN/cm}^2$.
- odrediti vrijednost maksimalnog ugiba i nagiba tako dimenzionisanog nosača ako je $E = 20 \text{ MN/cm}^2$.

Rješenje:

a) U presjeku 1-1 je $|M_x^{\max}| = aF$, $I_x = 2873 \delta^4$, $y_{\max} = 11 \delta$, pa iz

$$\frac{aF}{2873 \delta^4} \cdot 11 \delta \leq \sigma_d$$

slijedi $\delta \geq 0,985 \text{ cm}$, tj. $\delta = 1 \text{ cm}$, $I_x = 2873 \text{ cm}^4$.

U presjeku 2-2 je $M_x^{\max} = 2aF$, $I_x = 2873 + 2420t + 220t^2$, $y_{\max} = 11\delta + t$, pa iz

$$\frac{2aF}{2873 + 2420t + 220t^2} (11\delta + t) \leq \sigma_d$$

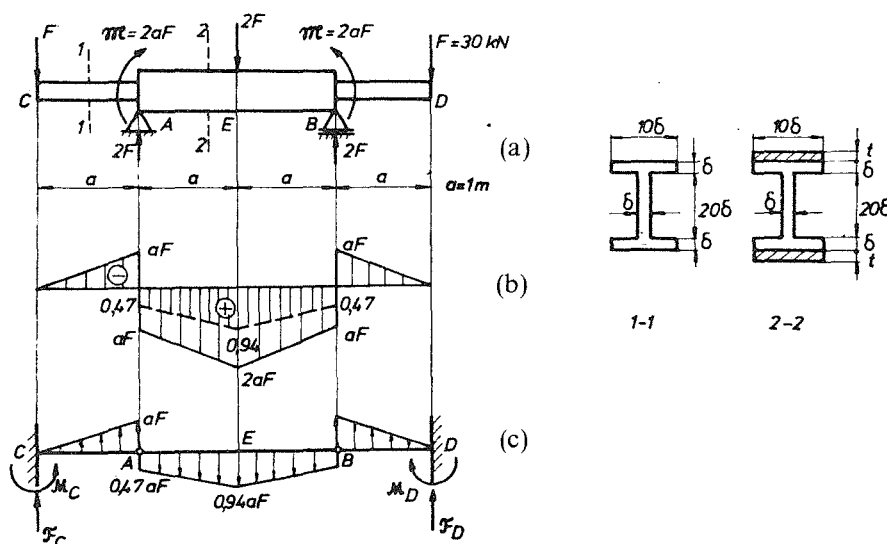
dobijamo $t = 1,2 \text{ cm}$, $I_x = 6094 \text{ cm}^4$.

b) Diferencijalna jednačina elastične linije je:

$$v'' = -\frac{M_x}{E \cdot 2873} = -\frac{M_x}{EI}, \quad I = 2873 \text{ cm}^4, \quad -a \leq z \leq 0$$

$$v'' = -\frac{M_x}{E \cdot 6094} = -\frac{M_x/2, 12}{EI}, \quad 0 \leq z \leq a.$$

Fiktivni nosač je prikazan na sl. P 11.19 (c). Fiktivne reakcije su: $\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_D = 0,205a^2F$, $M_C = M_D = 0,372a^3F (-)$. Takođe je: $M_A = 0$, $\mathcal{F}_A = 0,705a^2F$, $M_E = 0,391a^3F$, $\mathcal{F}_E = 0$.



Sl. P11.19.

Prema tome imamo:

$$v_C = \frac{M_C}{EI} = -0,372 \frac{a^3 F}{EI}, \quad \varphi_C = \frac{\mathcal{F}_C}{EI} = 0,205 \frac{a^2 F}{EI}, \quad v_E = \frac{M_E}{EI} = 0,391 \frac{a^3 F}{EI},$$

$$\varphi_E = 0, \quad v_A = 0, \quad \varphi_A = \frac{\mathcal{F}_A}{EI} = 0,705 \frac{a^2 F}{EI},$$

pa su maksimalni ugib i nagib u nosaču:

$$v_{\max} = v_E = 0,391 \frac{a^3 F}{EI} = 0,204 \text{ cm}, \quad \varphi_{\max} = \varphi_A = 0,705 \frac{a^2 F}{EI} = 0,21^\circ.$$

11.13.5. Određivanje ugiba i nagiba grede metodama deformacionog rada

Saglasno prvom Castiglianovom stavu izvod deformacionog rada po sili jednak je pomjeranju napadne tačke te sile u pravcu te sile, tj.

$$v = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F}, \quad (1)$$

gdje je za gredu savijenu silama

$$\mathcal{A} = \int_0^l \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x}. \quad (2)$$

Dakle,

$$v = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F} = \int_0^l \frac{M_x(z) \frac{\partial M_x(z)}{\partial F}}{EI_x} dz. \quad (3)$$

Slično je izvod deformacionog rada po koncentrisanom spregu savijanja jednak nagibu nosača na mjestu dještva sprega i u ravni sprega, tj.

$$\varphi = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathfrak{M}} = \int_0^l \frac{M_x(z) \frac{\partial M_x(z)}{\partial \mathfrak{M}}}{EI_x} dz. \quad (4)$$

Ako sa f označimo tzv. generalisano pomjeranje (tj. ugib v ili nagib φ), a sa Q tzv. generalisanu silu (tj. silu F ili spreg \mathfrak{M}) tada se (3) i (4) mogu zajednički zapisati u obliku

$$f = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q} = \int_0^l \frac{M_x(z) \frac{\partial M_x(z)}{\partial Q}}{EI_x} dz. \quad (5)$$

Ukoliko se traži (generalisano) pomjeranje na mjestu nosača gdje ne djeluje koncentrisana (generalisana) sila, tada se može dodati fiktivna generalisana sila Q na tom mjestu, pa koristiti formula (5) i na kraju staviti $Q=0$, jer na tom mjestu ne djeluje nikakva sila.

Primjer 11.20.

a) Odrediti ugib i nagib desnog kraja konzole opterećene silom F kao na sl. P 11.20 (a).

b) Odrediti ugib konzole na mjestu $z=l/2$.

Rješenje:

a) Kako je:

$$M_x(z) = -F(l-z), \quad \frac{\partial M_x}{\partial F} = -(l-z),$$

ugib konzole u tački C je

$$v_C = \int_0^l \frac{F(l-z)^2 dz}{EI_x} = \frac{Fl^3}{3EI_x}.$$

Da bismo našli nagib u tački C , dodajmo fiktivni spreg \mathfrak{M} u tački C (sl. P 11.20 (b)). Tada je:

$$M_x(z) = -F(l-z) - \mathfrak{M}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial \mathfrak{M}} = -1,$$

pa je

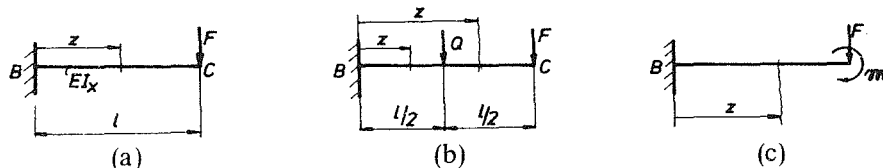
$$\varphi_C = \int_0^l \frac{[-F(l-z)](-1)}{EI_x} dz = \frac{Fl^2}{2EI_x}.$$

b) U cilju određivanja ugiba u tački D dodajmo fiktivnu silu Q kao na sl. P 11.20 (c). Tada je:

$$M_x(z) = -F(l-z) - Q\left(\frac{l}{2} - z\right), \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}; \quad M_x(z) = -F(l-z), \quad \frac{l}{2} \leq z \leq l,$$

pa je

$$v_D = \int_0^{l/2} \frac{[-F(l-z)] \left[-\left(\frac{l}{2} - z\right) \right]}{EI_x} dz = \frac{Fl^3}{12EI_x}.$$



Sl. P 11.20.

Primjer 11.21.

Odrediti ugib i nagib u tački C nosača na sl. P 11.21 (a), kao i pomjeranje tačke B . Dato je a, l, F, EI_x .

Rješenje:

Ugib u tački C određujemo iz

$$v_C = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2),$$

gdje su \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 deformacioni radovi u dijelu ① i ② nosača. Iako je dio ② nosača opterećen u suštini na kombinovano naprezanje savijanjem momentom $M_2 = aF$ i aksijalnom silom $N_2 = F$, deformacioni rad usljed aksijalne sile je zanemarljiv u odnosu na deformacioni rad usljed savijanja, pa je

$$\mathcal{A}_2 = \int_0^l \frac{M_2^2 dz}{2EI_x} + \int_0^l \frac{N_2^2 dz}{2EA} \cong \int_0^l \frac{M_2^2 dz}{2EI_x}.$$

Dakle:

$$v_C = \int_0^a \frac{M_1}{EI_x} \frac{\partial M_1}{\partial F} dz + \int_0^l \frac{M_2}{EI_x} \frac{\partial M_2}{\partial F} dz, \quad M_1 = -Fz, \quad M_2 = -aF$$

$$v_C = \frac{1}{EI_x} \left(\int_0^a Fz^2 dz + \int_0^l Fa^2 dz \right) = \frac{Fa^2}{3EI_x} (a + 3l).$$

Nagib u tački C odredićemo nakon što u tački C dodamo fiktivni spreg \mathfrak{M} (sl. P 11.21 (b)). Tada je:

$$M_1 = -Fz - \mathfrak{M}, \quad M_2 = -Fa - \mathfrak{M},$$

pa je

$$\varphi_C = \int_0^a \frac{(-Fz)(-1)}{EI_x} dz + \int_0^l \frac{(-Fa)(-1)}{EI_x} dz = \frac{Fa}{2EI_x} (a + 2l).$$

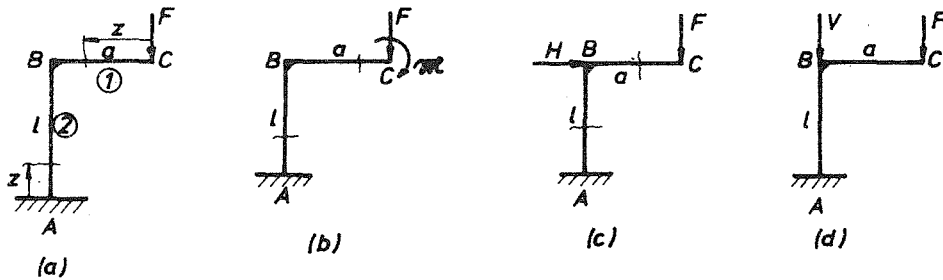
Da bismo odredili horizontalno pomjeranje tačke B , dodajmo u tački B fiktivnu silu H (sl. P 11.21 (c)). Momenti u dijelovima nosača su:

$$M_1 = -Fz, \quad M_2 = -Fa - Hz,$$

pa je

$$u_B = \int_0^a \frac{(-Fz) \cdot 0}{EI_x} dz + \int_0^l \frac{(-Fa)(-z)}{EI_x} dz = \frac{Fal^2}{2EI_x}.$$

Horizontalno pomjeranje tačke C jednako je horizontalnom pomjeranju tačke B, tj. $u_C = u_B$. Analogno nalazimo da je vertikalno pomjeranje tačke B (sl. P 11.21 (d)) jednako nuli. (Zapravo je vertikalno pomjeranje tačke B jednako skraćenju štapa AB usljed pritiskne sile F , ali tu deformaciju zanemarujemo kao malu u odnosu na deformaciju usljed savijanja).



Sl. P 11.21.

Maxwell-Mohrova metoda. – U primjenama Castiglianovog stava (5) često se koristi jedna njegova varijanta poznata pod imenom Maxwell-Mohrova metoda. Naime, poznato je da je napadni moment linearna funkcija od opterećenja, tj. generalisanih koncentrisanih sila Q_i i podijeljenih sila q_i

$$M_x(z) = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \dots + b_1 q_1 + b_2 q_2 + \dots, \quad (6)$$

tako da je

$$\frac{\partial M_x(z)}{\partial Q_i} = a_i. \quad (7)$$

No, koeficijent a_i možemo shvatiti i kao napadni moment $\overline{M}_x(z)$ u nosaču usljed dještva samo jedinične sile $Q_i = 1$, tj.

$$\frac{\partial M_x(z)}{\partial Q_i} = a_i = \overline{M}_x(z), \quad (8)$$

tako da (5) postaje

$$f = \int_0^l \frac{M_x(z) \overline{M}_x(z)}{EI_x} dz. \quad (9)$$

Prema tome, određivanje pomjeranja nosača na nekom mjestu vrši se tako što se odredi izraz za napadni moment $M_x(z)$ usljed datog opterećenja nosača i izraz za napadni moment $\overline{M}_x(z)$ usljed jedinične sile na mjestu gdje se traži pomjeranje, pa izračuna integral (9). Ovaj postupak naziva se Maxwell-Mohrova metoda.

Primjer 11.22.

Odrediti Maxwell-Mohrovom metodom ugib i nagib desnog kraja konzole opterećene silom F kao na sl. P 11.22 (a), kao i ugib konzole na mjestu $z = \frac{L}{2}$.

Rješenje:

Moment savijanja u konzoli na sl. P 11.22 (a) je

$$M_x(z) = -F(l-z),$$

dok je moment usljed jedinične sile na sl. P 11.22 (b)

$$\bar{M}_x(z) = -1 \cdot (l-z).$$

Prema tome,

$$v_C = \int_0^l \frac{F(l-z)^2}{EI_x} dz = \frac{Fl^3}{3EI_x}.$$

Moment savijanja od jediničnog sprega (sl. P 11.22 (c)) je

$$\bar{M}_x(z) = -1,$$

pa je

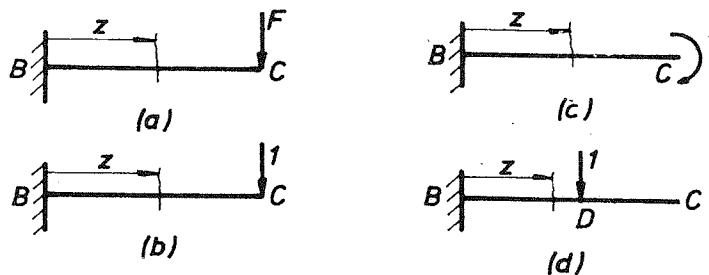
$$\varphi_C = \int_0^l \frac{F(l-z)}{EI_x} dz = \frac{Fl^2}{2EI_x}.$$

Na kraju, moment usljed jedinične sile u tački D (sl. P 11.22 (d)) je

$$\bar{M}_x(z) = -1 \cdot \left(\frac{l}{2} - z\right), \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}; \quad \bar{M}_x(z) = 0, \quad \frac{l}{2} \leq z \leq l,$$

pa je ugib tačke D

$$v_D = \int_0^{l/2} \frac{F(l-z) \left(\frac{l}{2} - z\right)}{EI_x} dz = \frac{Fl^3}{12EI_x}.$$



Sl. P 11.22.

Primjer 11.23.

Odrediti nagib u tački C nosača (rama) na sl. P 11.23 (a), kao i horizontalno pomjeranje tačke B. Dato je: q, h, l, EI_2 .

Rješenje:

Nagib u tački C nosača odredićemo koristeći izraz

$$\varphi_C = \sum_{i=1}^3 \int \frac{M_i \bar{M}_i}{E_i I_i} dz. \quad (\text{a})$$

Momenti savijanja u dijelovima 1, 2 i 3 nosača su:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}, \quad M_3 = 0,$$

dok su momenti usljed jediničnog sprega (sl. P 11.23 (b)):

$$\bar{M}_1 = 0, \quad \bar{M}_2 = 1 - \frac{z}{l}, \quad \bar{M}_3 = 0.$$

Zamjenom u (a) dobijamo

$$\varphi_C = \int_0^l \frac{1}{EI_2} \left(\frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right) \left(1 - \frac{z}{l} \right) dz = \frac{ql^3}{24EI_2}.$$

Horizontalno pomjeranje tačke B dobićemo iz

$$u_B = \sum_{i=1}^3 \int \frac{M_i \bar{M}_i}{E_i I_i} dz,$$

gdje su:

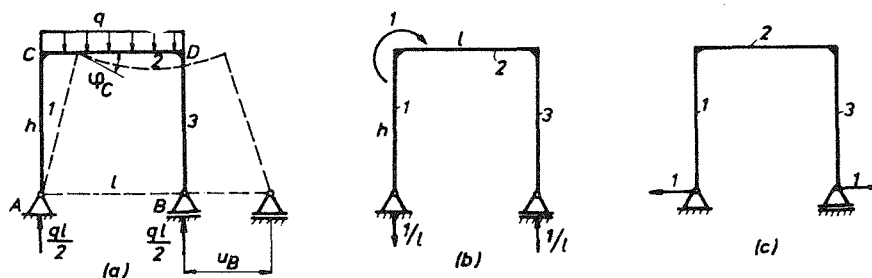
$$\bar{M}_1 = 1 \cdot z, \quad \bar{M}_2 = 1 \cdot h, \quad \bar{M}_3 = 1 \cdot z$$

momenti u dijelovima nosača usljed jedinične sile u tački B (sl. P 11.23 (c)). Dakle,

$$u_B = \int_0^l \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI_2} dz = \int_0^l \frac{1}{EI_2} \left(\frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right) h dz = \frac{qhl^3}{12EI_2}.$$

Očigledno je iz geometrije problema da je:

$$u_C = u_D = h \varphi_C = \frac{qhl^3}{24EI_2}, \quad u_B = u_D + h \varphi_C = \frac{qhl^3}{12EI_2}.$$



Primjer 11.24.

Odrediti uhib i nagib u tački C konzole promjenljivog poprečnog presjeka na sl. P 11.24 (a).

Rješenje:

Momenti savijanja u dijelovima 1 i 2 su:

$$M_1 = -F z, \quad M_2 = -F \left(\frac{l}{2} + z \right),$$

pri čemu z mjerimo od tačke C za dio 1, a od tačke B za dio 2. Momenti od jedinične sile na sl. P 11.24 (b) su:

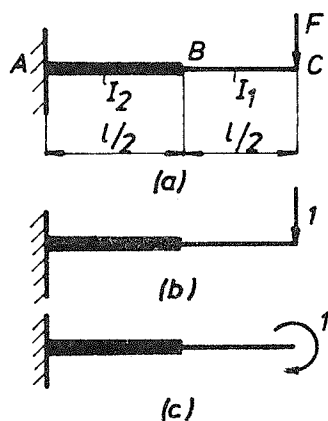
$$\bar{M}_1 = -1 \cdot z, \quad \bar{M}_2 = -1 \cdot \left(\frac{l}{2} + z \right),$$

pa je uhib u tački C

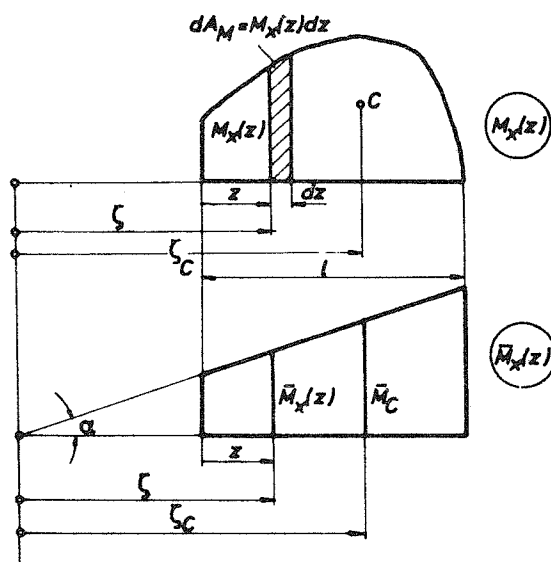
$$v_C = \int_0^{l/2} \frac{Fz^2}{EI_1} dz + \int_0^{l/2} \frac{F \left(\frac{l}{2} + z \right)^2}{EI_2} dz = \frac{Fl^3}{24EI_1} + \frac{7Fl^3}{24EI_2}.$$

Nagib određujemo iz

$$\varphi_C = \int_0^{l/2} \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI_1} dz + \int_0^{l/2} \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI_2} dz,$$



Sl. P 11.24.



Sl. 11:45.

gdje su $\overline{M}_1 = -1$ i $\overline{M}_2 = -1$ momenti usljed jediničnog sprega u tački C (sl. P 11.24 (c)). Dakle,

$$\varphi_C = \int_0^{l/2} \frac{Fz}{EI_1} dz + \int_0^{l/2} \frac{F\left(\frac{l}{2} + z\right)}{EI_2} dz = \frac{Fl^2}{8EI_1} + \frac{3Fl^2}{8EI_2}.$$

Vereščaginova metoda. – Ukoliko je krutost na savijanje konstantna duž ose grede, (9) postaje

$$f = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_x(z) \overline{M}_x(z) dz. \quad (10)$$

Umjesto formalne integracije integrala u (10), ovaj integral se često računa po tzv. Vereščaginovom postupku. Naime, dok dijagram napadnog momenta $M_x(z)$ može imati proizvoljan oblik zavisno od opterećenja, dijagram $\overline{M}_x(z)$ usljed jedinične sile je uvijek pravolinijski (recimo kao na sl. 11:45). Ovo omogućuje izvođenje Vereščaginove formule za računanje integrala u (10). Zaista, sa sl. 11:45 je očigledno

$$M_x(z) \overline{M}_x(z) dz = dA_M \overline{M}_x(z) = dA_M \zeta \operatorname{tg} \alpha, \quad (11)$$

pa je

$$\int_0^l M_x(z) \overline{M}_x(z) dz = (\operatorname{tg} \alpha) \int_0^l \zeta dA_M. \quad (12)$$

No, po teoremi o srednjoj vrijednosti integral na desnoj strani u (12) jednak je $\zeta_C A_M$, tj. jednak je proizvodu koordinate ζ_C težišta površine A_M dijagrama $M_x(z)$, i površine A_M tog dijagrama, pa je

$$\int_0^l M_x(z) \overline{M}_x(z) dz = (\zeta_C \operatorname{tg} \alpha) A_M = \overline{M}_C A_M, \quad (13)$$

gdje je \overline{M}_C ordinata dijagrama $\overline{M}_x(z)$ na mjestu težišta površine dijagrama $M_x(z)$.

Prema tome, pomjeranje računamo po formuli

$$f = \frac{\overline{M}_C A_M}{EI_x}, \quad (14)$$

tj. množenjem površine A_M dijagrama momenta $M_x(z)$ sa ordinatom \overline{M}_C dijagrama momenta $\overline{M}_x(z)$ na mjestu težišta površine A_M , i dijeljenjem sa EI_x . Formula (14) naziva se Vereščaginova formula i vrlo je praktična za određivanje pomjeranja tačaka nosača.

Primjer 11.25.

Odrediti metodom Vereščagina ugib i nagib kraja C konzole opterećene silom F kao na sl. P 11.25 (a).

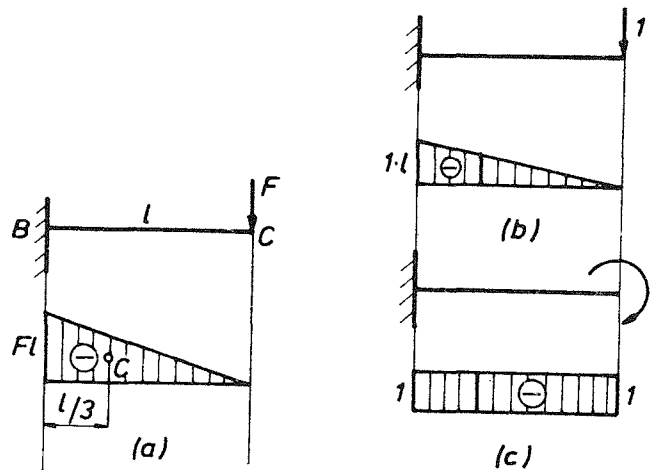
Rješenje:

Množeći momentne dijagrame na sl. P 11.25 (a) i (b), saglasno izrazu (11.13.5:14) dobijamo da je ugib konzole u tački C

$$v_c = \frac{\left(-\frac{2}{3}l\right)\frac{1}{2}l(-Fl)}{EI_x} = \frac{Fl^3}{3EI_x},$$

dok se za nagib dobija, množeći momentne dijagrame na sl. P 11.25 (a) i (c),

$$\varphi_c = \frac{(-1)\frac{1}{2}l(-Fl)}{EI_x} = \frac{Fl^2}{2EI_x}.$$



Sl. P 11.25.

Napomena 1: Ukoliko se dijagram momenta $\overline{M}_x(z)$ lomi duž ose grede, tada treba Vereščaginov obrazac primijeniti posebno za svaki dio i rezultate sabrati (jer smo izveli Vereščaginov obrazac smatrajući da se dijagram $\overline{M}_x(z)$ ne lomi). Ovo je ilustrovano u narednom primjeru.

Primjer 11.26.

Odrediti ugib sredine grede pod dejstvom koncentrisane sile na sredini grede (sl. P 11.26 (a)).

Rješenje:

Vereščaginov obrazac primjenjujemo za polovine momentnih dijagrama, tako da dobijamo

$$v_B = 2 \frac{\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{1}{2}l\frac{Fl}{4}\right)}{EI_x} = \frac{Fl^3}{48EI_x}.$$



Sl. P 11.26.

Napomena 2: Ukoliko je nalaženje težišta površine A_M komplikovano, može se površina A_M izdijeliti na pogodne dijelove A_{M_i} (čija se težišta C_i lako nalaze), pa koristiti Vereščaginov obrazac u obliku

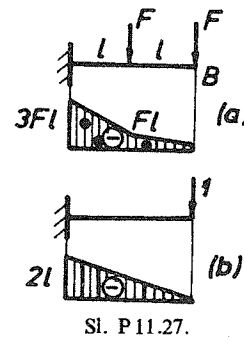
$$f = \frac{1}{EI_x} \sum \bar{M}_{C_i} A_{M_i}$$

Primjer 11.27.

Odrediti ugib u tački B konzole na sl. P 11.27 (a).

Rješenje:

Momentni dijagram na sl. P 11.27 (a) izdijelimo na tri dijela čija se težišta lako nalaze, kao što je prikazano na slici. Tada imamo:

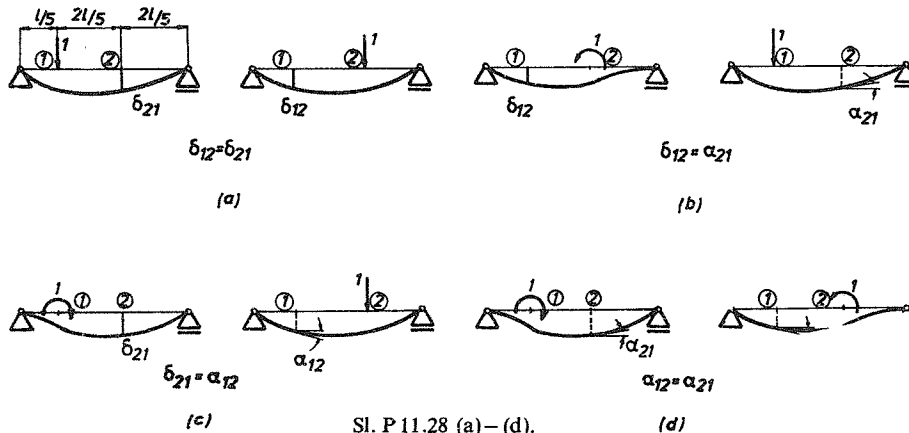


Sl. P 11.27.

$$v_B = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{2}{3} l \right) \left(\frac{1}{2} l \cdot Fl \right) + \left(\frac{3}{2} l \right) (l \cdot Fl) + \left(\frac{5}{3} l \right) \left(\frac{1}{2} l \cdot 2Fl \right) \right] = \frac{7Fl^3}{3EI_x}$$

Primjer 11.28.

Koristeći metodu Vereščagina dokazati uzajamnost Maxwellovih koeficijenta prikazanu na sl. P 11.28 (a) – (d).



Sl. P 11.28 (a) – (d).

Rješenje:

Posmatrajmo prvo slučaj na sl. P 11.28 (a). Koristeći Vereščaginov postupak, prema sl. P 11.28 (e) slijedi:

$$F\delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{l}{5} \frac{4}{25} Fl \right) \left(\frac{2}{3} \frac{6l}{25} \right) + \left(\frac{2l}{5} \frac{2Fl}{25} \right) \left(\frac{2}{3} \frac{6l}{25} \right) + \left(\frac{1}{3} \frac{2l}{5} \frac{2}{25} Fl \right) \left(\frac{2}{15} l \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{2l}{5} \frac{2}{25} Fl \right) \left(\frac{2}{3} \frac{6l}{25} \right) \right] = 0,0107 \frac{Fl^3}{EI}.$$

Analogno se dobija

$$F\delta_{12} = 0,0107 \frac{Fl^3}{EI},$$

čime je dokazana jednakost $\delta_{12} = \delta_{21} = 0,0107 \frac{l^3}{EI}$.

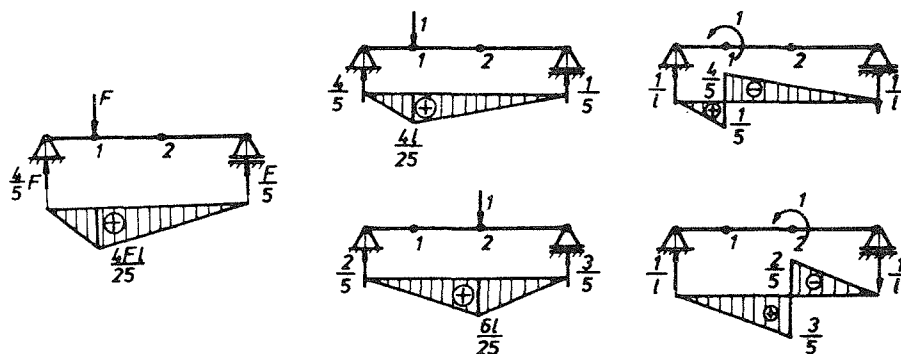
Na isti način se dokazuju preostale jednakosti. Za slučaj na sl. P 11.28 (b) dobija se (vidi sl. P 11.28 (e)):

$$F\alpha_{21} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{l}{5} \frac{4}{25} Fl \right) \left(\frac{2}{15} \right) + \left(\frac{2l}{5} \frac{2}{15} Fl \right) \left(\frac{2}{5} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{2l}{5} \frac{2}{25} Fl \right) \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{2l}{5} \frac{2}{25} Fl \right) \left(-\frac{2}{3} \frac{2}{5} \right) \right] = 0,016 \frac{Fl^2}{EI}.$$

Analogno je

$$\mathfrak{M}\delta_{12} = 0,016 \frac{\mathfrak{M}l^2}{EI},$$

pa je dokazana i jednakost $\alpha_{21} = \delta_{12} = 0,016 \frac{l^2}{EI}$.



Sl. P 11.28 (e).

Slično slijedi za slučaj na sl. P 11.28 (c)

$$\delta_{21} = \alpha_{12} = +0,048 \frac{l^2}{EI},$$

dok je za slučaj na sl. P 11.28 (d)

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = +0,0667 \frac{l}{EI}.$$

Primjer 11.29.

Koristeći poznate vrijednosti Maxwellovih uticajnih koeficijenata odrediti ugibe i nagibe u tačkama 1 i 2 grede na sl. P 11.29.

Rješenje:

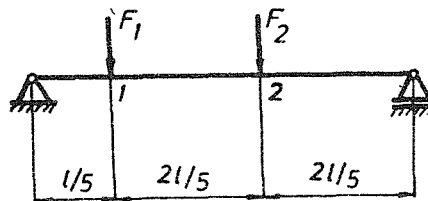
Na osnovu principa superpozicije slijedi:

$$v_1 = F_1 \delta_{11} + F_2 \delta_{12} = F_1 \cdot 0,0085 \frac{l^3}{EI} + F_2 \cdot 0,0107 \frac{l^3}{EI}$$

$$v_2 = F_1 \delta_{21} + F_2 \delta_{22} = F_1 \cdot 0,0107 \frac{l^3}{EI} + F_2 \cdot 0,1517 \frac{l^3}{EI}$$

$$\varphi_1 = F_1 \alpha_{11} + F_2 \alpha_{12} = F_1 \cdot 0,032 \frac{l^2}{EI} + F_2 \cdot 0,048 \frac{l^2}{EI}$$

$$\varphi_2 = F_1 \alpha_{21} + F_2 \alpha_{22} = -F_1 \cdot 0,016 \frac{l^2}{EI} - F_2 \cdot 0,016 \frac{l^2}{EI}.$$



Sl. P 11.29.

Primjer 11.30.

Odrediti metodom Vereščagina ugib u tački C grede na sl. P 11.30 (a).
Odrediti takođe promjenu nagiba tangente na elastičnu liniju u zglobu G. Dato je:
 $F, l, EI_1, I_1/I_2 = 2$.

Rješenje:

Ugib u tački C dobićemo „množeći“ dijagrame na sl. P 11.30 (a) i (b):

$$v_c = \frac{\left(\frac{1}{2}l \frac{Fl}{2}\right) \left(\frac{2l}{3}\right)}{EI_1} + \frac{\left(\frac{1}{2}l \frac{Fl}{2}\right) \left(\frac{2l}{3}\right)}{EI_2} + \frac{\left(\frac{1}{2}l \frac{Fl}{2}\right) \left(\frac{2l}{3}\right)}{EI_2} = \frac{1}{24} \frac{Fl^3}{EI_1} \left(2 + 3 \frac{I_1}{I_2}\right) = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI_1}$$

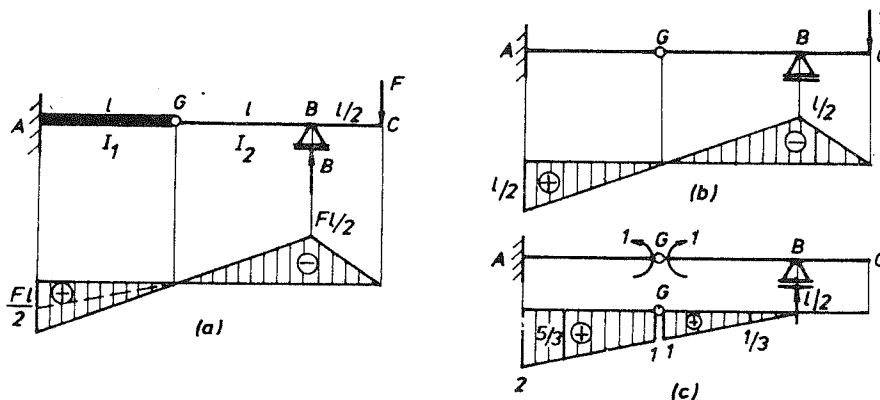
Istu vrijednost možemo dobiti i ako zamislimo da smo sveli nosač na isti moment inercije $I=I_2$, a smanjili dijagram momenta $k = \frac{I_1}{I_2} = 2$ puta na dijelu gdje je moment inercije I_1 (crtkano prikazano na sl. P 11.30 (a)). Dakle,

$$EI_2 v_c = \left(\frac{1}{2}l \frac{Fl}{4}\right) \left(\frac{2l}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}l \frac{Fl}{2}\right) \left(\frac{2l}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}l \frac{Fl}{2}\right) \left(\frac{2l}{3}\right) = \frac{1}{6} Fl^3$$

$$v_c = \frac{1}{6} \frac{Fl^3}{EI_2} = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI_1}$$

Promjenu nagiba tangente na elastičnu liniju grede u zglobu G dobićemo množeći dijagrame na sl. P 11.30 (a) i (c):

$$\Delta\varphi_G = \frac{\left(\frac{1}{2}l \frac{F}{2}\right) \left(\frac{5}{3}\right)}{EI_1} + \frac{\left(-\frac{1}{2}l \frac{Fl}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)}{EI_2} = \frac{Fl^2}{12EI_1} \left(5 - \frac{I_1}{I_2}\right) = \frac{1}{4} \frac{Fl^2}{EI_1}$$



Sl. P 11.30.

Primjer 11.31.

Odrediti pomjeranje tačke C nosača na sl. P 11.31 (a), kao i obrtanje poprečnog presjeka B. Odrediti takođe promjenu rastojanja između tačaka B i C. Dato je: $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 20 \text{ kN}$, $E = 20 \text{ MN/cm}^2$, $I = 3000 \text{ cm}^4$.

Rješenje:

Množeći dijagrame na sl. P 11.31 (a) i (b) dobijamo

$$u_C = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 20 \cdot 2 + 2 \cdot 20 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot 2 \right) = 4,44 \text{ cm},$$

dok se sa dijagrama na sl. P 11.31 (a) i (c) dobija

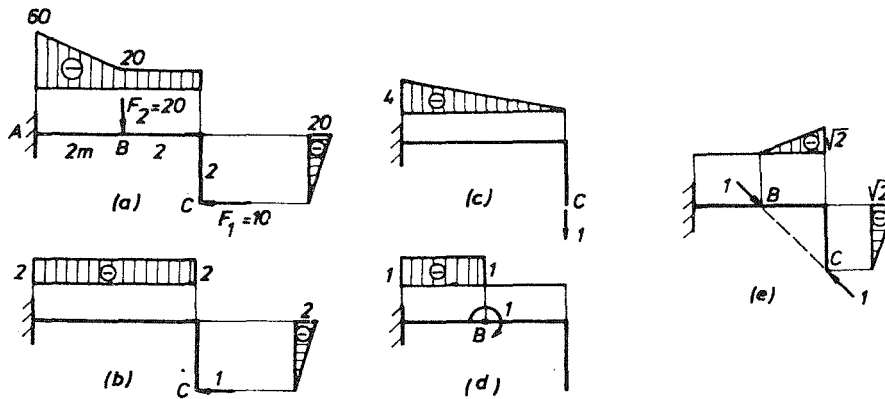
$$v_C = \frac{1}{EI} \left(2 \cdot 20 \cdot 1 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{10}{3} \right) = 4,89 \text{ cm}.$$

Nagib u tački B slijedi sa dijagrama na sl. P 11.31 (a) i (d):

$$\varphi_B = \frac{1}{EI} \left(2 \cdot 20 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot 1 \right) = 0,0133 \text{ rad} = 0,76^\circ.$$

Promjenu rastojanja između tačaka B i C dobićemo „množeći“ dijagrame na sl. P 11.31 (a) i (e):

$$\Delta(BC) = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \right) \left(\frac{2}{3} \sqrt{2} \right) + (2 \cdot 20) \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \right] = 0,786 \text{ cm}.$$



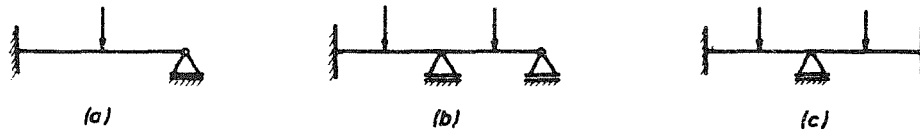
Sl. P 11.31.

11.14. Statički neodređene grede

11.14.1. Određivanje nepoznatih reakcija metodom sila

Za gredni nosač kažemo da je statički neodređen ako je broj nepoznatih reakcija veći od broja statičkih jednačina ravnoteže. Na sl. 11:46 prikazano je nekoliko vrsta statički neodređenih greda. Razlika između broja nepoznatih komponenti reakcija i raspoloživih jednačina ravnoteže grednog nosača predstavlja stepen statičke neodređenosti. Na primjer, nosač na sl. 11:46 (a) je jedanput statički neodređen, na sl. 11:46 (b) dva puta, a na sl. 11:46 (c) tri puta. Da bi se odredili naponi u ovakvim gredama, te izvršilo dimenzionisanje, neophodno je prvo odrediti

sve nepoznate reakcije. Za to postoje razni načini, a mi ćemo se ovdje ograničiti samo na tzv. metodu sila. Po ovoj metodi obrazuje se od statički neodređenog statički određen nosač uklanjanjem suvišnih veza. Uticaj uklonjenih veza se zamjenjuje nepoznatim reakcijama (silama ili spregovima) koje nazivamo statički nepoznatim (prekobrojnim). Potom se formiraju jednačine koje slijede iz geometrijskih uslova o pomjeranjima (ugibima i nagibima) na mjestima veza (jednačine kompatibilnosti). Tako se dobija kompletan sistem jednačina, sastavljen od statičkih jednačina ravnoteže i jednačina kompatibilnosti, iz kog se mogu odrediti sve nepoznate reakcije.



Sl. 11:46.

Isti nosač možemo na različite načine učiniti statički određenim. Na primjer, nosač na sl. 11:46 (a) možemo učiniti statički određenim kao što je prikazano na sl. 11:47 (a) ili (b). Za slučaj na sl. 11:47 (a) statički nepoznata je sila Y , a za slučaj na sl. 11:47 (b) moment M . Naravno da rješenje ne zavisi od izbora statički nepoznate, tj. načina na koji se obrazuje statički određen nosač, ali pogodan izbor može znatno olakšati računski dio rješavanja problema.



Sl. 11:47.

U primjerima koji slijede ilustrovaćemo primjenu metode sila pri rješavanju statički neodređenih grednih nosača.

Primjer 11.32.

Greda AB ukliještena je na lijevom kraju A i poduprta na desnom kraju B . Odrediti reakcije veza usljed kontinualnog opterećenja q (sl. P 11.32 (a)).

Rješenje:

Zadatak je očigledno jedanput statički neodređen. Koristeći metodu sila, zamislimo da smo uklonili oslonac B i njegov uticaj predstavili silom Y_B . Dobili smo statički određenu konzolu na sl. P 11.32 (b), s tim što je sila Y_B nepoznata veličina. Da bismo je odredili, koristimo uslov da je ugib u tački B jednak nuli. Dakle,

$$v_B = v_B^q + v_B^{Y_B} = \frac{qL^4}{8EI} + \left(-\frac{Y_B L^3}{3EI} \right) = 0,$$

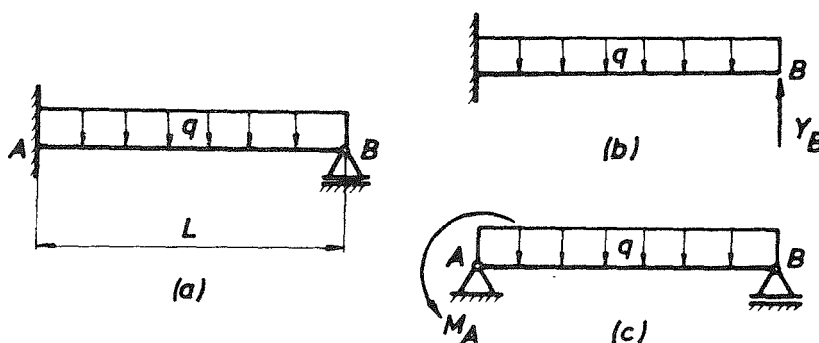
odakle je $Y_B = \frac{3}{8} qL$. Reakcije u uklještenju A sada je lako naći iz statičkih uslova

ravnoteže. Dobijamo: $Y_A = \frac{5}{8} qL$, $M_A = \frac{1}{8} qL^2$.

Zadatak smo mogli riješiti i uvođenjem reaktivnog momenta M_A kao statički prekobrojne veličine (sl. P 11.32 (c)). Tada bi uslov kompatibilnosti bio da je nagib u tački A jednak nuli, tj.

$$\varphi_A = \varphi_A^q + \varphi_A^{M_A} = \frac{qL^3}{24EI} + \left(-\frac{M_A L}{3EI} \right) = 0,$$

odakle je $M_A = \frac{1}{8} qL^2$. Ostale reakcije onda slijede iz jednačina ravnoteže.



Sl. P 11.32.

Primjer 11.33.

Obostrano uklještena greda opterećena je koncentrisanom silom kao na sl. P 11.33 (a). Odrediti reakcije veza.

Rješenje:

Obostrano uklještena greda je dva puta statički neodređena. Za statički nepoznate izaberimo reaktivne momente u uklještenjima, M_A i M_B (sl. P 11.33 (b)). Njih ćemo odrediti iz uslova da su nagibi u tačkama A i B jednaki nuli, tj.:

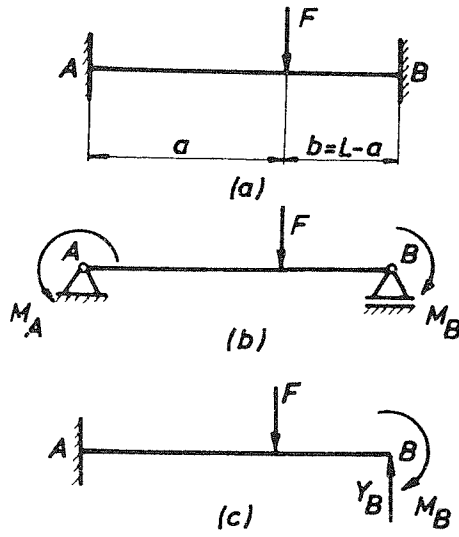
$$\varphi_A = \varphi_A^F + \varphi_A^{M_A} + \varphi_A^{M_B} = 0$$

$$\varphi_B = \varphi_B^F + \varphi_B^{M_A} + \varphi_B^{M_B} = 0,$$

odnosno:

$$\varphi_A = \frac{Fab(L+b)}{6LEI} + \left(-\frac{M_A L}{3EI} \right) + \left(-\frac{M_B L}{6EI} \right) = 0$$

$$\varphi_B = \frac{Fab(L+a)}{6LEI} + \left(-\frac{M_A L}{6EI} \right) + \left(-\frac{M_B L}{3EI} \right) = 0.$$



Sl. P 11.33.

Oдавде je rješavanjem po M_A i M_B :

$$M_A = \frac{Fab^2}{12}$$

$$M_B = \frac{Fa^2b}{12}$$

Iz statičkih jednačina ravnoteže sada je lako naći preostale reakcije (sile u uklještenjima A i B):

$$Y_A = \frac{Fb^2}{L^3} (L+2a), \quad Y_B = \frac{Fa^2}{L^3} (L+2b).$$

Isto rješenje dobili bismo da smo za statički nepoznate reakcije (sile i momente u uklještenju B (sl. P 11.33 (c)), samo bi tada geometrijski uslovi bili da su uhib i nagib u tački B jednaki nuli.

Primjer 11.34.

Naći reakcije veza nosača na sl. P 11.34 (a) i nacrtati dijagrame presječnih sila u nosaču.

Rješenje:

Zamislamo da smo nosač razdvojili u presjeku C (sl. P 11.34 (b)). Nagib i uhib u tački C mora biti isti za oba dijela nosača, tj.:

$$\varphi_C^l = \varphi_C^d, \quad v_C^l = v_C^d. \quad (a)$$

Kako je:

$$\varphi_C^l = \frac{F_C a^2}{2EI} - \frac{M_C a}{EI},$$

$$\varphi_C^d = \frac{F_C (2a)^2}{2EI} + \frac{M_C 2a}{EI} - \frac{q (2a)^3}{6EI}$$

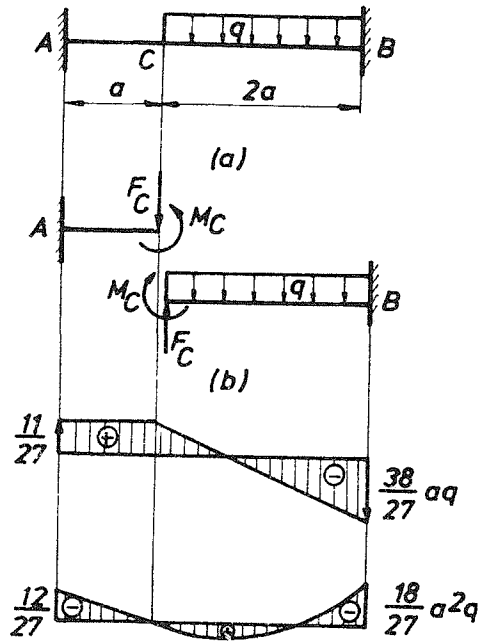
$$v_C^l = \frac{F_C a^3}{3EI} - \frac{M_C a^2}{2EI},$$

$$v_C^d = -\frac{F_C (2a)^3}{3EI} - \frac{M_C (2a)^2}{2EI} + \frac{q (2a)^4}{8EI},$$

zamjenom u (a) imamo:

$$\frac{3}{2} F_C a + 3M_C = \frac{4}{3} a^2 q$$

$$3F_C a + \frac{3}{2} M_C = 2a^2 q,$$



(c)

Sl. 11:34.

odakle je $F_C = \frac{16}{27}aq$, $M_C = \frac{4}{27}a^2q$. Iz jednačina ravnoteže sada direktno slijede reakcije veza:

$$F_A = \frac{16}{27}aq, \quad F_B = -\frac{38}{27}aq,$$

$$M_A = -\frac{12}{27}a^2q, \quad M_B = -\frac{18}{27}a^2q.$$

Dijagrami presječnih sila prikazani su na sl. P 11.34 (c).

Primjer 11.35.

Konzola na sl. P 11.35 (a) opterećena je kontinualnim opterećenjem q . U tački B je zglobno vezan štab CB krutosti na istezanje E_2A_2 . Ako je krutost grede na savijanje E_1I_1 , odrediti silu u štapu CB .

Rješenje:

Ugib konzole AB u tački B (sl. P 11.35 (b)) jednak je izduženju štapa CB , tj. $v_B = \Delta(CB)$, pa kako je:

$$v_B = \frac{qL^4}{8E_1I_1} - \frac{SL^3}{3E_1I_1}, \quad \Delta(CB) = \frac{Sh}{E_2A_2},$$

dobijamo

$$S = \frac{3}{8}qL \frac{1}{1 + 3 \frac{h}{L^3} \frac{E_1I_1}{E_2A_2}}.$$

Primjer 11.36.

Koliki treba da bude zazor Δ pa da sve tri reakcije u osloncima budu jednake nakon dještva kontinualnog opterećenja q nosača na sl. P 11.36 (a)?

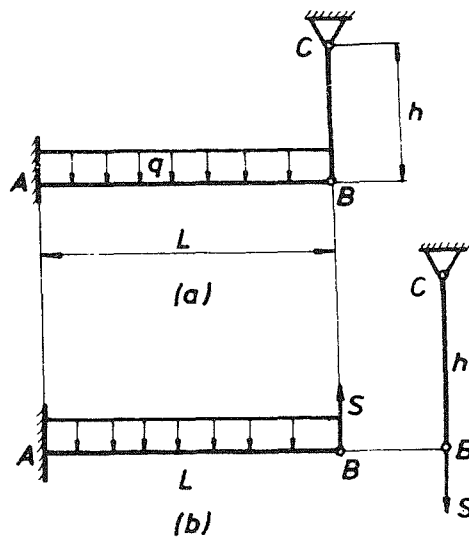
Rješenje:

Iz jednačine ravnoteže je

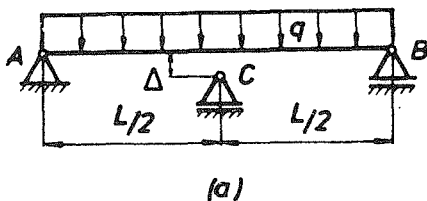
$$F_A + F_B + F_C = qL,$$

pa je, s obzirom na uslov zadatka,

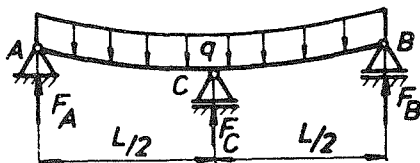
$$F_A = F_B = F_C = \frac{1}{3}qL.$$



Sl. P 11.35.



(a)



(b)

Sl. P 11.36.

Ugib grede u tački C jednak je Δ , tj.

$$v_C = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} - \frac{F_C L^3}{48EI} = \Delta,$$

odakle dobijamo

$$\Delta = \frac{7}{1152} \frac{qL^4}{EI}.$$

Primjer 11.37.

Odrediti reakcije veza nosača na sl. P 11.37 (a). Odrediti takođe ugib tačke E.

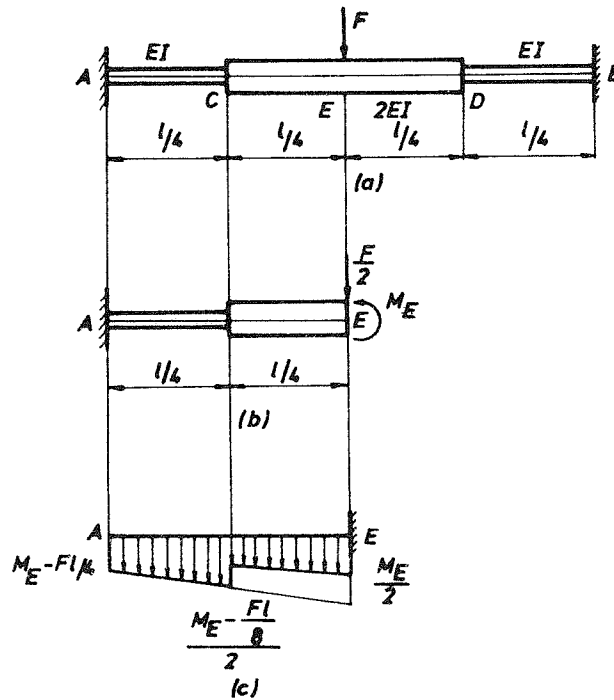
Rješenje:

Zbog simetrije problema dovoljno je posmatrati polovinu nosača (sl. P 11.37 (b)). Vrijednost nepoznatog momenta savijanja M_E dobićemo iz uslova da je zbog simetrije nagib u tački E jednak nuli, tj. $\varphi_E = 0$. Izraz za nagib u tački E dobićemo Maxwell-Mohrovom metodom fiktivnog nosača (sl. P 11.37 (c))

$$\varphi_E = \frac{\mathcal{F}_E}{EI} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(M_E - \frac{Fl}{4} \right) + \left(M_E - \frac{Fl}{8} \right) \right] \frac{l}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(M_E - \frac{Fl}{8} \right) + \frac{1}{2} M_E \right] \frac{l}{4} \right\} = 0$$

odakle je $M_E = \frac{7}{48} Fl$. Reakcije u tački A su sada:

$$F_A = \frac{F}{2}, \quad M_A = M_E - \frac{Fl}{2} = -\frac{5}{48} Fl.$$

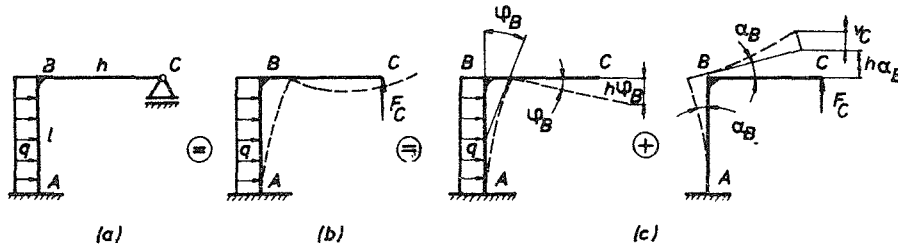


Ugib tačke E je

$$v_E = \frac{M_E}{EI} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{5}{48} + \frac{1}{48} \right) Fl \frac{l}{4} \left(\frac{l}{4} + \frac{3}{16} l \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{96} + \frac{7}{96} \right) Fl \frac{l}{4} \frac{3}{32} l \right] = \frac{11}{3072} \frac{Fl^3}{EI}$$

Primjer 11.38.

Zanemarujući deformaciju usljed aksijalne sile, naći reakcije nosača na sl. P 11.38 (a). Nacrtati dijagrame presječnih sila za cio nosač. (Uzeti $h=L$).



Sl. P 11.38 (a)–(c).

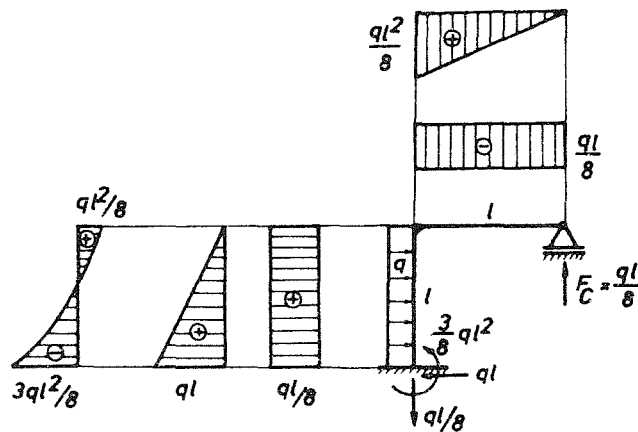
Rješenje:

Nosač je jedanput statički neodređen. Umjesto oslonca C stavićemo silu F_C (sl. P 11.38 (b)) i zahtijevati da je vertikalno pomjeranje tačke C jednako nuli. Izraz za vertikalno pomjeranje tačke C dobićemo superpozicijom kao što je prikazano na sl. P 11.38 (c). Dakle,

$$h\varphi_B = h\alpha_B + v_C, \quad (a)$$

gdje je:

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI}, \quad \alpha_B = \frac{(F_C h) l}{EI}, \quad v_C = \frac{1}{3} \frac{F_C h^3}{EI}$$



Sl. P 11.38 (d).

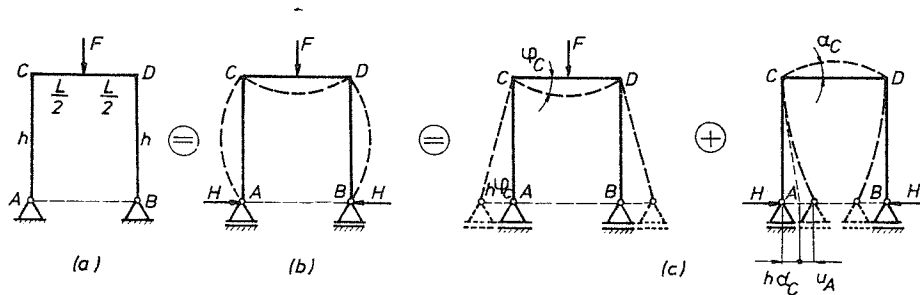
Zamjenom u (a) dobijamo

$$F_C = \frac{ql}{2 \left[\left(\frac{h}{l} \right)^2 + 3 \frac{h}{l} \right]}$$

Dijagrami presječnih sila prikazani su na sl. P 11.38 (d).

Primjer 11.39.

Odrediti maksimalni moment savijanja u nosaču na sl. P 11.39 (a).



Sl. P 11.39 (a)–(c).

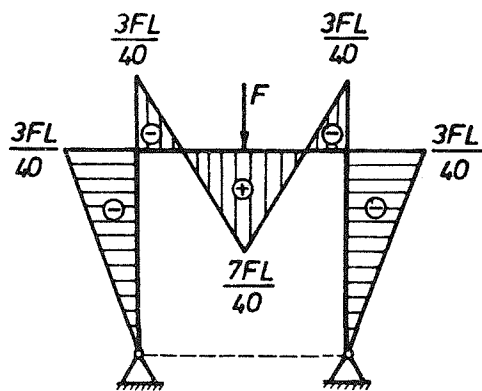
Rješenje:

Sa sl. P 11.39 (c) je očigledno

$$h\varphi_C = h\alpha_C + u_A, \quad (a)$$

gdje je:

$$\varphi_C = \frac{FL^2}{16EI}, \quad \alpha_C = \frac{(Hh)L}{2EI}, \quad u_A = \frac{Hh^3}{3EI}.$$



Sl. P 11.39 (d).

Zamjenom u (a) dobijamo da je horizontalna sila u osloncima A i B

$$H = \frac{3}{8} F \frac{1}{2 \left(\frac{h}{L} \right)^2 + 3 \frac{h}{L}}$$

Na primjer, za $h=L$ je $H = \frac{3}{40} F$.

Dijagrami momenta savijanja su prikazani na sl. P 11.39 (d). Maksimalni moment je $M_{\max} = \frac{7}{40} Fl$.

Primjer 11.40.

Odrediti razmicanje tačaka K_1 i K_2 zatvorenog rama na sl. P 11.40 (a), kao i primicanje tačaka P_1 i P_2 .

Rješenje:

Posmatrajmo posebno dijelove rama AC i CD (sl. P 11.40 (b)). Nepoznatu vrijednost momenta M dobićemo iz uslova da je nagib u tački C isti za oba dijela, tj.

$$\varphi_C^l = \varphi_C^d. \quad (a)$$

Kako je:

$$\varphi_C^l = \frac{Mh}{2EI_1}, \quad \varphi_C^d = \frac{FL^2}{16EI_2} - \frac{ML}{2EI_2},$$

zamjenom u (a) dobijamo

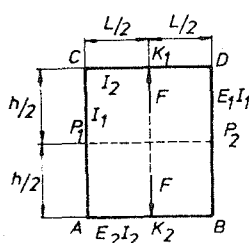
$$M = -\frac{FL}{8 \left(1 + \frac{h I_2}{L I_1} \right)}.$$

Razmicanje tačaka K_1 i K_2 sada nalazimo iz

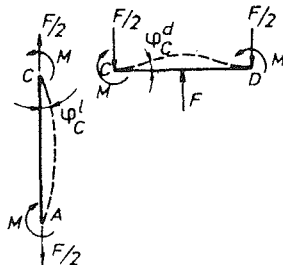
$$\Delta(K_1 K_2) = 2 \left(\frac{FL^3}{48EI_2} - \frac{ML^2}{8EI_2} \right) = \frac{FL^3}{8EI_2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4 \left(1 + \frac{h I_2}{L I_1} \right)} \right].$$

dok je primicanje tačaka P_1 i P_2

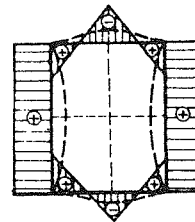
$$\Delta(P_1 P_2) = 2 \frac{Mh^2}{8EI_1} = \frac{FLh^2}{32EI_1} \frac{1}{1 + \frac{h I_2}{L I_1}}.$$



(a)



(b)



(c)

Sl. P 11.40.

Primjer 11.41.

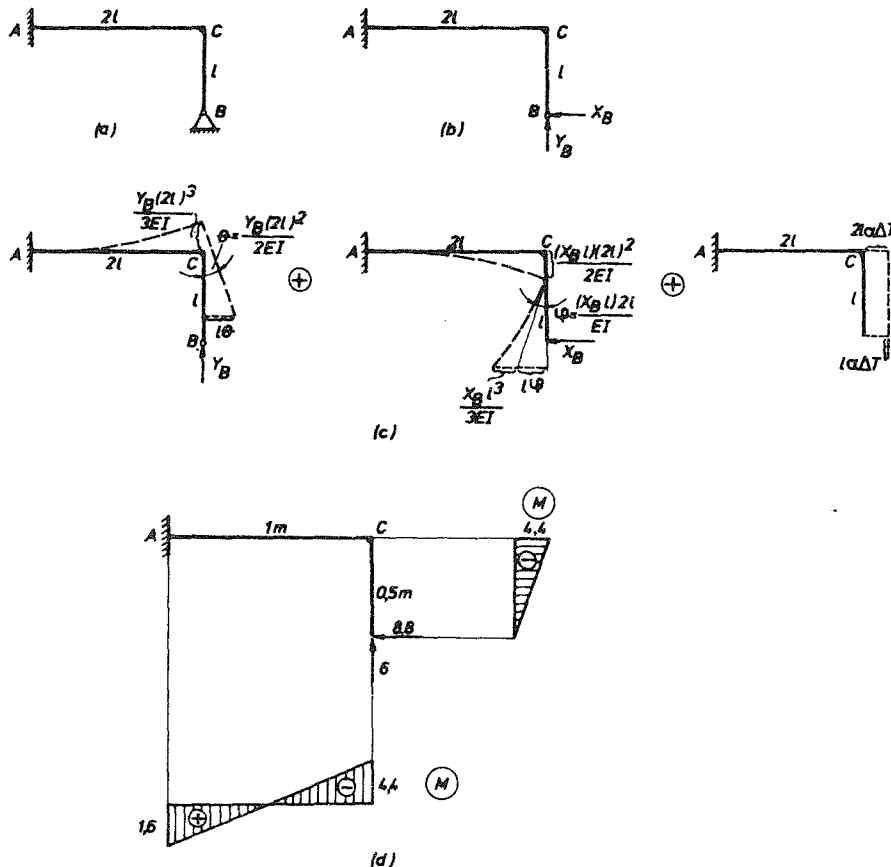
Ram prikazan na sl. P 11.41 (a) zagrije se za $\Delta T = 250^\circ\text{C}$. Odrediti maksimalni moment u ramu. Ram je od I 10 profila ($I = 171 \text{ cm}^4$), $E = 20 \text{ MN/cm}^2$, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $l = 0,5 \text{ m}$.

Rješenje:

Ram je dva puta statički neodređen. Uticaj oslonca B zamijenimo nepoznatim reakcijama X_B i Y_B (sl. P 11.41 (b)) koje određujemo iz uslova da je pomjeranje tačke B jednako nuli. Izraze za pomjeranja tačke B dobićemo koristeći princip superpozicije, kao što je prikazano na sl. P 11.41 (c). Dakle:

$$x_B = 2l\alpha\Delta T + l\theta - l\varphi - \frac{X_B l^3}{3EI} = 0$$

$$y_B = l\alpha\Delta T - \frac{Y_B (2l)^3}{3EI} + \frac{(X_B l)(2l)^2}{2EI} = 0,$$



Sl. P 11.41.

tj.:

$$2l\alpha\Delta T + l \frac{Y_B (2l)^2}{2EI} - l \frac{(X_B l) 2l}{EI} - \frac{X_B l^3}{3EI} = 0$$

$$l\alpha\Delta T - \frac{Y_B (2l)^3}{3EI} + \frac{(X_B l) (2l)^2}{2EI} = 0.$$

Odavde dobijamo sistem jednačina:

$$7X_B - 6Y_B = \frac{6EI\alpha\Delta T}{l^2}$$

$$6X_B - 8Y_B = -\frac{3EI\alpha\Delta T}{l^2}$$

čijim rješavanjem nalazimo: $X_B = 8,8$ kN, $Y_B = 6$ kN. Dijagrami momenta u ramu su prikazani na sl. P 11.41 (d). Maksimalni moment je $M_{\max} = M_C = 4,4$ kNm.

11.14.2. *Određivanje reakcija integracijom diferencijalne jednačine elastične linije*

Nepoznate reakcije veza kod statički neodređenih grednih nosača mogu biti određene i integracijom diferencijalne jednačine elastične linije. Procedura je potpuno ista kao i kod statički određenih nosača i sastoji se u postavljanju diferencijalne jednačine elastične linije nosača, njenoj integraciji i korišćenju graničnih uslova. Pri tome se može koristiti diferencijalna jednačina elastične linije izražena preko momenta savijanja, transferzalne sile ili kontinualnog opterećenja (vidi odjeljak 11.13.1). Korišćenje graničnih uslova vodi određivanju konstanti integracije i statički nepoznatih reakcija. Ovaj metod rješavanja statički neodređenih grednih nosača je, međutim, pogodan samo ako je opterećenje relativno prosto i ako nisu u pitanju kontinualne grede (odjeljak 11.12.3), već grede sa samo jednim rasponom. Ako to nije slučaj, metod je nepraktičan jer je računski dio posla integracije i određivanja integracionih konstanti suviše obiman.

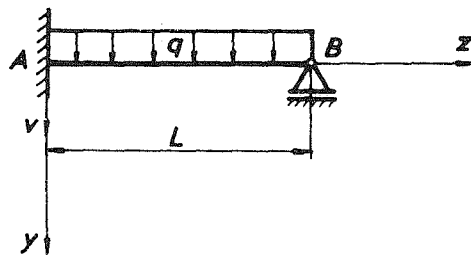
Primjer 11.42.

• Odrediti reakcije u vezama poduprte konzole na sl. P 11.42.

Rješenje:

Diferencijalna jednačina elastične linije izražena preko kontinualnog opterećenja q glasi

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI}.$$



Sl. P 11.42.

Sukcesivnom integracijom dobijamo:

$$\frac{d^3v}{dz^3} = \frac{q}{EI} z + C_1$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{q}{EI} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{q}{EI} \frac{z^3}{6} + C_1 \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_3$$

$$v = \frac{q}{EI} \frac{z^4}{24} + C_1 \frac{z^3}{6} + C_2 \frac{z^2}{2} + C_3 z + C_4.$$

Da bismo odredili integracione konstante, koristimo granične uslove:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v''(L) = 0,$$

odakle slijedi:

$$C_1 = -\frac{5qL}{8EI}, \quad C_2 = \frac{1qL^2}{8EI}, \quad C_3 = C_4 = 0.$$

Nepoznate reakcije sada lako dobijamo iz izraza:

$$Y_B = T_y(z=L) = -EI v'''(z=L) = -\frac{3}{8}qL$$

$$Y_A = T_y(z=0) = -EI v'''(z=0) = \frac{5}{8}qL$$

$$M_A = M_x(z=0) = -EI v''(z=0) = -\frac{1}{8}qL^2.$$

Dobijeni predznaci u vrijednostima za reakcije definišu smjer reakcije u smislu konvencije o pozitivnim vrijednostima transferzalne sile i momenta savijanja. Na primjer, znak „-“ u vrijednosti za Y_B znači da Y_B djeluje naviše gledano s desne strane.

Primjer 11.43.

Odrediti reakcije poduprte konzole na sl. P 11.43 opterećene koncentrisanim spregom \mathfrak{M} na desnom kraju.

Rješenje:

Diferencijalna jednačina elastične linije je

$$EI \frac{d^4v}{dz^4} = q \equiv 0,$$

odakle slijedi integracijom:

$$EI v''' = C_1, \quad EI v'' = C_1 z + C_2, \quad EI v' = C_1 \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_3$$

$$EI v = C_1 \frac{z^3}{6} + C_2 \frac{z^2}{2} + C_3 z + C_4.$$

Grafični uslovi su:

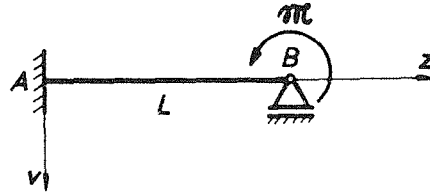
$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0) &= 0 \\ v(L) &= 0, & EIv''(L) &= -\mathfrak{M}, \end{aligned}$$

što definiše vrijednosti integracionih konstanti:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{3\mathfrak{M}}{2L}, & C_2 &= \frac{1}{2}\mathfrak{M}, \\ C_3 &= C_4 = 0. \end{aligned}$$

Prema tome, jednačina elastične linije je

$$v(z) = \frac{\mathfrak{M}L^2}{4EI} \left[-\left(\frac{z}{L}\right)^3 + \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right].$$



Sl. P 11.43.

Reakcije veza su sada:

$$Y_A = -EIv'''(0) = \frac{3\mathfrak{M}}{2L}, \quad M_A = -EIv''(0) = -\frac{1}{2}\mathfrak{M}, \quad Y_B = -EIv'''(L) = \frac{3\mathfrak{M}}{2L}.$$

Primjer 11.44.

Obostrano uklještena greda dobije malu rotaciju lijevog uklještenja za ugao θ , kao na sl. P 11.44. Odrediti reakcije u uklještenjima.

Rješenje:

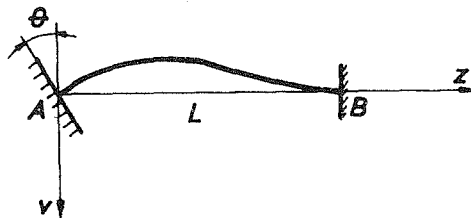
Integracijom diferencijalne jednačine elastične linije

$$EIv^{IV} = q \equiv 0$$

dobijamo:

$$EIv''' = C_1, \quad EIv'' = C_1z + C_2, \quad EIv' = C_1\frac{z^2}{2} + C_2z + C_3$$

$$EIv = C_1\frac{z^3}{6} + C_2\frac{z^2}{2} + C_3z + C_4.$$



Sl. P 11.44.

Iz grafičnih uslova:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0) &= -\theta & v(L) &= 0, \\ & & v'(L) &= 0 & & \end{aligned}$$

je:

$$C_1 = -\frac{6EI}{L^2}\theta, \quad C_2 = \frac{4EI}{L}\theta,$$

$$C_3 = -EI\theta, \quad C_4 = 0,$$

pa jednačina elastične linije glasi

$$v(z) = \theta L \left[-\left(\frac{z}{L}\right)^3 + 2\left(\frac{z}{L}\right)^2 - \left(\frac{z}{L}\right) \right].$$

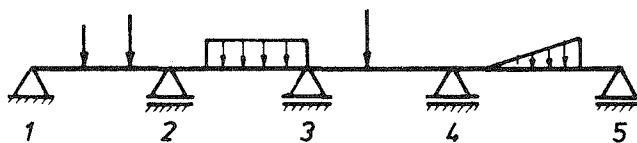
Reakcije u uklještenjima su sada:

$$Y_A = -EIv'''(0) = \frac{6EI}{L^2} \theta, \quad M_A = -EIv''(0) = -\frac{4F}{L} \theta$$

$$Y_B = -EIv'''(L) = \frac{6EI}{L^2} \theta, \quad M_B = -EIv''(L) = \frac{2EI}{L} \theta.$$

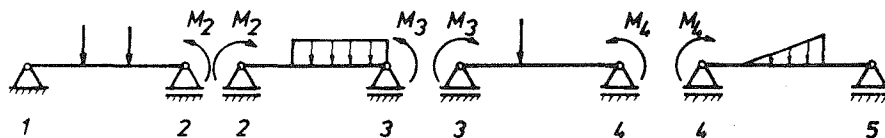
11.14.3. Kontinualne grede

Pod kontinualnom gredom podrazumijevamo gredu koja neprekidno prelazi preko više od dva oslonca (sl. 11:48). Ovakve grede se često sreću u konstrukcijama, pa zaslužuju posebnu pažnju. Jasno je da je kontinualna greda statički



Sl. 11:48.

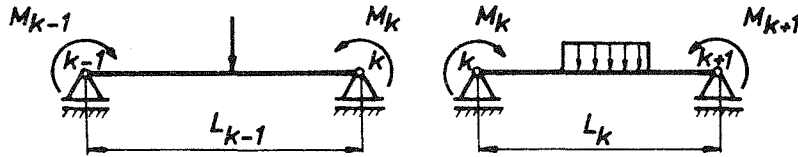
neodređen nosač. Ako je kontinualna greda oslonjena na n oslonaca i ako je opterećenje vertikalno, tada postoji n reakcija i dva statička uslova ravnoteže, pa je nosač $(n-2)$ puta statički neodređen. (Na primjer, nosač na sl. 11:48 je tri puta statički neodređen). Naravno, ovako neodređen nosač možemo riješiti u principu metodom sila, tj. ukloniti središnja $(n-2)$ oslonca, njihov uticaj zamijeniti sa statički nepoznatim reakcijama Y_i ($i=2, 3, \dots, n-1$), pa ispisati $(n-2)$ jednačine kompatibilnosti da je u tačkama 2, 3, ..., $n-1$ ugib jednak nuli. No, u svakoj od ovih jednačina ulazile bi sve nepoznate reakcije, jer ugib na nekom mjestu zavisi od svih sila koje djeluju na nosač, pa bi bilo neophodno rješavati sistem jednačina sa punom matricom sistema, što je obiman i dug postupak. Zato se ovakav postupak koristi samo za kontinualne grede koje se oslanjaju na dva ili najviše tri oslonca. Za kontinualne grede sa više oslonaca najpogodnije je za statički nepoznate uvesti momente savijanja na mjestima središnjih oslonaca, tj. zamisliti da smo razdvojili kontinualnu gredu na $(n-1)$ prostih greda (sl. 11:49), pa statički nepoznate



Sl. 11:49.

momente savijanja nad osloncima odrediti iz uslova da nagibi susjednih greda na tim mjestima moraju biti isti. Na taj način dobija se sistem od $(n-2)$ jednačine od kojih svaka sadrži najviše po tri nepoznate veličine (momenta nad osloncima). Ovakav sistem jednačina je, naravno, daleko lakše riješiti. Nakon što se tako odrede

momenti M_i ($i=2, 3, \dots, n-1$), reakcije u osloncima dobijamo rješavanjem $(n-1)$ proste grede, pri čemu je reakcija u k -tom osloncu jednaka zbiru reakcija na tom mjestu od lijeve i desne proste grede.



Sl. 11:50.

Razvijmo sada navedenu proceduru, tj. formulišimo jednačine koje vode rješenju problema. U tom cilju uočimo proizvoljni k -ti oslonac kontinualne grede i njemu korespondentne dvije susjedne proste grede (sl. 11:50). Uslov kompatibilnosti za ove dvije grede je da u tački k obje moraju imati isti nagib, tj.

$$\varphi_k^l = \varphi_k^d. \quad (1)$$

Kako je:

$$\begin{aligned} \varphi_k^l &= -\frac{M_{k-1} L_{k-1}}{6EI_{k-1}} - \frac{M_k L_{k-1}}{3EI_{k-1}} + \bar{\varphi}_k^l \\ \varphi_k^d &= \frac{M_k L_k}{3EI_k} + \frac{M_{k+1} L_k}{6EI_k} + \bar{\varphi}_k^d, \end{aligned} \quad (2)$$

gdje su sa $\bar{\varphi}_k^l$ i $\bar{\varphi}_k^d$ označeni nagibi od spoljašnjeg (osnovnog) opterećenja (ne računajući statički nepoznate momente nad osloncima), zamjenom u (1) dobijamo

$$M_{k-1} \frac{L_{k-1}}{I_{k-1}} + 2M_k \left(\frac{L_{k-1}}{I_{k-1}} + \frac{L_k}{I_k} \right) + M_{k+1} \frac{L_k}{I_k} = -6E (\bar{\varphi}_k^d - \bar{\varphi}_k^l). \quad (3)$$

Ako nagibe $\bar{\varphi}_k^l$ i $\bar{\varphi}_k^d$ izrazimo koristeći Maxwell-Mohrovu metodu (odjeljak 11.13.3) kao transferzalne sile od fiktivnog opterećenja:

$$\bar{\varphi}_k^l = -\frac{\mathcal{F}_k^l}{EI_{k-1}}, \quad \bar{\varphi}_k^d = \frac{\mathcal{F}_k^d}{EI_k}, \quad (4)$$

pri čemu je pretpostavljeno da su reakcije \mathcal{F}_k^l i \mathcal{F}_k^d okrenute nagore, tada (3) postaje

$$M_{k-1} \frac{L_{k-1}}{I_{k-1}} + 2M_k \left(\frac{L_{k-1}}{I_{k-1}} + \frac{L_k}{I_k} \right) + M_{k+1} \frac{L_k}{I_k} = -6 \left(\frac{\mathcal{F}_k^l}{I_{k-1}} + \frac{\mathcal{F}_k^d}{I_k} \right). \quad (5)$$

Jednačina (3), odnosno (5), naziva se jednačina tri momenta ili Clapeyronova jednačina. Ovakvih jednačina ima onoliko koliko ima središnjih oslonaca, tj. koliko puta je kontinualna greda statički neodređena. Sve se dobijaju iz opšte formule (3), odnosno (5), za razne vrijednosti $k=2, 3, \dots, n-1$.

Ako je moment inercije konstantan duž ose grede, jednačina tri momenta postaje

$$M_{k-1} L_{k-1} + 2M_k (L_{k-1} + L_k) + M_{k+1} L_k = -6 (\mathcal{F}_k^l + \mathcal{F}_k^d), \quad (6)$$

a ako su ista i rastojanja između svih susjednih oslonaca, tj. $L_k = L$ za $k=2, 3, \dots, n-1$, tada je

$$M_{k-1} + 4M_k + M_{k+1} = -\frac{6}{L} (\mathcal{F}_k^l + \mathcal{F}_k^d). \quad (7)$$

Rješavanjem sistema od $(n-2)$ jednačine oblika (5), odnosno (6) ili (7), određujemo sve statički nepoznate momente M_k ($k=2, 3, \dots, n-1$). Reakcije u osloncima potom dobijamo rješavanjem $(n-1)$ proste grede. Na primjer, reakcija u osloncu k je

$$Y_k = Y_k^l + Y_k^d, \quad (8)$$

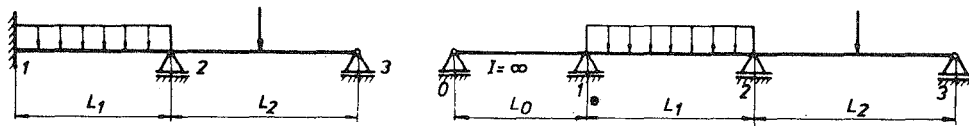
gdje su Y_k^l i Y_k^d reakcije u osloncu k lijeve i desne grede (od osnovnog opterećenja i momenata), tj.:

$$Y_k^l = \frac{M_{k-1}}{L_{k-1}} - \frac{M_k}{L_{k-1}} + \bar{Y}_k^l \quad (9)$$

$$Y_k^d = \frac{M_{k+1}}{L_{k+1}} - \frac{M_k}{L_{k+1}} + \bar{Y}_k^d.$$

U (9) su sa \bar{Y}_k^l i \bar{Y}_k^d označeni dijelovi reakcija usljed osnovnog opterećenja.

Prije nego što ilustrujemo primjenu izvedenih obrazaca na nekoliko primjera, napominjemo da smo u dosadašnjoj analizi kontinualnih greda smatrali da su oba kraja (lijevi i desni) kontinualne grede prosto oslonjeni. Ako to nije slučaj, tj. ako su jedan ili oba kraja ukliješteni, broj nepoznatih momenata je povećan. Da bi se riješio ovakav problem, najprostije je zamijeniti ukliještenje sa dodatnom prostom gredom beskonačno velikog momenta inercije (sl. 11:51). Time se obezbjeđuje da je nagib u tački 1 jednak nuli, a na raspolaganju nam je još jedna dodatna jednačina tri momenta za oslonac 1. Pri tome, dužina dodatne grede $L_0 \neq 0$ nije bitna jer ne utiče na rezultat.



Sl. 11.51.

Primjer 11.45.

Odrediti reakcije i nacrtati dijagrame presječnih sila kontinualne grede na sl. P 11.45 (a).

Rješenje:

Iz jednačina (11.14.3:7) imamo za $k=2, 3$:

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = -\frac{6}{L} (\mathcal{F}_2^l + \mathcal{F}_2^d)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = -\frac{6}{L} (\mathcal{F}_3^l + \mathcal{F}_3^d),$$

odnosno, s obzirom na sl. P 11.45 (b) i (c):

$$4M_2 + M_3 = -\frac{6 qL^3}{L 16}$$

$$M_2 + 4M_3 = -\frac{6 qL^3}{L 24},$$

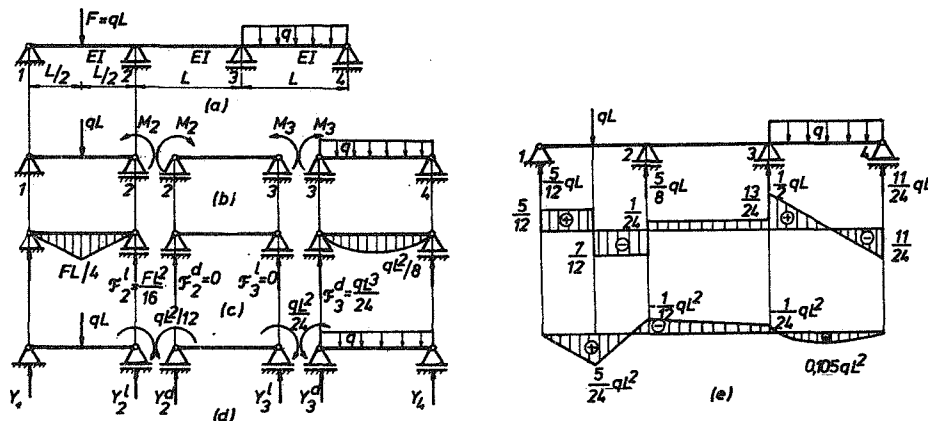
odakle je: $M_2 = -\frac{1}{12} qL^2$, $M_3 = -\frac{1}{24} qL^2$.

Iz statičkih jednačina (sl. P 11.45 (d)) onda slijedi:

$$Y_1^l = \frac{5}{12} qL, \quad Y_2^l = \frac{7}{12} qL, \quad Y_2^d = \frac{1}{24} qL, \quad Y_3^l = -\frac{1}{24} qL, \quad Y_3^d = \frac{13}{24} qL,$$

$$Y_4 = \frac{11}{24} qL, \quad Y_2 = Y_2^l + Y_2^d = \frac{5}{8} qL, \quad Y_3 = Y_3^l + Y_3^d = \frac{1}{2} qL.$$

Dijagrami presječnih sila prikazani su na sl. P 11.45 (e).



Sl. P 11.45.

Primjer 11.46.

Za kontinualni nosač na sl. P 11.46 (a) konstantne krutosti na savijanje:

- odrediti reakcije u osloncima i uklještenju i nacrtati dijagrame presječnih sila,
- izračunati ugeb nosača u tački k .

Dato je: $a = 1 \text{ m}$, $l_1 = 3 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$, $F = 20 \text{ kN}$, $M = 40 \text{ kNm}$, $q = 60 \text{ kN/m}$, $EI = 368 \cdot 10^5 \text{ kNcm}^2$.

Rješenje:

a) Iz jednačina (11.14.3:5) imamo za $k=2, 3$ (sl. P 11.46 (b)):

$$\frac{2(l_1+l_2)}{I} M_2 + \frac{l_2}{I} M_3 = \frac{l_1}{I} aF - \frac{6}{I} (\mathcal{F}_2^l + \mathcal{F}_2^d)$$

$$\frac{l_2}{I} M_2 + \frac{2l_2}{I} M_3 = -\frac{6}{I} \mathcal{F}_3^l,$$

odnosno, s obzirom na sl. P 11.46 (c):

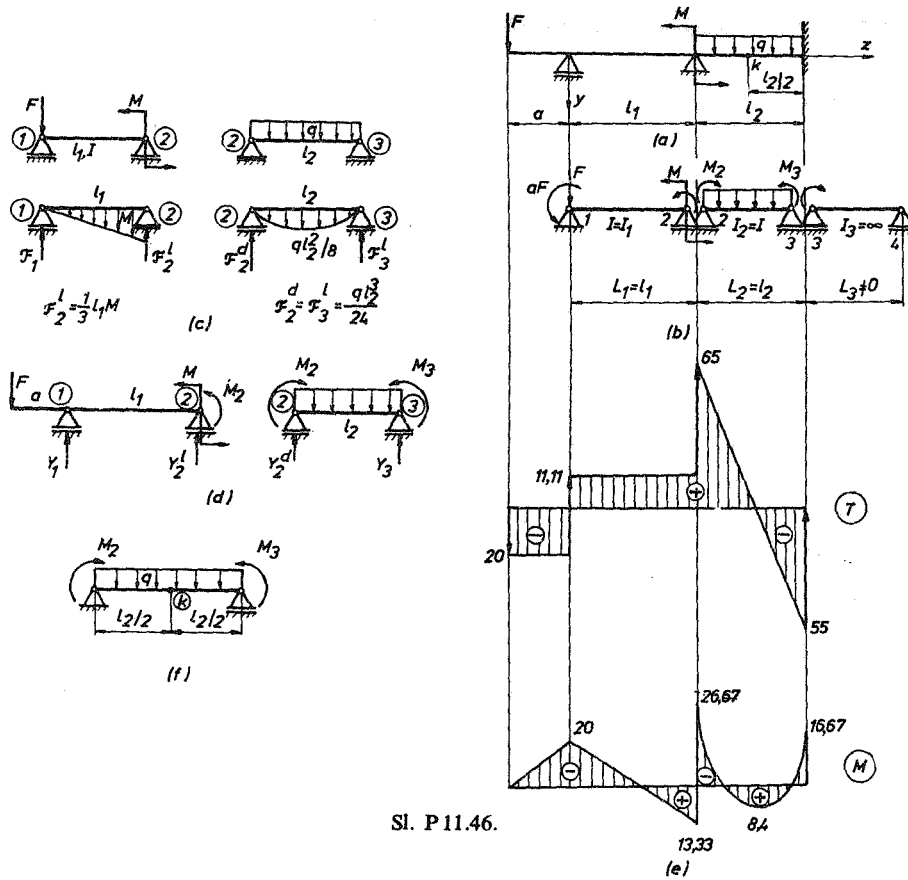
$$2(l_1+l_2) M_2 + l_2 M_3 = l_1 aF - 6 \left(\frac{1}{3} l_1 M + \frac{q l_2^3}{24} \right)$$

$$l_2 M_2 + 2l_2 M_3 = -6 \frac{q l_2^3}{24}.$$

Oдавде je:

$$10M_2 + 2M_3 = -300$$

$$2M_2 + 4M_3 = -120,$$



što daje: $M_2 = -26,67 \text{ kNm}$, $M_3 = -16,67 \text{ kNm}$. Reakcije u osloncima objamno pomoću sl. P 11.46 (d):

$$\begin{aligned} Y_1 &= 31,11 \text{ kN}, & Y_2 &= Y_2^l + Y_2^d = -11,11 + 65 = 53,89 \text{ kN}, \\ Y_3 &= 55 \text{ kN}, & M_3 &= -16,67 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Dijagrame presječnih sila je sada lako dobiti i oni su prikazani na sl. P 11.46 (e).

b) Iz Tablica ugiba superpozicijom nalazimo (sl. P 11.46 (f)) da je ugib u tački k

$$v_k = \frac{5}{384} \frac{q l_2^4}{EI} + \frac{M_2 l_2^2}{16EI} + \frac{M_3 l_2^2}{16EI} = \dots = 0,045 \text{ cm}.$$

11.14.4. Određivanje reakcija statički neodređenih problema metodama deformacionog rada

Rješavanje statički neodređenih nosača metodom deformacionog rada sprovodi se tako što se nosač na uobičajeni način svede na statički određen uvođenjem statički prekobrojnih generalisanih sila; pa se postave uslovi da su generalisana pomjeranja na mjestima i u pravcima tih sila jednaka nuli ili nekom poznatom izrazu. Pri tome koristimo Castiglianov stav za pomjeranja, tako da dobijamo sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_i} = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

gdje je \mathcal{A} deformacioni rad u nosaču, X_i statički prekobrojne generalisane sile, Δ_i korespondentna generalisana pomjeranja, a n stepen statičke neodređenosti. Rješavanjem sistema (1) nalazimo sile X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), a zatim iz statičkih uslova ravnoteže preostale reakcije u nosaču.

Često se, međutim, sistem jednačina za određivanje sila X_i formira direktno koristeći Maxwellove uticajne koeficijente δ_{ij} :

$$\delta_{i0} + \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Ovo je sistem tzv. kanonskih jednačina. Veličina δ_{i0} je pomjeranje na mjestu i u pravcu sile X_i od osnovnog opterećenja (ne računajući statički prekobrojne sile X_i), a δ_{ij} je pomjeranje na mjestu i u pravcu sile X_i od jedinične sile na mjestu j u pravcu sile X_j . Fizička interpretacija jednačina (2) je očigledna: pomjeranje Δ_i na mjestu i u pravcu sile X_i je zbir pomjeranja od osnovnog opterećenja (δ_{i0}) i pomjeranja usljed sile X_i ($\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n$). Pri tome, koeficijente δ_{i0} i δ_{ij} računamo koristeći Maxwell-Mohrovu ili Vereščaginovu metodu.

Primjer 11.47.

Obostrano uklještena greda opterećena je kao na sl. P 11.47 (a). Odrediti reakcije u uklještenjima.

Rješenje:

Greda je dva puta statički neodređena. Za nepoznate reakcije izaberimo X_1 i X_2 (sl. P 11.47 (b)). Ove reakcije odredićemo iz uslova da su ugib i nagib u tački B jednaki nuli, tj.:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_2} = 0.$$

Kako je

$$\mathcal{A} = \int_0^L \frac{M^2 dz}{2EI}, \quad M = X_1(L-z) + X_2 - \frac{1}{6} \frac{q_0}{L} (L-z)^3,$$

imamo:

$$\int_0^L \left[X_1(L-z) + X_2 - \frac{1}{6} \frac{q_0}{L} (L-z)^3 \right] (L-z) dz = 0$$

$$\int_0^L \left[X_1(L-z) + X_2 - \frac{1}{6} \frac{q_0}{L} (L-z)^3 \right] \cdot 1 \cdot dz = 0.$$

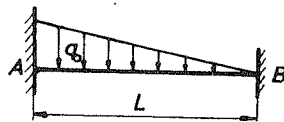
Odavde je:

$$10LX_1 + 15X_2 - q_0L^2 = 0$$

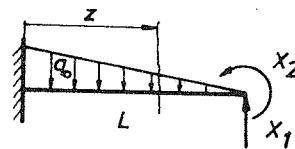
$$12LX_1 + 24X_2 - q_0L^2 = 0,$$

što daje: $X_1 = \frac{3}{20} q_0L (= Y_B)$, $X_2 = -\frac{1}{30} q_0L^2 (= M_B)$.

Preostale reakcije slijede iz jednačina ravnoteže: $Y_A = \frac{7}{20} q_0L$, $M_A = -\frac{1}{60} q_0L^2$.



(a)

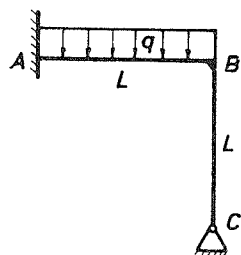


(b)

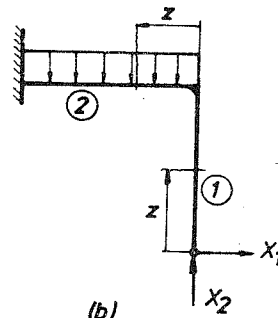
Sl. P 11.47.

Primjer 11.48.

Za ram na sl. P 11.48 (a) nacrtati dijagrame presječnih sila.



(a)



(b)

Sl. P 11.48 (a)–(b).

Rješenje:

Ako za statički prekobrojne izaberemo sile X_1 i X_2 (sl. P 11.48 (b)), tada je:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_2} = 0.$$

Deformacioni rad u ramu je

$$\mathcal{A} = \int_0^L \frac{M_1^2 dz}{2EI} + \int_0^L \frac{M_2^2 dz}{2EI},$$

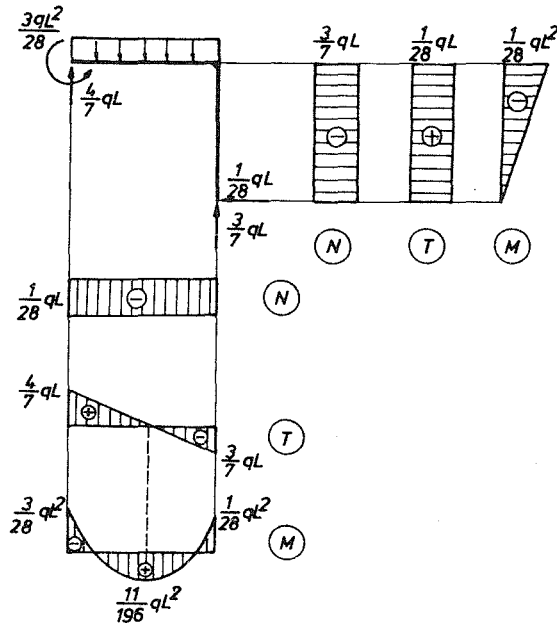
gdje je:

$$M_1 = X_1 z, \quad \frac{\partial M_1}{\partial X_1} = z, \quad \frac{\partial M_1}{\partial X_2} = 0$$

$$M_2 = X_1 L + X_2 z - \frac{qz^2}{2}, \quad \frac{\partial M_2}{\partial X_1} = L, \quad \frac{\partial M_2}{\partial X_2} = z.$$

Prema tome, imamo:

$$\int_0^L X_1 z \cdot z dz + \int_0^L \left(X_1 L + X_2 z - \frac{qz^2}{2} \right) L dz = 0$$



Sl. P 11.48 (c).

$$\int_0^L X_1 z \cdot 0 \cdot dz + \int_0^L \left(X_1 L + X_2 z - \frac{qz^2}{2} \right) z dz = 0,$$

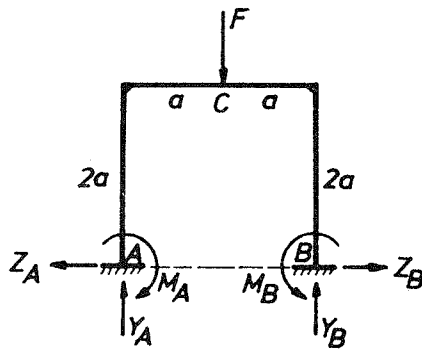
odnosno:

$$12X_1 + 8X_2 = 3qL$$

$$8X_1 + 3X_2 = qL,$$

odakle dobijamo: $X_1 = -\frac{1}{28}qL$, $X_2 = \frac{3}{7}qL$. Iz statičkih jednačina dalje slijedi:

$Y_A = \frac{4}{7}qL$, $M_A = -\frac{3}{28}qL^2$. Dijagrami presječnih sila prikazani su na sl. P 11.48 (c).



Sl. P 11.49 (a).

Primjer 11.49.

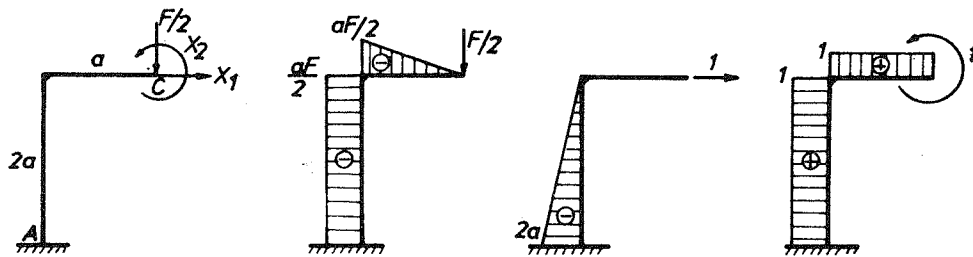
Odrediti maksimalni moment savijanja u nosaču na sl. P 11.49 (a).

Rješenje:

Zbog simetrije geometrije nosača i opterećenja je: $Y_A = Y_B = \frac{F}{2}$, $M_A = M_B$, pa je nosač dva puta statički neodređen. Posmatrajmo samo lijevi dio nosača (sl. P 11.49 (b)). U presjeku C djeluju aksijalna sila X_1 i moment savijanja X_2 . Zbog simetrije horizontalno pomjeranje tačke C i nagib u tački C moraju biti jednaki nuli, pa kanonske jednačine (11.14.4:2) glase:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \quad (a)$$

$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0.$$



Sl. P 11.49 (b).

Koristeći metodu Vereščagina, sa sl. P 11.49 (b) slijedi:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left(-2a \cdot \frac{aF}{2} \right) (-a) = \frac{Fa^3}{EI},$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} a \cdot \frac{aF}{2} \cdot 1 - 2a \cdot \frac{aF}{2} \cdot 1 \right) = -\frac{5Fa^2}{4EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} 2a \right) = \frac{8a^3}{3EI}, \quad \delta_{22} = \frac{1}{EI} (a \cdot 1 \cdot 1 + 2a \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3a}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 1 \right) = -\frac{2a^2}{EI}.$$

Zamjenom u (a) je:

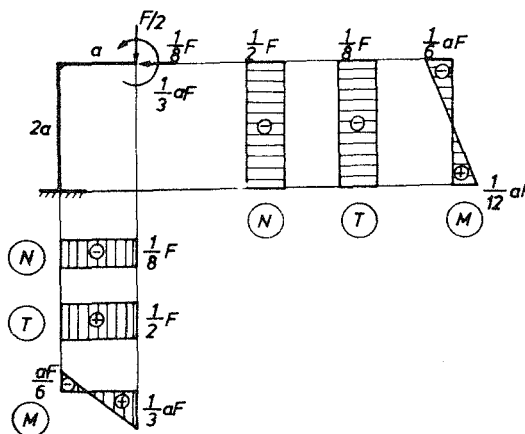
$$\frac{8}{3} aX_1 - 2X_2 = -aF$$

$$-2aX_1 + 3X_2 = \frac{5}{4} aF,$$

odakle dobijamo: $X_1 = -\frac{1}{8} F,$

$$X_2 = \frac{1}{3} aF.$$

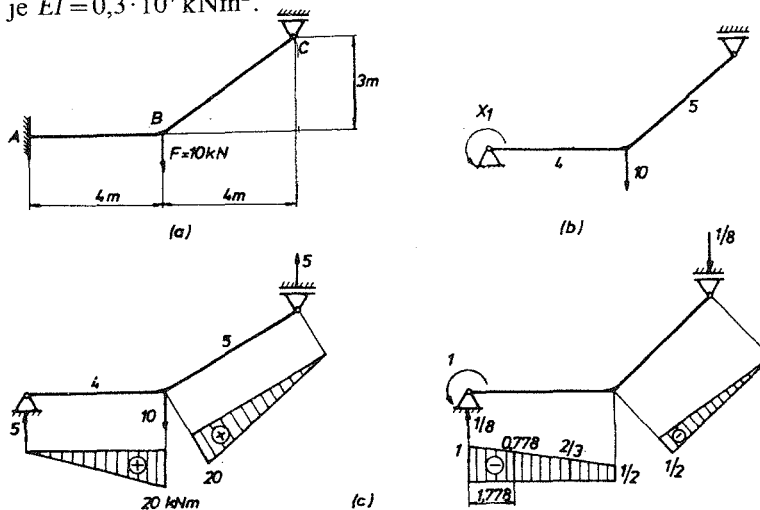
Dijagrami presječnih sila prikazani su na sl. P 11.49 (c). Maksimalni moment je u presjeku C i iznosi $M_{\max} = \frac{1}{3} aF.$



Sl. P 11.49 (c).

Primjer 11.50.

Odrediti pomjeranje tačke C nosača na sl. P 11.50 (a). Krutost nosača na savijanje je $EI = 0,3 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2.$



Rješenje:

Nosač je jedanput statički neodređen. Za statički prekobrojnu izaberimo moment u uklještenju A , X_1 (sl. P 11.50 (b)). Kanonska jednačina glasi

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0.$$

Sa sl. P 11.50 (c) je:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{43,33}{EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \cdot 4 \cdot 0,778 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{2,75}{EI},$$

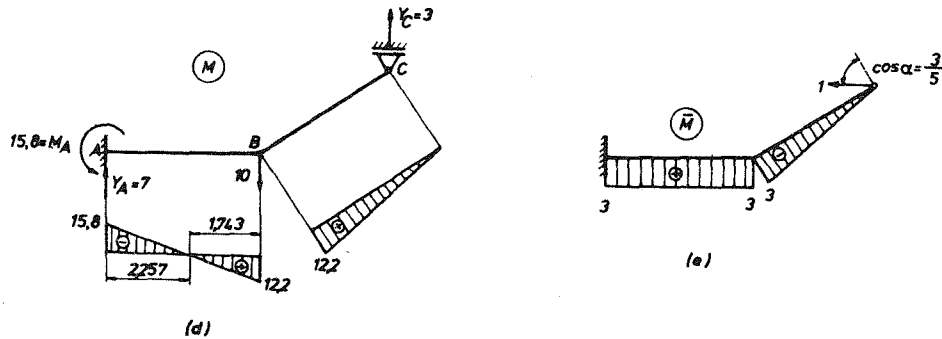
pa je

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{43,33}{2,75} = 15,8 \text{ kNm}.$$

Preostale reakcije slijede iz jednačina ravnoteže: $Y_A \cong 7 \text{ kN}$, $Y_C \cong 3 \text{ kN}$. Dijagrami momenta savijanja u nosaču prikazani su na sl. P 11.50 (d). Pomjeranje tačke C dobićemo „množeći“ dijagrame na sl. P 11.50 (d) i (e):

$$x_C = \frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{2} \cdot 2,257 \cdot 15,8 \right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{2} \cdot 1,743 \cdot 12,2 \right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12,2 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \right) \right] = \frac{39,4 \text{ kNm}^3}{EI}$$

$$x_C = 1,3 \text{ cm}.$$



Sl. P 11.50 (d)–(e).

Napomena: Prema Maxwell-Mohrovoj metodi pomjeranje tačke nosača računa se prema izrazu $f = \int \frac{M \bar{M}}{EI} dz$, gdje je M momentna raspodjela u nosaču od opterećenja nosača, a \bar{M} momentna raspodjela u nosaču od jedinične sile na mjestu i u pravcu u kome se traži pomjeranje. Može se pokazati da je za statički

neodređene probleme svejedno da li se momentna raspodjela \overline{M} računa u odnosu na statički neodređeni ili izabrani statički određeni (osnovni) nosač. Jednostavnije je, naravno, ovo drugo, pa je to i korišteno u primjeru 11.50.

Primjer 11.51.

Odrediti dijagram momenta savijanja u nosaču na sl. P 11.51 (a). Dato je: a , q , EI .

Rješenje:

Nosač je tri puta statički neodređen. Ako zamislimo da smo ga razdvojili na dva dijela kao na sl. P 11.51 (b), međusobni uticaj ovih dijelova predstavice silama X_1 i X_2 i momentom X_3 . Vrijednost ovih presječnih sila dobićemo pomoću kanonskih jednačina:

$$\begin{aligned}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &= 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 &= 0.\end{aligned}\tag{a}$$

Koeficijente δ_{ij} odredićemo metodom Vereščagina pomoću sl. P 11.51 (c)–(f):

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI} 2 \cdot \left(\frac{1}{2} 3a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} 3a \right) = \frac{18a^3}{EI}, & \delta_{22} &= \frac{1}{EI} 2 \cdot \left(\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + 3a \cdot a \cdot a \right) = \frac{20}{3} \frac{a^3}{EI} \\ \delta_{33}' &= \frac{1}{EI} 2 \cdot (3a \cdot 1 \cdot 1 + a \cdot 1 \cdot 1) = \frac{8a}{EI}, & \delta_{13} = \delta_{31} &= \frac{1}{EI} 2 \cdot \left(\frac{1}{2} 3a \cdot 3a \cdot 1 \right) = \frac{9a^2}{EI} \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= 0, & \delta_{23} = \delta_{32} &= 0.\end{aligned}$$

Koeficijente δ_{i0} odredićemo pomoću Maxwell-Mohrove metode:

$$\begin{aligned}\delta_{10} &= -\frac{1}{EI} \int_0^{3a} \frac{qz^3}{18a} dz = -\frac{27}{10} \frac{qa^4}{EI}, & \delta_{20} &= -\frac{1}{EI} \int_0^{3a} \frac{qz^3}{18a} dz = -\frac{9}{8} \frac{qa^4}{EI} \\ \delta_{30} &= -\frac{1}{EI} \int_0^{3a} \frac{qz^3}{18a} \cdot 1 \cdot dz = -\frac{9}{8} \frac{qa^3}{EI}\end{aligned}$$

Zamjenom vrijednosti za δ_{ij} i δ_{i0} u (a), dobijamo:

$$\begin{aligned}20aX_1 + 10X_3 &= 3qa^2 \\ 160X_2 &= 27qa \\ 72aX_1 + 64X_3 &= 9qa^2.\end{aligned}$$

odakle je:

$$X_1 \cong 0,1821qa, \quad X_2 \cong 0,1688qa, \quad X_3 \cong -0,0643qa^2.$$

Vrijednosti momenta na karakterističnim mjestima nosača je sada lako odrediti superpozicijom, kao što slijedi:

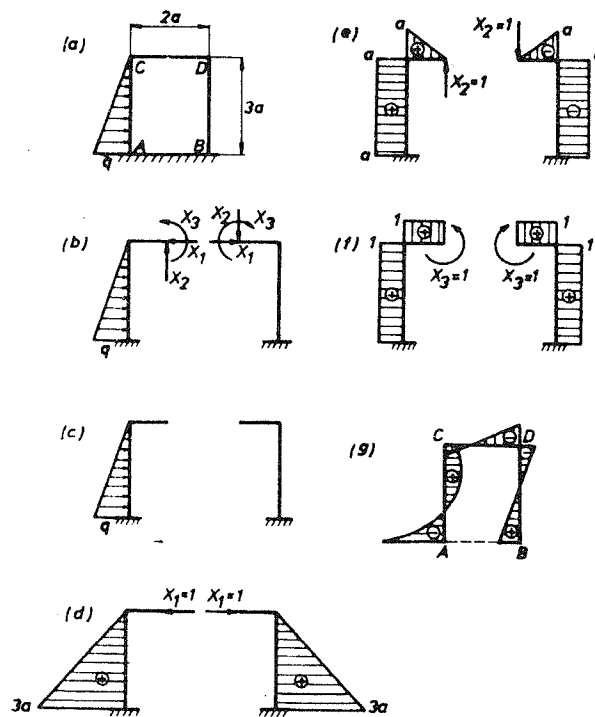
$$M_A = 0,1821qa \cdot 3a + 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 - \frac{q}{18a} 27a^3 = -0,8492qa^2$$

$$M_B = 0,1821qa \cdot 3a - 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 = 0,3132qa^2$$

$$M_C = 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 \cdot 1 = 0,1045qa^2$$

$$M_D = -0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 \cdot 1 = -0,2331qa^2.$$

Dijagram momenta savijanja u nosaču prikazan je na sl. P 11.51 (g).



Sl. P 11.51.

Primjer 11.52.

Odrediti pomjeranje tačke C nosača na sl. P 11.52 (a) ako je: $EI = 0,5 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$, $I/A = 0,64 \text{ m}^2$, $a = 2 \text{ m}$, $F = 20 \text{ kN}$.

Rješenje:

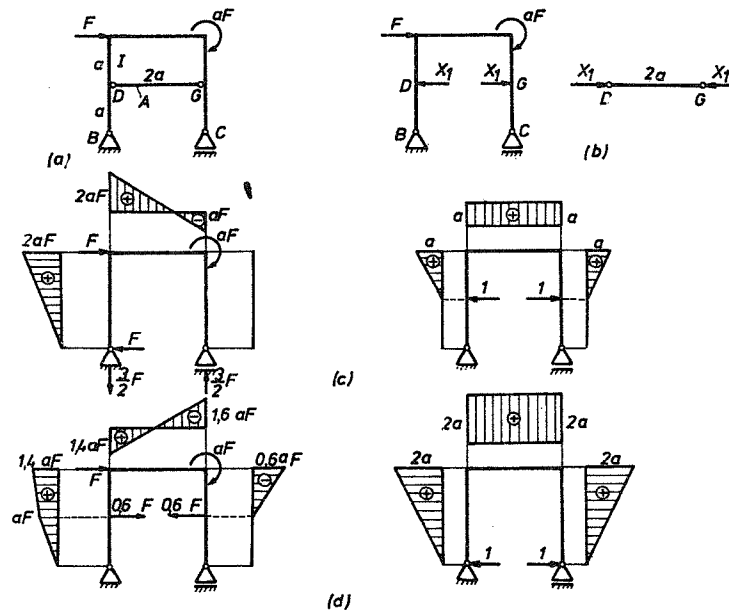
Ako zamislimo da smo uklonili štap DG iz nosača (sl. P 11.52 (b)), tada mora biti

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = -\frac{X_1(2a)}{EA}. \quad (a)$$

Koeficijente δ_{10} i δ_{11} određujemo metodom Vereščagina pomoću sl. P 11.52 (c):

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (aF + 2aF) a \cdot \frac{5}{9} a \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (2aF - aF) \cdot 2a \cdot a \right] = 1,83 \frac{a^3 F}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + 2a \cdot a \cdot a + \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) = 2,67 \frac{a^3}{EI}$$



Sl. P 11.52.

Zamjenom u (a) dobijamo

$$1,83F + 2,67X_1 = -0,32X_1,$$

odakle je $X_1 = -0,6F$.

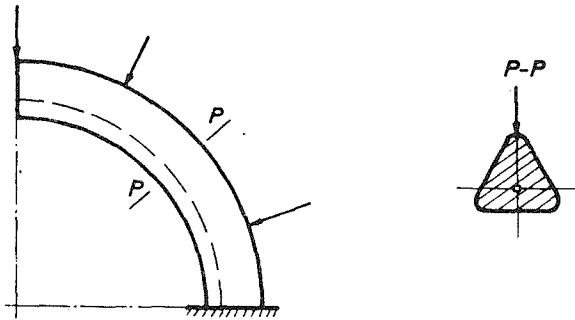
Pomjeranje tačke C sada možemo odrediti ako „pomnožimo“ po metodi Vereščagina dijagrame momenata na sl. P 11.52 (d):

$$u_C = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot F \cdot \frac{2}{3} a + \left(a \cdot a \cdot F \cdot \frac{3}{2} a + \frac{1}{2} a \cdot 0,4aF \cdot \frac{5a}{3} \right) + \frac{(1,4 - 1,6) aF}{2} \cdot 2a \cdot 2a + \frac{1}{2} a (-0,6aF) \frac{5a}{3} \right]$$

$$u_C = \frac{19 a^3 F}{15 EI} = 4,05 \text{ cm.}$$

11.15. Savijanje krivog štapa

Iako je predmet naše analize prizmatičan (prav) štap, ovo poglavlje posvećujemo krivom štapu, tj. štapu čija težišna osa nije prava linija, zbog velike upotrebe krivih štapova u građevinskim, mašinskim i drugim konstrukcijama (na primjer, lukovi, dizalice, kuke i sl.). Pri tome ćemo se ograničiti na krivi štap čija je težišna

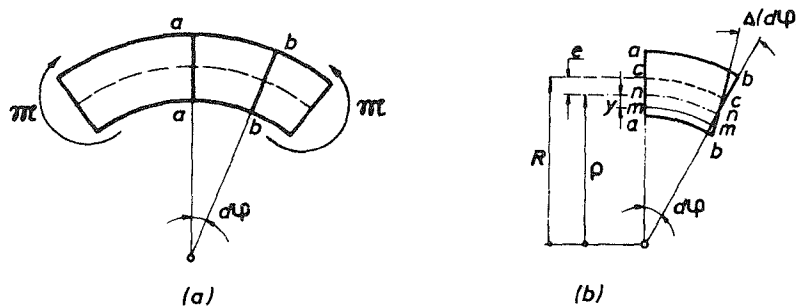


Sl. 11:52.

linija, tj. linija koja spaja težišta poprečnih presjeka štapa, ravna kriva i čiji poprečni presjeci upravni na težišnu liniju štapa imaju bar jednu osu simetrije (sl. 11:52). Ukoliko se takav, simetričan, krivi štap optereći u ravni simetrije štapa, u toj ravni će se dogoditi i deformacija, tj. savijanje štapa. Naš je zadatak da odredimo naprezanje i deformaciju u tako opterećenom krivom štapu. Prvo ćemo posmatrati čisto savijanje, a zatim i savijanje silama krivog štapa.

11.15.1. Čisto savijanje krivog štapa

Neka je krivi štap konstantnog poprečnog presjeka opterećen u ravni simetrije sa dva sprega savijanja \mathfrak{M} koji djeluju na krajevima štapa (sl. 11:53 (a)). Ovako opterećen krivi štap je opterećen na čisto savijanje. Pri određivanju napona i deformacije pretpostavićemo, kao i kod pravog štapa, da nakon deformacije poprečni presjeci štapa ostaju ravni i upravni na težišnu liniju štapa. To znači da se poprečni presjek $b-b$ zaokrene oko neutralne ose $n-n$ u odnosu na poprečni



Sl. 11:53.

presjek $a-a$ za mali ugao $\Delta(d\varphi)$, gdje je $d\varphi$ prvobitni ugao između presjeka $a-a$ i $b-b$ (sl. 11:53 (b)). Položaj neutralne ose $n-n$, tj. njeno udaljenje e od težišne ose $c-c$, tek treba da odredimo. Očigledno je da su uzdužna vlakna ispod neutralne ose $n-n$, tj. na konkavnoj strani štapa, izdužena, a na konveksnoj strani sabijena.

Dilatacija vlakna $m-m$ na udaljenju y od neutralne ose, pri čemu je osa y usmjerena ka centru krivine težišne linije štapa, je

$$\varepsilon = \frac{y \Delta(d\varphi)}{(\rho - y) d\varphi}, \quad (1)$$

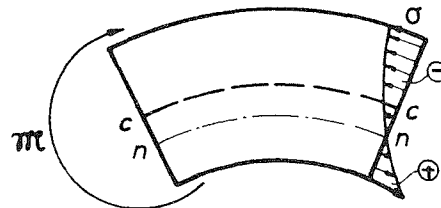
gdje je sa ρ označen poluprečnik krivine neutralne ose štapa. Korespondentni napon je

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \frac{y}{\rho - y}. \quad (2)$$

Vidimo, dakle, da raspodjela napona nije linearna po visini y , kao kod pravog štapa, već hiperbolična: prema konveksnim vlaknima ($y < 0$) napon se mijenja sporije, a prema konkavnim ($y > 0$) brže (sl. 11:54). Zato je i neutralna osa pomjerena od težišne ose prema konkavnoj strani štapa (jer suma normalnih sila u poprečnom presjeku mora biti jednaka nuli). Takođe primjećujemo da moment savijanja sa smjerom kao na sl. 11:53 (a) (koji, dakle, teži da smanji početnu krivinu štapa) izaziva izduženje vlakana $y > 0$, tj. pozitivan napon u njima, pa taj smjer momenta uzimamo za pozitivan (vidi izraz (9)). Izraz za napon (2) sadrži dvije nepoznate veličine, ρ i $\Delta(d\varphi)$. Njih ćemo odrediti iz uslova ravnoteže da je suma normalnih sila u poprečnom presjeku štapa jednaka nuli i da je moment ovih sila jednak spoljašnjem momentu:

$$\int_A \sigma dA = E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_A \frac{y}{\rho - y} dA = 0 \quad (3)$$

$$\int_A y \sigma dA = E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_A \frac{y^2}{\rho - y} dA = \mathfrak{M}. \quad (4)$$



Sl. 11:54.

Iz jednačine (3) je očigledno da statički moment površine poprečnog presjeka u odnosu na neutralnu osu $\left(\int_A y dA \right)$ nije jednak nuli, pa prema tome neutralna osa nije težišna osa poprečnog presjeka, već je pomjerena od nje ka konkavnoj strani štapa za veličinu $e = R - \rho$, gdje je R poznati poluprečnik krivine težišne linije štapa. Veličinu e , a zatim i poluprečnik krivine neutralne ose ρ , dobijamo iz (3) nakon transformacije $\eta = e + y$ (η je, dakle, udaljenje uočenog vlakna od težišne ose), kao što slijedi:

$$\int_A \frac{y}{\rho - y} dA = \int_A \frac{\eta - e}{\rho - \eta + e} dA = \int_A \frac{\eta}{R - \eta} dA - e \int_A \frac{1}{R - \eta} dA = 0, \quad (5)$$

pa je

$$e = \frac{\int_A \frac{\eta}{R - \eta} dA}{\int_A \frac{1}{R - \eta} dA} \quad (6)$$

i

$$\rho = R - e = \frac{A}{\int_A \frac{1}{R - \eta} dA} \quad (7)$$

Za dati oblik poprečnog presjeka štapa sračunavanjem integrala u (6) i (7) nalazimo vrijednosti za e i ρ .

Na sličan način se iz (4) dobija

$$\begin{aligned} \int_A \frac{y^2}{\rho - y} dA &= \int_A \frac{y - \rho + \rho}{\rho - y} y dA = \\ &= - \int_A y dA + \rho \int_A \frac{y}{\rho - y} dA = - \int_A y dA = - \int_A (\eta - e) dA = eA, \end{aligned} \quad (8)$$

jer je statički moment površine poprečnog presjeka za težišnu osu $\left(\int_A \eta dA \right)$ jednak nuli. Zamjenom (8) u (4) sada imamo

$$E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{\mathfrak{M}}{eA}, \quad (9)$$

što unošenjem u (2) daje konačan izraz za napon

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{eA} \frac{y}{\rho - y}. \quad (10)$$

Ako je radijalna dimenzija krivog štapa (visina poprečnog presjeka h) mala u poređenju sa poluprečnikom krivine R težišne linije štapa $\left(h \ll \frac{1}{10} R \right)$, u (10) možemo zanemariti y u poređenju sa ρ , pa se pokazuje da izraz (10) približno postaje

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{I} y. \quad (11)$$

Ovo znači da se za štapove sa malim odnosom $\frac{h}{R}$ može koristiti formula za napon (11) kao kod pravog štapa. Greška koja se pri tome pravi je svega nekoliko procenata.

Primjer 11.53.

Odrediti napon u krivom štapu pravougaonog poprečnog presjeka dimenzija $b \times h = 10 \times 20 \text{ cm}$ na sl. P 11.53 (a) koji je opterećen na savijanje momentom $\mathfrak{M} = 10 \text{ kNm}$. Poluprečnik krivine štapa je $R = 40 \text{ cm}$.

Rješenje:

Iz izraza (11.15.1:10) je

$$\sigma = \frac{M}{eA} \frac{y}{\rho - y},$$

pri čemu je:

$$A = bh = 200 \text{ cm}^2, \quad \rho = \frac{A}{\int_A \frac{1}{R - \eta} dA}.$$

No,

$$\int_A \frac{1}{R - \eta} dA = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{R - \eta} b d\eta = bln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}},$$

pa je

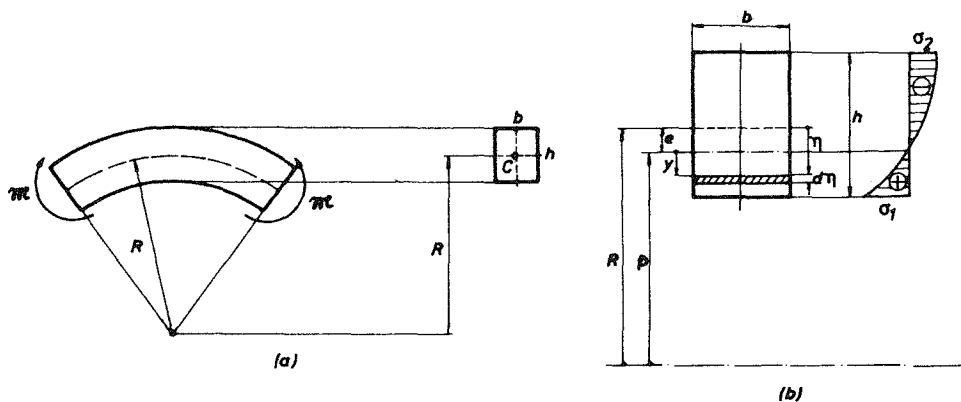
$$\rho = \frac{h}{ln \frac{R + h/2}{R - h/2}} = \frac{20}{ln \frac{5}{3}} = 39,15 \text{ cm}.$$

Dalje je: $e = R - \rho = 40 - 39,15 = 0,85 \text{ cm}$, $eA = 0,85 \cdot 200 = 170 \text{ cm}^3$, pa je izraz za napon u poprečnom presjeku štapa (sl. P 11.53 (b))

$$\sigma = \frac{1000}{170} \frac{y}{39,15 - y} = 5,88 \frac{y}{39,15 - y} [\text{kN/cm}^2].$$

Naponi u donjim i gornjim vlaknima štapa su:

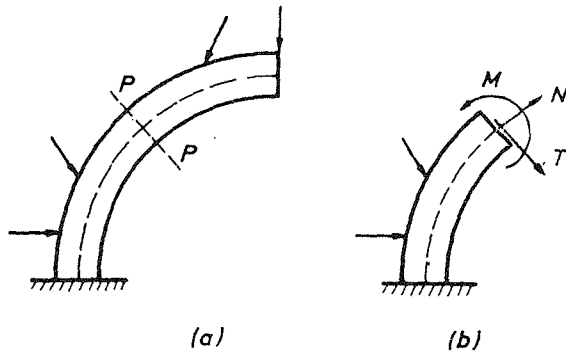
$$\sigma_1 = \sigma \left(y = \frac{h}{2} - e \right) = 1,79 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_2 = \sigma \left(y = -\frac{h}{2} - e \right) = -1,28 \text{ kN/cm}^2.$$



Sl. P 11.53.

11.15.2. Savijanje silama krivog štapa

Posmatrajmo sada slučaj savijanja krivog štapa silama koje djeluju u ravni simetrije štapa (sl. 11:55 (a)). U toj ravni dogodiće se i deformacija, tj. savijanje štapa. Od presječnih sila se u proizvoljnom poprečnom presjeku štapa, pored momenta savijanja, javljaju i normalna i transferzalna sila. Ove presječne sile



Sl. 11:55.

dobijamo na uobičajen način, redukcijom svih sila desno (ili lijevo) od uočenog presjeka na težište poprečnog presjeka. Pozitivni smjerovi presječnih sila prikazani su na sl. 11:55 (b). Normalni napon usljed momenta savijanja M u uočenom poprečnom presjeku računa se po formuli izvedenoj za slučaj čistog savijanja, tj. po formuli

$$\sigma = \frac{M}{eA} \frac{y}{\rho - y}, \quad (1)$$

dok je napon koji odgovara normalnoj sili N ravnomjerno raspoređen po poprečnom presjeku i iznosi

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2)$$

Ukupan normalni napon u poprečnom presjeku je zbir napona (1) i (2)

$$\sigma = \frac{M}{eA} \frac{y}{\rho - y} + \frac{N}{A}. \quad (3)$$

Što se tiče smičućeg napona koji odgovara transferzalnoj sili T u uočenom poprečnom presjeku, obično se pretpostavlja da je njegova raspodjela ista kao i kod pravog štapa, tj. data sa

$$\tau = \frac{TS'}{I\xi}, \quad (4)$$

gdje veličine S' , I i ξ imaju ista značenja kao i u formuli Žuravskog (11:7:6) za pravi štap.

Ukoliko su, međutim, u pitanju krivi štapovi čije su poprečne dimenzije male u poređenju sa poluprečnikom krivine njegove težišne ose, tada su naprezanja usljed normalne i transferzalne sile mala u poređenju sa naprežanjem usljed momenta, pa se uzima u obzir samo normalni napon od savijanja, i to sračunat po obrascu za pravi štap

$$\sigma = \frac{M}{I} y. \quad (5)$$

Pomjeranja ovakvih krivih štapova možemo najlakše odrediti pomoću Castiglianovog stava

$$f = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q}, \quad (6)$$

gdje je \mathcal{A} deformacioni rad koji je akumuliran u štapu i koji računamo po obrascu

$$\mathcal{A} = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EI}. \quad (7)$$

U izrazu (7) ds je elemenat dužine težišne linije štapa, a integraljenje se vrši po ukupnoj dužini s štapa.

Primjer 11.54.

Odrediti napon u opasnom presjeku $p-p$ kuke dizalice koja je opterećena silom $F=20$ kN. Presjek $p-p$ ima oblik trapeza. Dato je: $R_1=5$ cm, $h=10$ cm, $b_1=6$ cm, $b_2=2$ cm.

Rješenje:

Normalni napon je dat izrazom (11.15.2:3)

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{eA} \frac{y}{\rho - y}. \quad (a)$$

U presjeku $p-p$ kuke je:

$$A = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h = 40 \text{ cm}^2$$

$$M = FR = 20 \cdot 9,17 = 183,3 \text{ kNcm},$$

$$R = R_1 + h_1 = 5 + \frac{25}{6} = 9,17 \text{ cm}$$

$$\rho = \frac{I_x}{\int_A \frac{1}{R-\eta} dA}$$

Za trapez je

$$\int_A \frac{1}{R-\eta} dA = \frac{b_1 R_2 - b_2 R_1}{h} \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2),$$

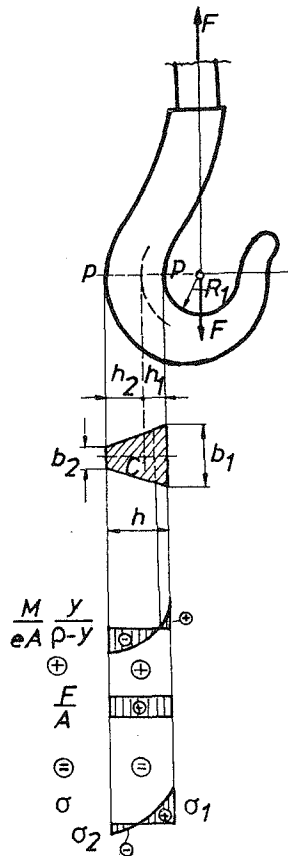
gdje je $R_2 = R_1 + h = 15$ cm, pa je:

$$\rho = \frac{40}{8 \ln 3 - 4} = 8,35 \text{ cm}$$

$$e = R - \rho = 9,17 - 8,35 = 0,82 \text{ cm}.$$

Zamjenom u (a) dobijamo

$$\sigma = 0,5 + 5,59 \frac{y}{8,35 - y} \text{ [kN/cm}^2\text{]},$$



tako da je:

$$\sigma_1 = \sigma (y = h_1 - e) = 4,245 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma (y = -h_2 - e) = -1,978 \text{ kN/cm}^2.$$

Primjer 11.55.

Odrediti vertikalno pomjeranje tačke B krivog štapa konstantnog presjeka opterećenog silom F kao na slici. Poprečne dimenzije štapa su male u odnosu na poluprečnik krivine R težišne ose štapa. Krutost štapa na savijanje je EI .

Rješenje:

Saglasno Castiglianovom stavu, vertikalno pomjeranje tačke B je $f_B = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F}$.
Deformacioni rad u štapu je

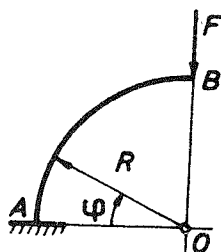
$$\mathcal{A} = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EI}, \quad ds = R d\varphi, \quad M = -FR \cos \varphi,$$

pa je

$$f_B = \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{(-FR \cos \varphi)(-R \cos \varphi)}{EI} R d\varphi,$$

tj.

$$f_B = \frac{\pi FR^3}{4 EI}.$$



Sl. P 11.55.

Primjer 11.56.

Odrediti maksimalni moment savijanja u tankom kružnom prstenu koji je opterećen sa dvije jednake sile suprotnog smjera kao na sl. P 11.56 (a). Dato je R i F . Odrediti zatim odmicanje napadnih tačaka sila F . Krutost prstena na savijanje je EI .

Rješenje:

Zbog simetrije posmatrajmo samo četvrtinu prstena (sl. P 11.56 (b)). Nagib u tački 2 mora biti jednak nuli, tj.

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial M_2} = \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_2} R d\varphi = 0.$$

No, $M = \frac{F}{2} R \cos \varphi - M_2$, pa je

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{F}{2} R \cos \varphi - M_2 \right) (-1) d\varphi = 0,$$

odakle dobijamo $M_2 = \frac{1}{\pi} FR = 0,318FR$. Moment u presjeku 1 je $M_1 = \frac{F}{2} R - M_2 = 0,182FR$.

Moment savijanja u poprečnom presjeku definisanom uglom φ je

$$M(\varphi) = FR \left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{\pi} \right), \quad (a)$$

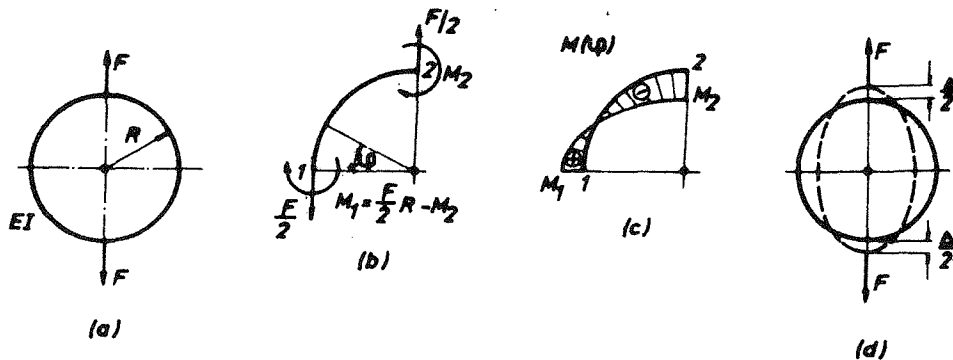
što je prikazano na sl. P 11.56 (c). Maksimalni moment je u presjeku 2 i iznosi $M_{\max} = M_2 = 0,318FR$.

Odmicanje napadnih tačaka sila (sl. P 11.56 (d)) dobijamo iz

$$\Delta = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left(4 \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} R d\varphi \right) = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} R d\varphi,$$

što nakon unošenja (a) daje

$$\Delta = 4 \frac{FR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{\pi} \right)^2 d\varphi = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \frac{FR^3}{EI} = 0,149 \frac{FR^3}{EI}.$$

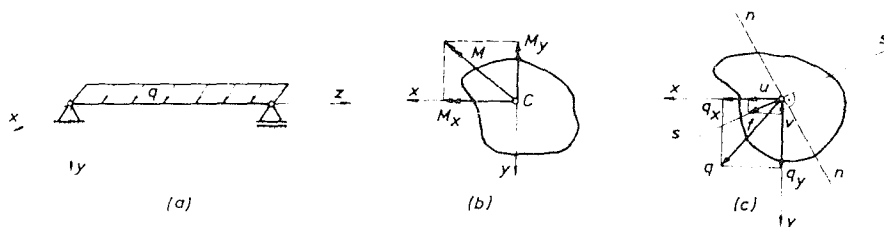


Sl. P 11.56.

12. KOMBINOVANO NAPREZANJE GREDE

12.1. Različite vrste kombinovanog naprezanja i određivanje napona i deformacije

U prethodnim poglavljima razmatrali smo različite vrste naprezanja kojima može biti izložen gredni nosač: linearno naprezanje (koje obuhvata aksijalno naprezanje, savijanje spregovima i ekscentrični pritisak), torziju i savijanje silama. Ovo su bile osnovne vrste naprezanja grednog nosača. Gredni nosač, međutim, može biti izložen i kombinaciji ovih naprezanja, na primjer, istovremenom naprezanju na istezanje, torziju i savijanje. Tada govorimo o tzv. kombinovanom (ili složenom) naprezanju grednog nosača. Osnovni problem kod kombinovanog naprezanja je određivanje naponskog i deformacionog stanja. No, kako su sve jednačine koje opisuju pojedinačne vrste naprezanja linearne (za slučaj malih elastičnih deformacija, što mi i pretpostavljamo), to se naponi i deformacije kod kombinovanog naprezanja mogu prosto dobiti koristeći princip superpozicije, tj. sabiranjem napona, odnosno deformacija, usljed pojedinačnih naprezanja.



Sl. 12.1.

Jednu vrstu kombinovanog naprezanja mi smo već upoznali. To je ekscentrični pritisak (glava 8), koji u stvari predstavlja kombinaciju savijanja i aksijalnog naprezanja. Takođe je i savijanje spregovima koji ne leže ni u jednoj od glavnih ravni inercije kombinovano naprezanje od dva para spregova, od kojih svaki leži u po jednoj glavnoj ravni inercije grednog nosača. Isti je slučaj i kod savijanja silama. Ako sile ne leže u jednoj od glavnih ravni inercije (sl. 12:1 (a)), imamo koso savijanje silama, pa sile treba razložiti u komponente koje leže u glavnim ravnima inercije i tako dobiti kombinaciju savijanja silama u dvije ravni, nakon čega možemo koristiti princip superpozicije. Normalni napon je

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x, \quad (1)$$

gdje je M_x komponenta momenta savijanja u uočenom poprečnom presjeku oko x ose, a M_y oko y ose (uzeti pozitivni ukoliko su smjerovi kao na sl. 12:1 (b)).

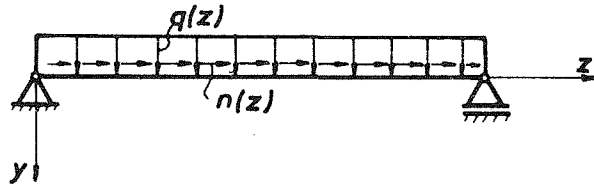
Neutralnu osu dobijamo iz uslova $\sigma_{zz} = 0$. Rezultujuće pomjeranje, tj. ugib elastične linije (f), dobijamo geometrijskim sabiranjem komponentalnih pomjeranja (u i v) (sl. 12:1 (c)). Pravac rezultujućeg pomjeranja je upravan na neutralnu osu poprečnog presjeka.

Ukoliko je u pitanju kombinovano naprezanje savijanjem silama i aksijalnim naprezanjem (sl. 12:2), tada je normalni napon dat izrazom

$$\sigma_{zz} = \frac{T_z(z)}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x} y, \quad (2)$$

a smičući

$$\tau = \frac{T_y(z) S'_x(y)}{I_x \xi(y)}. \quad (3)$$



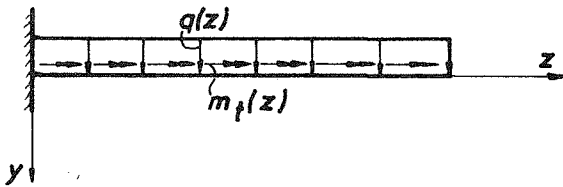
Sl. 12:2.

U slučaju kombinacije savijanja silama i torzije (sl. 12:3), normalni napon je

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x(z)}{I_x} y, \quad (4)$$

dok je smičući napon sastavljen iz dvije komponente: jedne usljed transferzalne sile koju računamo po hipotezi Žuravskog, i druge usljed torzije koju računamo zavisno od oblika poprečnog presjeka po odgovarajućem obrascu. Međutim, po pravilu je

komponenta smičućeg napona usljed transferzalne sile znatno manja od komponente usljed torzije, pa se u proračunima zanemaruje i uzima u obzir samo smičući napon usljed torzije. Na primjer, za kružni poprečni presjek je



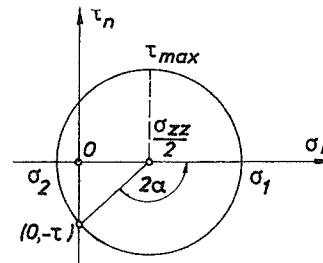
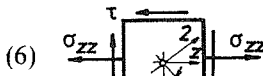
Sl. 12:3.

$$\tau = \frac{M_t(z)}{I_0} r. \quad (5)$$

Kao što vidimo, u svim vrstama kombinovanog naprezanja grednog nosača imamo prisutne samo dvije komponente napona: normalni i smičući napon u ravni poprečnog presjeka grede. Prema tome, stanje napona je ravno (sl. 12:4), pa se glavni naponi određuju iz izraza:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} \pm \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2})$$

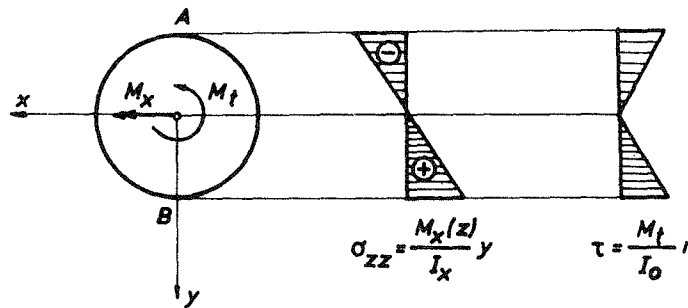
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma_{zz}}$$



Sl. 12:4.

Na primjer, ukoliko je pitanju savijanje i torzija grede kružnog poprečnog presjeka (sl. 12:5), tada su glavni naponi u tačkama *A* i *B* dati sa

$$\sigma_{1,2} = \frac{2}{\pi R^3} [M_x(z) \pm \sqrt{M_x^2(z) + M_t^2(z)}]. \quad (7)$$



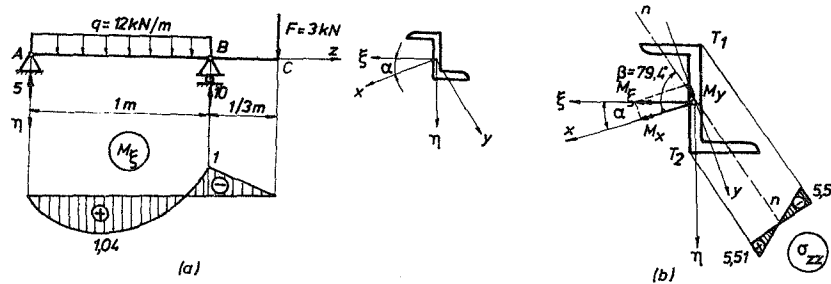
Sl. 12:5.

Primjer 12.1.

a) Odrediti maksimalni normalni napon u nosaču na sl. P 12.1 (a).

b) Odrediti ugib u tački *C* nosača.

Poprečni presjek nosača je Z 10 profil, a modul elastičnosti je $E = 2 \text{ MN/cm}^2$.



Sl. P 12.1 (a)–(b).

Rješenje:

- a) Glavne centralne ose inercije poprečnog presjeka (Z 10 profila) definisane su uglom $\alpha = 26,2^\circ$ ($\text{tg } \alpha = 0,492$, $\sin \alpha = 0,44$, $\cos \alpha = 0,9$), a korespondentni glavni centralni momenti inercije su: $I_x = 270 \text{ cm}^4$, $I_y = 24,6 \text{ cm}^4$. S obzirom da opterećenje djeluje u ravni ηz , koja nije glavna ravan grede, imamo koso savijanje grede. Pri tome je: $M_x = M_\xi \cos \alpha = 0,9 M_\xi$, $M_y = M_\xi \sin \alpha = 0,44 M_\xi$. Normalni napon je definisan sa

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = M_\xi \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right),$$

odakle je

$$\sigma_{zz} = M_{\xi} (0,0033y + 0,018x).$$

Neutralna osa poprečnog presjeka (za sve poprečne presjeke) je

$$y = -5,37x.$$

Najudaljenije tačke su T_1 i T_2 (sl. P 12.1 (b)), $\left(x_{T_1} = -\frac{10}{2} \sin \alpha = -2,22 \text{ cm} \right.$
 $\left. y_{T_1} = -\frac{10}{2} \cos \alpha = -4,5 \text{ cm} \right)$, pa je

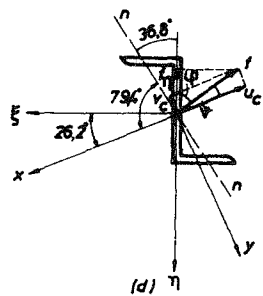
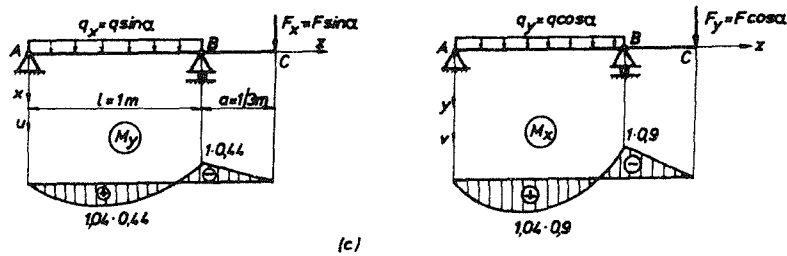
$$\sigma_{zz}^{\max} = 104 [0,0033 (-4,5) + 0,018 (-2,2)] = -5,51 \text{ kN/cm}^2.$$

b) Da bismo odredili ugib u tački C, razložimo opterećenje u dvije glavne ravni kao na sl. P 12.1 (c). Komponenta ugiba tačke C u ravni xz je

$$u_C = \frac{F_x a^3}{3EI_y} + \frac{(F_x a) l}{3EI_y} a - \frac{q_x l^3}{24EI_y} a = \dots = -0,166 \text{ cm},$$

dok je komponenta ugiba u ravni yz

$$v_C = \frac{F_y a^3}{3EI_x} + \frac{(F_y a) l}{3EI_x} a - \frac{q_y l^3}{24EI_x} a = \dots = -0,031 \text{ cm}.$$



Sl. P 12.1 (c)–(d).

Rezultujući ugib je

$$f_C = \sqrt{u_C^2 + v_C^2} = \dots = 0,169 \text{ cm.}$$

Pravac ovog ugiba definisan je sa

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{u_C}{v_C} = 0,1867, \quad \vartheta = 10,6^\circ,$$

što je upravno na neutralnu osu $n-n$ (sl. P 12.1 (b)). Projekcija rezultujućeg ugiba na pravac η je

$$f_\eta = f_C \cos \varphi = f_C \cos (90^\circ - \vartheta - \alpha) = 0,169 \cos 53,2^\circ = 0,1 \text{ cm.}$$

Primjer 12.2.

Za nosač na sl. P 12.2 (a):

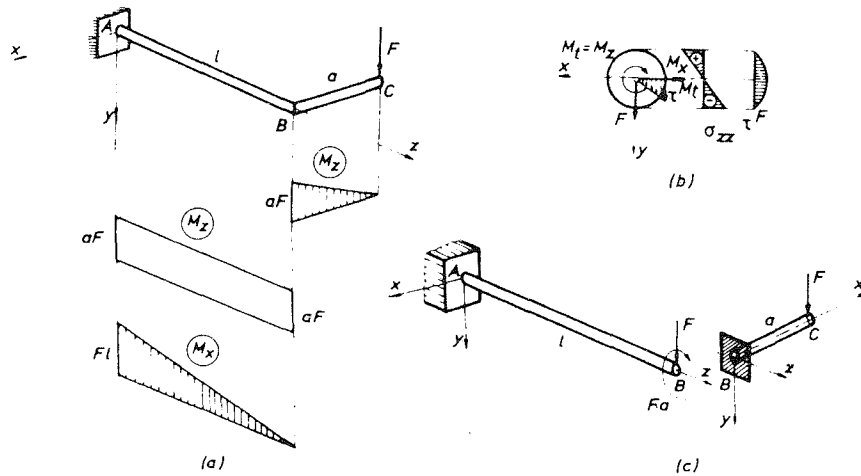
- ustanoviti prirodu naprezanja u dijelovima nosača.
- odrediti ugib tačke C nosača.

Rješenje:

- a) Sa dijagrama presječnih sila na sl. P 12.2 (a) vidimo da je dio nosača BC opterećen na savijanje, dok je dio AB opterećen na kombinovano naprezanje savijanjem i uvijanjem. Na primjer, u presjeku A je (sl. P 12.2. (b)):

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{4l}{R} \frac{F}{\pi R^2}, \quad \tau_{\max}^M = \frac{2a}{R} \frac{F}{\pi R^2}, \quad \tau_{\max}^T = \frac{4}{3} \frac{F}{\pi R^2}.$$

Očigledno je $\tau_{\max}^T \ll \tau_{\max}^M$, pa se smičući napon usljed transferzalne sile može zanemariti u odnosu na smičući napon usljed torzije. Na primjer, za $a=10R$, $\tau_{\max}^T = 6,7\% \tau_{\max}^M$.



Sl. P 12.2.

b) Ugib tačke C dobićemo superpozicijom kako je prikazano na sl. P 12.2 (c):

$$v_C = v_B + v_{C, B} = \frac{Fl^3}{3EI_x} + \left(\beta_B a + \frac{Fa^3}{3EI_z} \right), \quad \beta_B = \frac{(aF) l}{GI_t}$$

$$v_C = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fa^2l}{2GI} + \frac{Fa^3}{3EI}, \quad I = I_x = I_z, \quad I_t = I_0 = 2I.$$

Primjer 12.3.

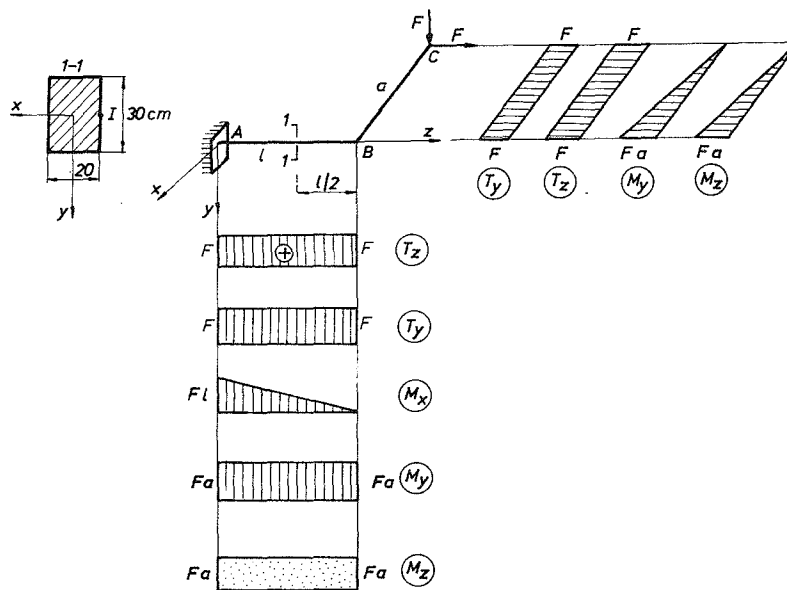
Za nosač na sl. P 12.3 (a):

- nacrtati dijagrame presječnih sila,
- u presjeku 1-1 odrediti maksimalni normalni napon i maksimalni smičući napon,
- odrediti glavne napone u tački 1 presjeka i maksimalni smičući napon u toj tački.

Dato je: $F = 20 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$.

Rješenje:

a) Dijagrami presječnih sila prikazani su na sl. P 12.3 (a).



Sl. P 12.3 (a)

- b) U presjeku 1-1 imamo kombinaciju aksijalnog napreznja, kosog savijanja i torzije: $T_z = F$, $M_x = -F \frac{l}{2}$, $M_y = -Fa$, $M_z = Fa$.

Normalni napon je, prema tome,

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{A} - \frac{F \frac{l}{2}}{I_x} y - \frac{Fa}{I_y} x,$$

tj.

$$\sigma_{zz} = 0,0333 - 0,0222y - 0,1x,$$

s obzirom da je: $A = 600 \text{ cm}^2$, $I_x = 45000 \text{ cm}^4$, $I_y = 20000 \text{ cm}^4$. Maksimalni normalni napon je u tački II (-10, -15)

$$\sigma_{zz}^{\max} = 1,3663 \text{ kN/cm}^2.$$

Zanemarujući smičući napon od transferzalne sile, maksimalni smičući napon u presjeku 1-1 je (sl. P 12.3 (b))

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}.$$

Kako je $M_t = M_z = 20 \cdot 100 = 2000 \text{ kNcm}$, $W_t = 0,346 \cdot 20^3 = 2768 \text{ cm}^3$, dobijamo

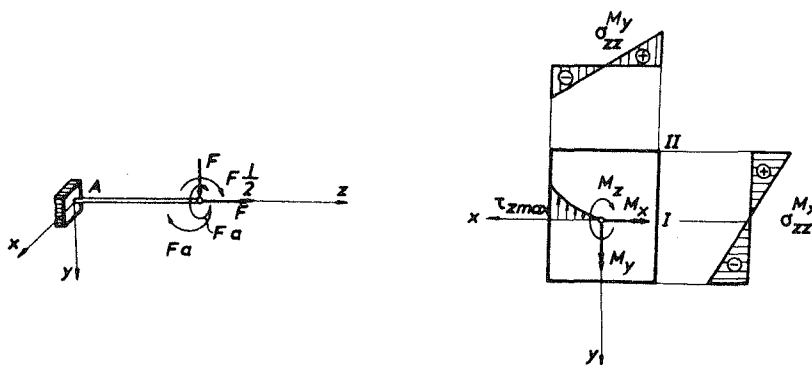
$$\tau_{\max} = 0,723 \text{ kN/cm}^2.$$

- c) U tački I presjeka je $\sigma_{zz} = 1,0333 \text{ kN/cm}^2$, $\tau = 0,723 \text{ kN/cm}^2$, pa su glavni naponi

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (1,0333 \pm \sqrt{1,0333^2 + 4 \cdot 0,723^2}) = 0,517 \pm 0,889,$$

tj. $\sigma_1 = 1,405 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_2 = -0,372 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$. Maksimalni smičući napon u tački I je

$$\tau_{\max}^I = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = 0,889 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$



Sl. P 12.3 (b).

12.2. Deformacioni rad i njegova primjena kod kombinovanog napreznja

Deformacioni rad akumuliran u kombinovano napregnutoj gredi dobijamo sabiranjem deformacionih radova od pojedinačnih napreznja, tako da je

$$\mathcal{A} = \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_0^l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_0^l \frac{M_t^2 dz}{2GI_t} + \int_0^l \frac{T_z^2 dz}{2EA} \quad (1)$$

pri čemu je zanemaren deformacioni rad od smičućih napona usljed transferzalnih sila. Osim toga, deformacioni rad usljed aksijalne sile je znatno manji od deformacionog rada usljed savijanja i torzije, pa se i on zanemaruje, tj. ostaje da je

$$\mathcal{A} = \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_0^l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_0^l \frac{M_t^2 dz}{2GI_t} \quad (2)$$

Tabela 12.1. Vrijednosti integrala $\int_0^L M\bar{M} dz$

$M \backslash \bar{M}$			
	$\frac{L}{2} M_1 M_3$	$\frac{L}{2} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{2} M_1 M_3$
	$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (M_1 + 2M_2) M_3$	$\frac{L}{6} (1 + \frac{a}{L}) M_1 M_3$
	$\frac{L}{6} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (2M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{6} (1 + \frac{b}{L}) M_1 M_3$
	$\frac{L}{6} M_1 (M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} M_1 (2M_3 + M_4) + \frac{L}{6} M_2 (M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} (1 + \frac{b}{L}) M_1 M_3 + \frac{L}{6} (1 + \frac{a}{L}) M_1 M_4$
	$\frac{L}{6} (1 + \frac{c}{L}) M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (1 + \frac{d}{L}) M_1 M_3 + \frac{L}{6} (1 + \frac{c}{L}) M_2 M_3$	za $c \leq a$ $\frac{L}{3} M_1 M_3 - \frac{L(a-c)^2}{6ad} M_1 M_3$
	$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{3} (1 + \frac{ab}{L^2}) M_1 M_3$
	$\frac{L}{4} M_1 M_3$	$\frac{L}{12} (M_1 + 3M_2) M_3$	$\frac{L}{12} (1 + \frac{a}{L} + \frac{a^2}{L^2}) M_1 M_3$

Generalisano pomjeranje f koje odgovara generalisanoj sili Q (sili, momentu savijanja ili uvijanja), određujemo koristeći Castiglianov stav

$$f = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q} = \int_0^l \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial Q} dz + \int_0^l \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial Q} dz + \int_0^l \frac{M_t}{GI_t} \frac{\partial M_t}{\partial Q} dz. \quad (3)$$

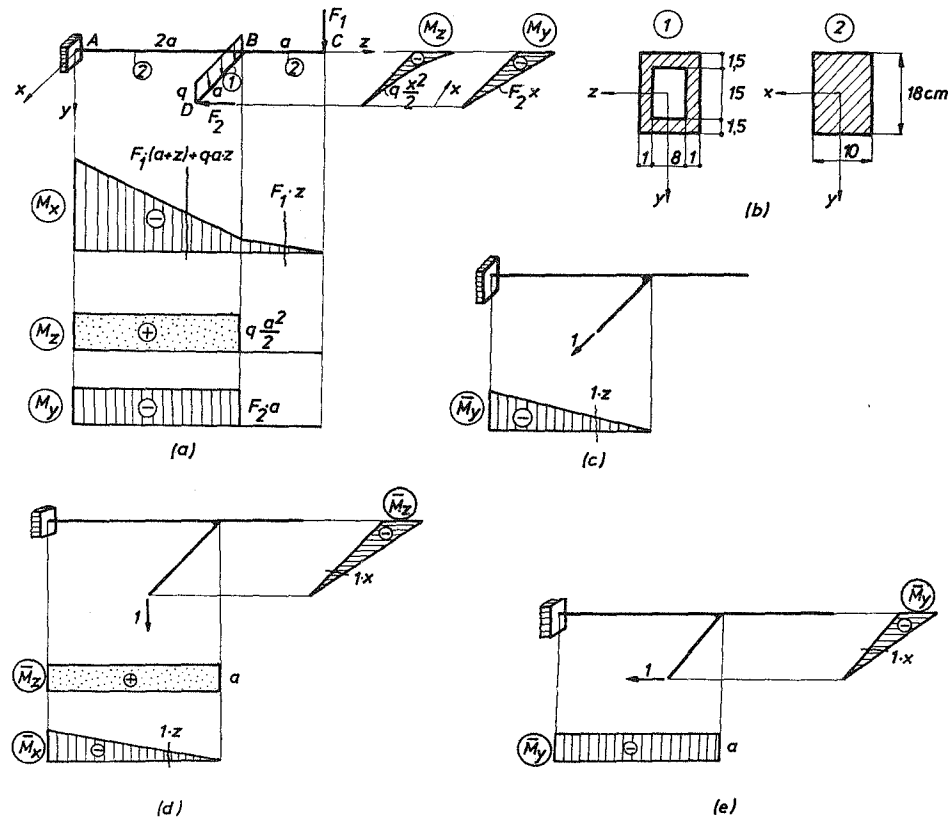
Na raspolaganju nam je, jasno, i Maxwell-Mohrova metoda

$$f = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{EI_x} dz + \int_0^l \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} dz + \int_0^l \frac{M_t \bar{M}_t}{GI_t} dz. \quad (4)$$

gdje su $\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_t$ momenti usljed jedinične generalisane sile na mjestu gdje se traži pomjeranje. Pri određivanju vrijednosti integrala u (4) možemo koristiti i Vereščaginov postupak. Od koristi je i tabela 12:1 u kojoj su date vrijednosti integrala $\int MM dz$ za nekoliko karakterističnih oblika funkcija M i \bar{M} .

Primjer 12.4.

Odrediti sve tri komponente pomjeranja tačke D nosača na slici. Dato je: $F_1 = F_2 = 10 \text{ kN}$, $q = 10 \text{ kN m}$, $a = 1 \text{ m}$, $E = 2,5G = 2,5 \text{ MN cm}^2$.



Rješenje:

Geometrijske karakteristike poprečnih presjeka nosača su:

$$I_{z,1} = 2610 \text{ cm}^4, \quad I_{y,1} = 860 \text{ cm}^4, \\ I_{x,2} = 4860 \text{ cm}^4, \quad I_{y,2} = 1500 \text{ cm}^4, \quad I_{t,2} = 4000 \text{ cm}^4.$$

Dijagrami presječnih sila prikazani su na sl. P 12.4 (a). Pomjeranje tačke D dobićemo Maxwell-Mohrovom metodom (sl. P 12.4 (a) – (e)):

$$x_D = \int_0^{2a} \frac{\overline{M_y M_y}}{EI_{y,2}} dz = \int_0^{2a} \frac{F_2 a \cdot z}{EI_{y,2}} dz = \dots = 5,33 \text{ cm}$$

$$y_D = \int_0^a \frac{\overline{M_z M_z}}{EI_{z,1}} dx + \int_0^{2a} \frac{\overline{M_x M_x}}{EI_{x,2}} dz + \int_0^{2a} \frac{\overline{M_t M_t}}{GI_{t,2}} dz =$$

$$= \int_0^a q \frac{x^2}{2} \frac{1}{EI_{z,1}} dx + \int_0^{2a} \frac{[F_1(a+z) + qaz] z}{EI_{x,2}} dz +$$

$$+ \int_0^{2a} q \frac{a^2}{2} \frac{1}{GI_{t,2}} dz = \dots = 8,73 \text{ cm}$$

$$z_D = \int_0^a \frac{\overline{M_y M_y}}{EI_{y,1}} dx + \int_0^{2a} \frac{\overline{M_y M_y}}{EI_{y,2}} dz = \int_0^a \frac{F_2 x \cdot x}{EI_{y,1}} dx + \int_0^{2a} \frac{F_2 a \cdot a}{EI_{y,2}} dz = \dots = 6,88 \text{ cm}.$$

12.3. Dimenzionisanje pri kombinovanom naprezanju

Da bi se izvršilo dimenzionisanje nosača opterećenog na kombinovano (složeno) naprezanje, neophodno je odrediti kritičnu tačku nosača, saglasno usvojenoj hipotezi o slomu. Za žilave materijale to znači da treba naći tačku u kojoj je najveći smičući napon, odnosno najveća energija promjene oblika, zavisno da li se koristi III ili IV hipoteza o slomu, a za krte materijale treba naći tačku u kojoj je najveći maksimalni glavni napon, s obzirom da je za krte materijale prihvatljiva I hipoteza. Kako naći kritičnu tačku, međutim, složen je problem. Prvo treba ocijeniti koji je poprečni presjek kritičan (opasan), pa zatim naći kritičnu tačku u tom poprečnom presjeku. Obično se provjeri nekoliko poprečnih presjeka i tačaka u njima prije nego što se dođe do odgovora. Dakle, probanjem se ustanovi kritičan presjek i tačka u njemu. Kod kosog savijanja kritične tačke su najudaljenije tačke od neutralne ose opasnog poprečnog presjeka, dok se u slučaju kombinacije savijanja i torzije mora provjeriti više tačaka prije nego se zaključi koja je kritična. Ilustrovaćemo postupak dimenzionisanja i provjere kombinovano opterećenih nosača na nekoliko primjera.

Primjer 12.5.

Dimenzionisati nosač I profila koji je opterećen kao na sl. P 12.5 (a). Dato je: $F = 10 \text{ kN}$, $q = 10 \text{ kN/m}$, $l = 2 \text{ m}$, $\sigma_d = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Rješenje:

Nosač je opterećen na koso savijanje. Dijagrami momenata savijanja u glavnim ravnima prikazani su na sl. P 12.5 (b). Kritičan presjek je u uklještenju A: $M_x = -25 \text{ kNm}$, $M_y = -20 \text{ kNm}$ (sl. P 12.5 (c)). Normalni napon u presjeku je definisan sa

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x,$$

a njegova ekstremna vrijednost se javlja u uglovima presjeka, dakle za $x = x_{\max}$ i $y = y_{\max}$, pa dimenzionisanje vršimo iz uslova

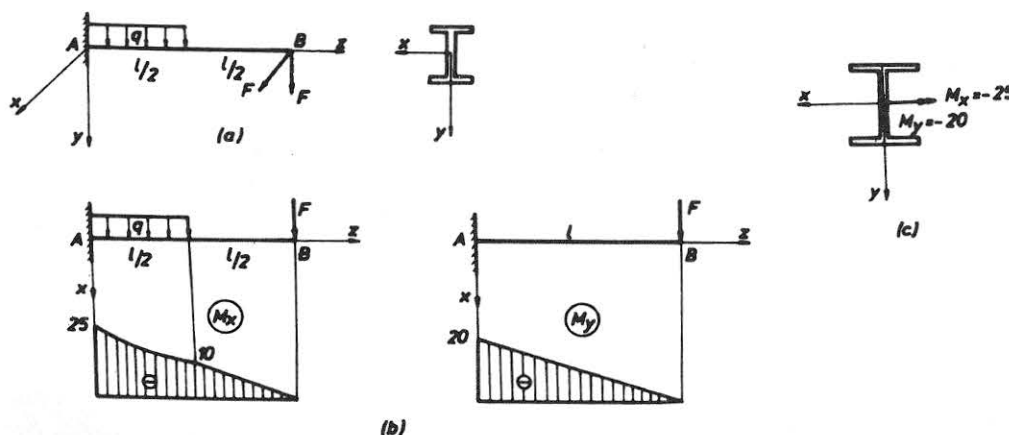
$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq \sigma_d,$$

tj.

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \left(1 + \frac{W_x}{W_y} \frac{|M_y|}{|M_x|} \right) \leq \sigma_d. \quad (a)$$

Pretpostavimo da je $\frac{W_x}{W_y} = 9$. Tada iz (a) slijedi

$$\frac{2500}{W_x} \left(1 + 9 \frac{2000}{2500} \right) \leq 14, \quad W_x \geq 1464 \text{ cm}^3,$$



Sl. P 12.5.

pa iz Tablica profila nalazimo da je za I 40 profil: $W_x = 1460 \text{ cm}^3$, $W_y = 149 \text{ cm}^3$.
Maksimalni normalni napon za ovaj profil je

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{2500}{1460} + \frac{2000}{149} = 15,13 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2},$$

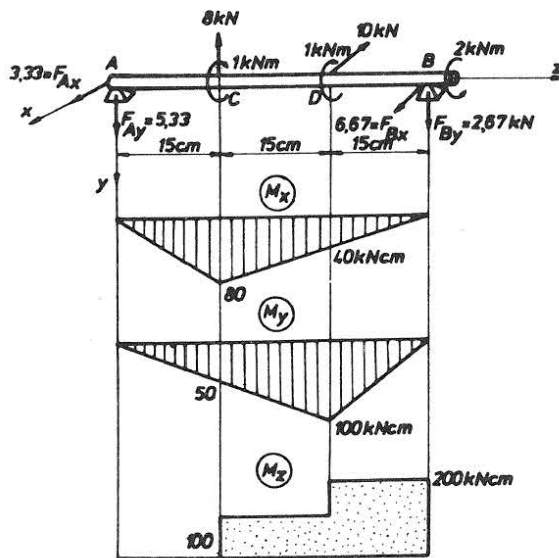
pa zaključujemo da treba usvojiti I 40 profil.

Primjer 12.6.

Koristeći se hipotezom najvećeg smičućeg napona odrediti prečnik vratila opterećenog kao na slici. Dato je $\sigma_d = 14 \text{ kN/cm}^2$.

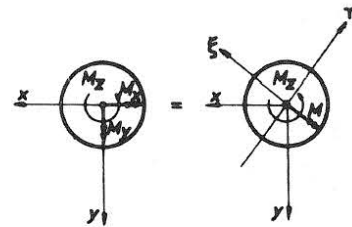
Rješenje:

Dijagrami presječnih sila prikazani su na sl. P 12.6(a). U proizvoljnom poprečnom presjeku se, dakle, javljaju momenti savijanja M_x i M_y , i moment torzije



(a)

Sl. P 12.6.



$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

(b)

M_z , tj. moment savijanja $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ i moment torzije M_z (sl. P 12.6(b)). Prema tome je:

$$\sigma_{zz} = \frac{M}{I_{\xi}} \eta, \quad I_{\xi} = I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0$$

$$\tau = \frac{M_z}{I_0} r.$$

Kritične tačke u svakom poprečnom presjeku su na obimu kruga:

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{2M}{I_0} R, \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} R.$$

Uporedni napon po hipotezi najvećeg smičućeg napona je

$$\sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} \pm \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2}),$$

pa je

$$\sigma_{\text{upor}} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2} = \frac{2R}{I_0} \sqrt{M^2 + M_z^2} \leq \sigma_d. \quad (\text{a})$$

Kritičan presjek je onaj u kome je $\sqrt{M^2 + M_z^2}$ najveće. Provjerom nekoliko presjeka utvrđujemo da je $\sqrt{M^2 + M_z^2}$ najveće u presjeku neposredno desno od presjeka D . U tom presjeku je

$$\sqrt{M^2 + M_z^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{40^2 + 100^2 + 200^2} = 227,16 \text{ kNcm}.$$

Zamjenom u (a) dobijamo

$$\frac{4}{\pi R^3} \cdot 227,16 \leq 14,$$

odakle je

$$R \geq 2,74 \text{ cm}, \quad \text{tj.} \quad D \geq 5,48 \text{ cm}.$$

Primjer 12.7.

Dimenzionirati dijelove nosača na sl. P 12.7 (a) respektujući hipotezu o najvećem smičućem naponu. Dato je: $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 8 \text{ kN}$, $\sigma_d = 12 \text{ kN/cm}^2$, $L_1 = 80 \text{ cm}$, $L_2 = 100 \text{ cm}$, $L_3 = 50 \text{ cm}$.

Rješenje:

Dio CD je opterećen na savijanje momentom M_x i istezanje silom T_z (sl. P 12.7 (b)), pa je

$$\sigma_{zz} = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y.$$

Kritičan presjek u ovom dijelu nosača je presjek C :

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{8}{d^2 \pi} + \frac{500}{d^4 \pi} \cdot \frac{d}{2} \cong \frac{32 \cdot 500}{d^3 \pi} \leq 12,$$

što daje $d \geq 7,5 \text{ cm}$, pa usvajamo $d = 8 \text{ cm}$.

Dio BC je opterećen na koso savijanje i torziju (sl. P 12.7 (c)). Kritičan presjek je presjek B u kome je: $M_x = -1000 \text{ kNcm}$, $M_y = 800 \text{ kNcm}$, $M_t = 500 \text{ kNcm}$. Kandidati za kritične tačke u presjeku B su tačke I , II i III .

Tačka I:

$$\sigma_{\text{upor}} = \sigma_{zz}^{\text{max}} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{|M_x|}{W_x} \left(1 + \frac{W_x}{W_y} \frac{|M_y|}{|M_x|} \right) = \frac{1000}{W_x} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{800}{1000} \right) \leq 12$$

$$W_x \geq 183,33 \text{ cm}^3, \quad b \geq 7,88 \text{ cm}, \quad \left(W_x = \frac{3}{8} b^3, \quad W_y = \frac{1}{4} b^3 \right).$$

Tačka II:

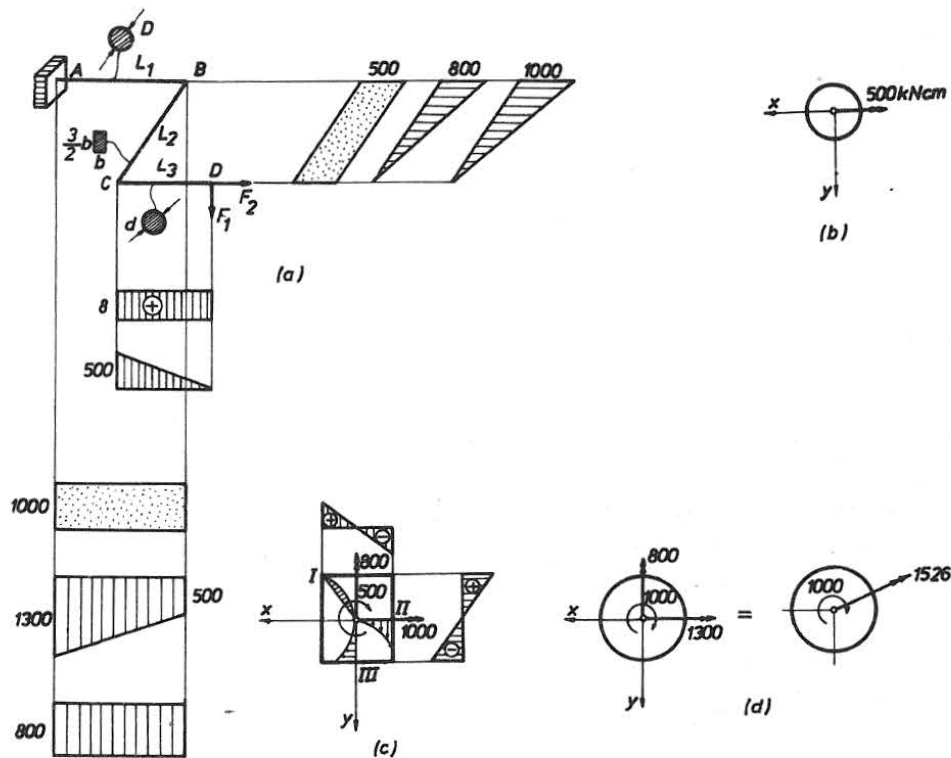
$$\sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{800}{\frac{1}{4} b^3}, \quad \tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{500}{0,346 b^3}$$

$$\sigma_{\text{upor}} = \frac{1}{b^3} \sqrt{3200^2 + 4 \cdot 1445^2} = \frac{4312}{b^3} \leq 12, \quad b \geq 7,1 \text{ cm}.$$

Tačka III:

$$\sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1000}{\frac{3}{8} b^3}, \quad \tau = k_3 \frac{M_t}{W_t} = 0,859 \frac{500}{0,346 b^3}$$

$$\sigma_{\text{upor}} = \frac{1}{b^3} \sqrt{2667^2 + 4 \cdot 1241^2} = \frac{3644}{b^3} \leq 12, \quad b \geq 6,72 \text{ cm}.$$



Sl. P 12.7.

Prema tome je $b = \max \{7,88; 7,1; 6,72\} = 7,88$ cm, pa usvajamo $b = 8$ cm.

Dio AB je opterećen na savijanje i torziju (sl. P 12.7 (b)). Kritičan je presjek A u kome je $M = \sqrt{(-1300)^2 + (800)^2} = 1526$ kNcm, $M_t = 1000$ kNcm. Najveći naponi su na obimu kruga:

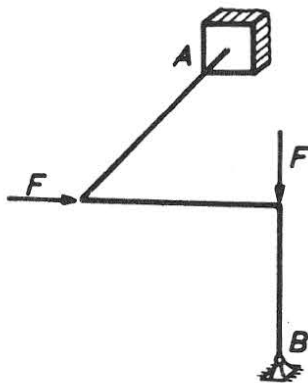
$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{M}{\frac{1}{64} \pi D^4} \frac{D}{2} = \frac{48\,848}{\pi D^3}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{1}{32} \pi D^4} \frac{D}{2} = \frac{16\,000}{\pi D^3}.$$

Prema tome je

$$\sigma_{\text{upor}} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{\pi D^3} \sqrt{48\,848^2 + 4 \cdot 16\,000^2} \leq 12,$$

što daje $D \geq 11,57$ cm, pa usvajamo $D = 12$ cm.

12.4. Rješavanje statički neodređenih problema kombinovanog naprezanja



Sl. 12:6,

Ukoliko je broj nepoznatih reakcija veza veći od broja statičkih uslova ravnoteže, kažemo da je nosač statički neodređen. Na primjer, na sl. 12:6 imamo kombinovano opterećen prostorni ram ukliješten u tački A i zglibno vezan u tački B , koji je tri puta statički neodređen jer postoji $6 + 3 = 9$ nepoznatih reakcija veza, a samo šest jednačina ravnoteže. Pri rješavanju ovakvih statički neodređenih nosača koristimo se ranije uvedenom metodom svodenja nosača na statički određen uvođenjem statički prekobrojnih generalisanih sila i zahtijevanjem da korespondentna generalisana pomjeranja budu jednaka nuli ili nekom poznatom izrazu. Pri tome se za određivanje pomjeranja najčešće koristi metoda deformacionog rada, tj. Castiglianov stav i kanonske jednačine. Rješavanje statički neodređenih problema kombinovanog naprezanja ilustrovano je u primjerima koji slijede.

Primjer 12.8.

Odrediti dijagrame presječnih sila konstrukcije na slici. Konzola AD se naslanja u tački C na ram BC . Izvršiti zatim dimenzionisanje. Dijelovi konstrukcije su kružnog poprečnog presjeka. Dato je: $a = 1$ m, $F = 20$ kN, $\sigma_d = 14$ kN/cm², $G = 0,4E$.

Rješenje:

Ako razdvojimo konzolu i ram, njihov međusobni uticaj možemo predstaviti silom X , koju nalazimo iz uslova da je ugib konzole u tački C

$$v_c = \frac{5}{48} \frac{F (2a)^3}{EI} - \frac{1}{24} \frac{X (2a)^3}{EI}$$

jednak ugibu rama u tački C

$$v_c = \frac{Xa^3}{3EI} + \frac{(Xa)a}{GI_0} + \frac{Xa^3}{3EI}$$

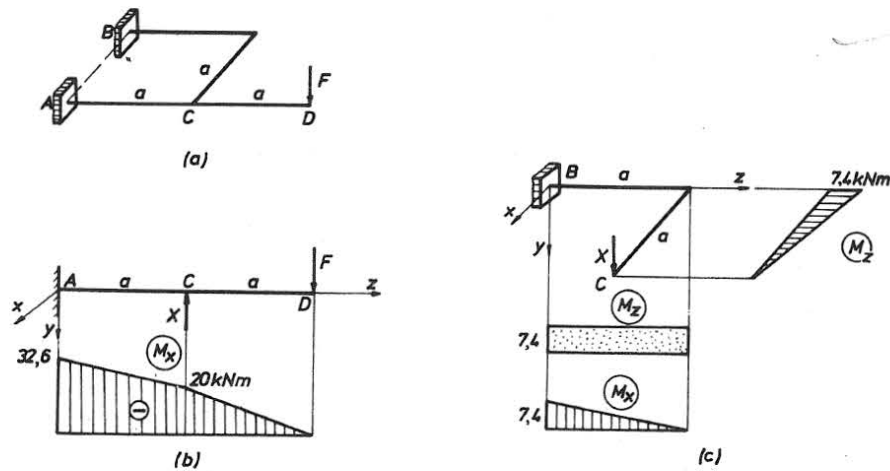
Dakle,

$$\frac{5}{48} F (2a)^3 - \frac{1}{24} X (2a)^3 = \frac{1}{3} Xa^3 + \frac{1}{0,8} Xa^3 + \frac{1}{3} Xa^3,$$

odakle dobijamo $X = 0,37F$. Dijagrami presječnih sila su prikazani na sl. P 12.8 (b) i (c). Kritičan presjek je u uklještenju A, pa dimenzionisanje vršimo iz zahtjeva

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{3260}{I} R = \frac{4}{\pi R^3} \cdot 3260 \leq 14,$$

što daje $R \geq 6,7 \text{ cm}$.



Sl. P 12.8.

Primjer 12.9.

Greda Z 20 profila opterećena je kontinualnim opterećenjem q duž cijelog raspona, a u tački C je poduprta sa dva štapa MC i NC (sl. P 12.9 (a)). Odrediti napon u ovim štapovima ako se oni zagriju za $\Delta T = 50^\circ\text{C}$. Dato je: $q = 10 \text{ kN/m}$, $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$, $E_2 = 10^4 \text{ MN/m}^2$, $\alpha_1 = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $d = 3 \text{ cm}$.

Rješenje:

Sa sl. P 12.9 (a) je

$$\overline{CC'} = \eta_c = \frac{\Delta l_1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta l_1, \quad (\text{a})$$

pri čemu je

$$\Delta l_1 = \frac{S l_1}{E_1 A_1} - \alpha_1 l_1 \Delta T = \dots = 0,0014 S - 0,1251.$$

Veličina $\eta_C = \overline{CC'}$ mora biti jednaka ugibu grede AB (sl. P 12.9 (b)) u tački C u pravcu η . S obzirom da je u pitanju koso savijanje, posmatrajmo ugame posebno u glavnim ravnima xz i yz (sl. P 12.9 (c)). Ugib u ravni xz je

$$x_C = \frac{5}{384} \frac{q_x l^4}{E_2 I_y} - \frac{1}{48} \frac{(\sqrt{3} S \sin \alpha) l^3}{E_2 I_y},$$

dok je ugib u ravni yz

$$y_C = \frac{5}{384} \frac{q_y l^4}{E_2 I_x} - \frac{1}{48} \frac{(\sqrt{3} S \cos \alpha) l^3}{E_2 I_x}.$$

Projekcija rezultujućeg ugiba u pravcu η je (sl. P 12.9 (d))

$$\eta_C = x_C \sin \alpha + y_C \cos \alpha = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E_2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{I_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y} \right) - \frac{1}{48} \frac{\sqrt{3} S l^3}{E_2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{I_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y} \right),$$

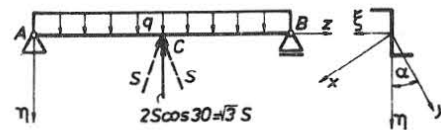
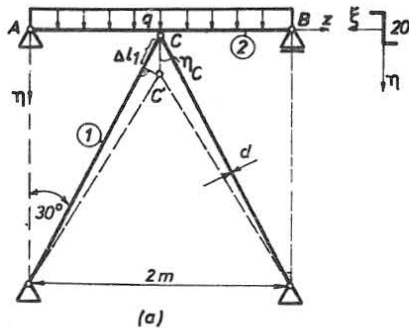
odakle se dobija, s obzirom na geometrijske karakteristike Z 20 profila ($I_x = 2510 \text{ cm}^4$, $I_y = 147 \text{ cm}^4$, $\text{tg } \alpha = 0,313$, $\cos \alpha = 0,9543$, $\sin \alpha = 0,299$),

$$\eta_C = \frac{5}{384} \frac{10 \cdot 2^4 \cdot 10^6}{10^4 \cdot 10^{-1}} \left(\frac{0,9543^2}{2510} + \frac{0,299^2}{147} \right) - \frac{1}{48} \frac{\sqrt{3} S \cdot 2^3 \cdot 10^6}{10^4 \cdot 10^{-1}} \left(\frac{0,9543^2}{2510} + \frac{0,299^2}{147} \right),$$

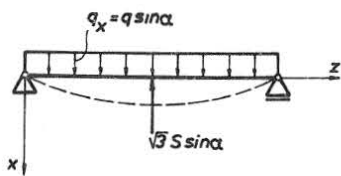
tj.

$$\eta_C = 2 - 0,289 S.$$

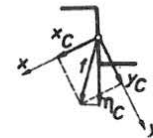
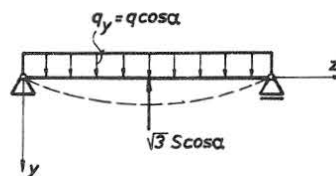
(b)



(b)



(c)



(d)

Izjednačujući (a) i (b):

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(0,0014S - 0,1251) = 2 - 0,289S,$$

dobijamo silu u štapovima $S = 7,38 \text{ kN}$. Napon u štapovima je

$$\sigma = \frac{S}{A_1} = \frac{7,38}{\frac{3^2\pi}{4}} = 1,04 \text{ kN/cm}^2.$$

Primjer 12.10.

Za ram na sl. P 12.10 (a) odrediti dijagramne presječnih sila, pa naći pomjeranje tačke D . Svi dijelovi rama su istog pravougaonog poprečnog presjeka dimenzija $a \times 2a$. Dato je: $F = 20 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $a = 10 \text{ cm}$, $E = 20 \text{ MN/cm}^2$, $G = 0,4E$.

Rješenje:

Nosač je dva puta statički neodređen. Za statički prekobrojne uzećemo sile u osloncu D (sl. P 12.10 (b)), pa kanonske jednačine glase:

$$\begin{aligned} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Koeficijente δ_{ij} odredićemo metodom Vereščagina pomoću sl. P 12.10 (c), kako slijedi:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_{\xi}} \left(-\frac{1}{2} l \cdot Fl \cdot \frac{2}{3} l \right) + \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} l \cdot Fl \cdot \frac{2}{3} l \right) + \frac{1}{GI_t} (-l \cdot Fl \cdot l) = -6,47 \frac{Fl^3}{Ea^4}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI_{\xi}} \left(-\frac{1}{2} l \cdot Fl \cdot l \right) + \frac{1}{EI_y} \left(-\frac{1}{2} l \cdot Fl \cdot \frac{2}{3} l \right) + \frac{1}{GI_t} (-l \cdot Fl \cdot l) = -8,22 \frac{Fl^3}{Ea^4}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_{\xi}} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) + \frac{1}{GI_t} (l \cdot l \cdot l) = 6,47 \frac{l^3}{Ea^4}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_u} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) + \frac{1}{EI_{\xi}} (l \cdot l \cdot l) + \frac{1}{EI_y} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) + \frac{1}{GI_t} (l \cdot l \cdot l) = 9,47 \frac{l^3}{Ea^4}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_{\xi}} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot l \right) + \frac{1}{GI_t} (l \cdot l \cdot l) = 6,22 \frac{l^3}{Ea^4}.$$

Zamjenom u (a) je sada:

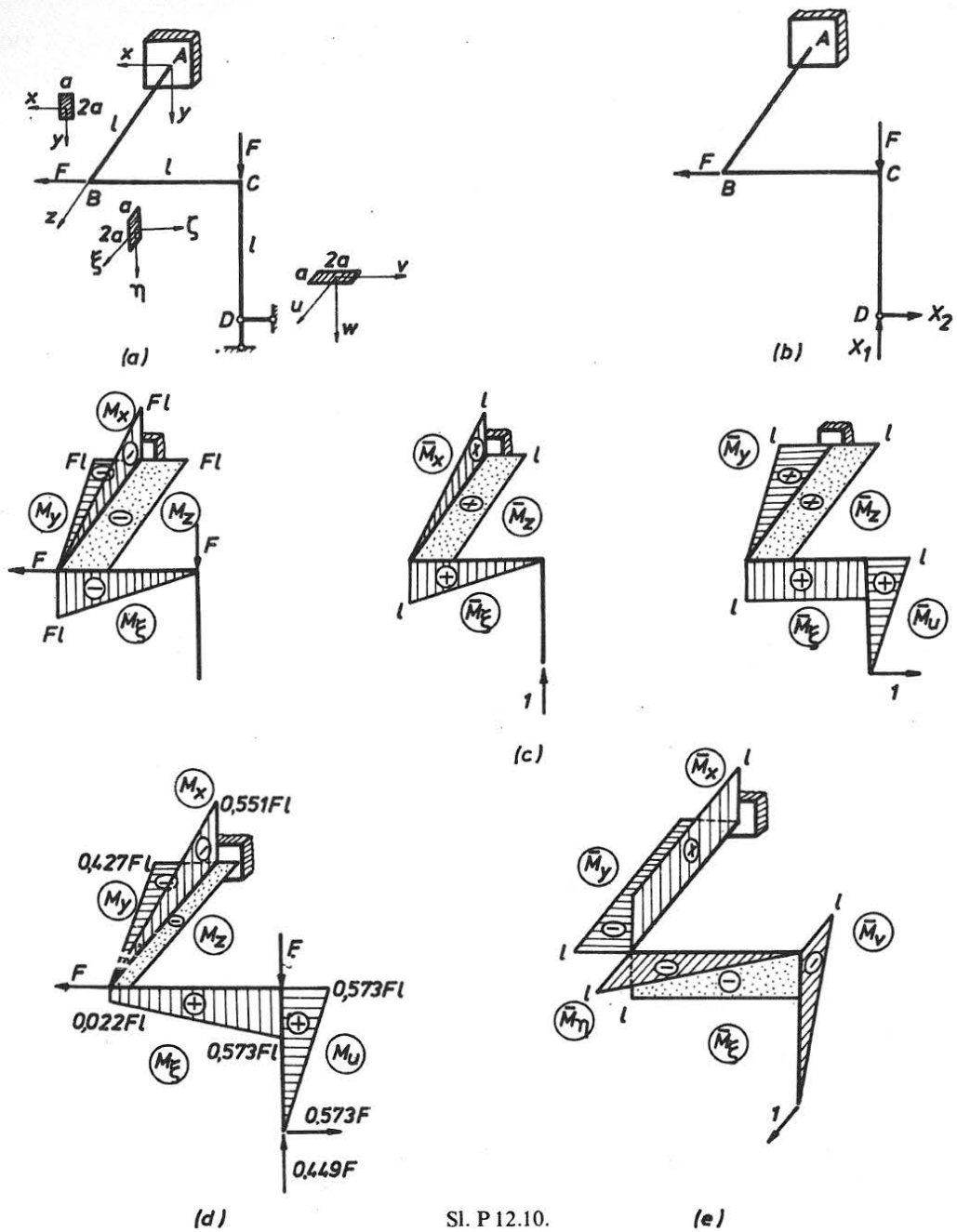
$$6,47X_1 + 6,22X_2 = 6,47F$$

$$6,22X_1 + 9,47X_2 = 8,22F,$$

odakle dobijamo $X_1 = 0,449F$, $X_2 = 0,573F$.

Dijagrami napadnih momenata u nosaču prikazani su na sl. P 12.10 (d). Pomjeranje tačke D dobićemo Vereščaginovim postupkom množeći dijagrame na sl. P 12.10 (d) i (e):

$$u_D = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} l \cdot 0,551 Fl \cdot l \right) + \frac{1}{EI_y} \left(\frac{1}{2} l \cdot 0,427 Fl \cdot l \right) = 0,8675 \frac{Fl^3}{Ea^4} = 0,08675 \text{ cm}.$$



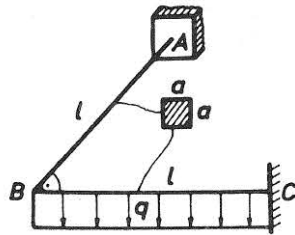
Sl. P 12.10.

Primjer 12.11.

Za nosač na sl. P 12.11 (a) odrediti:

- a) reakcije u vezama i dijagrame presječnih sila,
- b) ugib tačke B.

Dato je: $q, l, a, G=0,4E$.



Sl. P 12.11 (a).

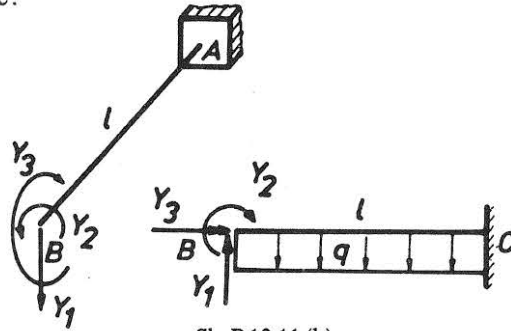
Rješenje:

Ako je geometrija nosača u jednoj ravni a opterećenje upravno na tu ravan, tada su od presječnih sila samo tri različite od nule, jer su jednake nuli sile u ravni nosača i moment oko ose upravne na ravan nosača. Zato je gornji nosač samo tri puta statički neodređen. Riješićemo ga, umjesto preko kanonskih jednačina i deformacionog rada, prosto na sljedeći način. Pretpostavimo da smo nosač razdvojili na mjestu B (sl. P 12.11 (b)). Tada na mjestu B ugib lijeve i desne konzole mora biti isti, nagib konzole CB u tački B mora biti jednak uglu rotacije poprečnog presjeka B konzole AB, i nagib konzole AB u tački B mora biti jednak uglu rotacije poprečnog presjeka B konzole CB. Dakle:

$$\frac{Y_1 l^3}{3EI} - \frac{Y_3 l^2}{2EI} = \frac{q l^4}{8EI} - \frac{Y_1 l^3}{3EI} - \frac{Y_2 l^2}{2EI}$$

$$\frac{Y_2 l}{GI_t} = \frac{q l^3}{6EI} - \frac{Y_1 l^2}{2EI} - \frac{Y_2 l}{EI}$$

$$\frac{Y_1 l^2}{2EI} - \frac{Y_3 l}{EI} = \frac{Y_3 l}{GI_t}$$



Sl. P 12.11 (b).

Rješavanjem ovog sistema jednačina nalazimo:

$$Y_1 = 0,2ql, \quad Y_2 = 0,03ql^2, \quad Y_3 = 0,04ql^2.$$

Pri tome je korišćeno da je $I = I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$ i $I_t = 0,14a^4$. Dijagrami presječnih sila prikazani su na Sl. P 12.11 (c).

b) Ugib tačke B nalazimo posmatrajući konzolu AB na sl. P 12.11 (b):

$$v_B = \frac{Y_1 l^3}{3EI} - \frac{Y_3 l^2}{2EI} = 0,0467 \frac{q l^4}{EI}.$$

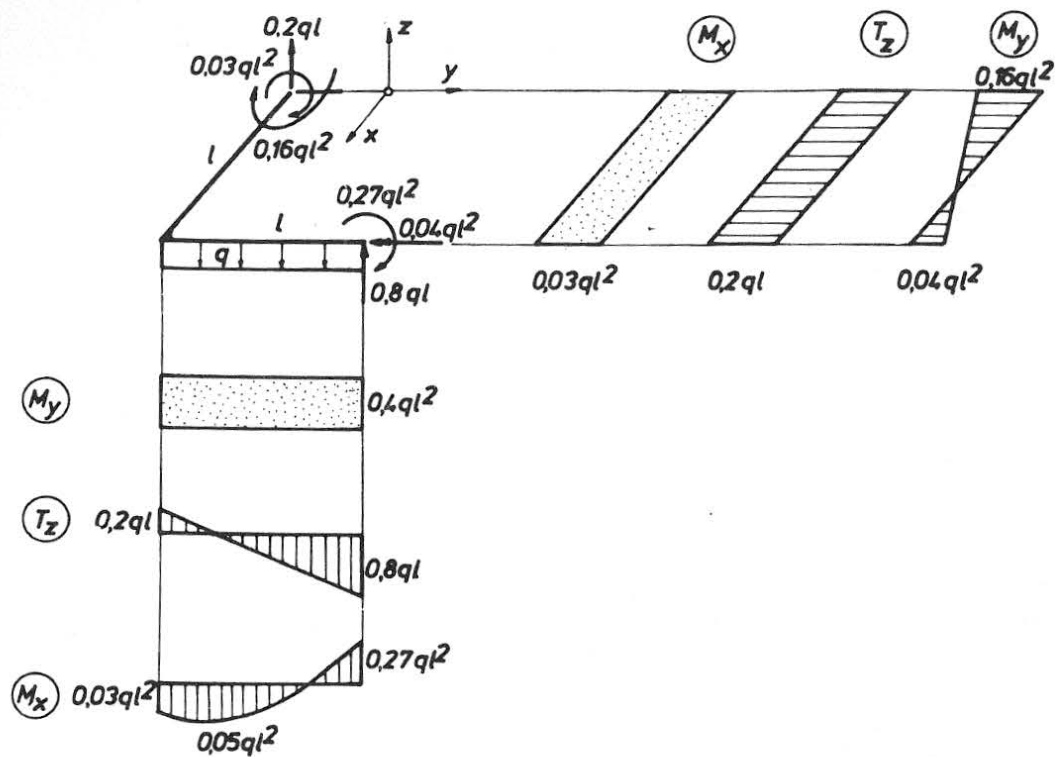
Primjer 12.12.

Određiti vertikalno pomjeranje tačke C u kojoj djeluje vertikalna sila F na horizontalni ram uklješten u tačkama A i B (sl. P 12.12 (a)). Ram je u obliku polukruga sa kružnim poprečnim presjekom ($GI_t = 0,8 EI$).

Rješenje:

Zbog simetrije posmatrajmo samo polovinu rama (sl. P 12.12 (b)). Nagib u tački C mora biti jednak nuli, tj.

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial M_C} = 0,$$



Sl. P 12.11 (c).

gdje je

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_s^2}{2EI} R d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{M_t^2}{2GI_t} R d\theta$$

deformacioni rad u posmatranom dijelu rama, a M_s i M_t su momenti savijanja i torzije u proizvoljnom poprečnom presjeku rama definisanom uglom θ :

$$M_s = M_C \cos \theta - FR \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$M_t = M_C \sin \theta - FR \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Prema tome je

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial M_C} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_s}{EI} \frac{\partial M_s}{\partial M_C} R d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{M_t}{GI_t} \frac{\partial M_t}{\partial M_C} R d\theta = 0,$$

odnosno

$$\int_0^{\pi/2} \left(M_C \cos \theta - \frac{1}{2} FR \sin \theta \right) \cos \theta d\theta + \frac{1}{0,8} \int_0^{\pi/2} \left[M_C \sin \theta - FR \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \right] \sin \theta d\theta = 0,$$

što daje nakon integracije $M_C = 0,32FR$.

Momenti savijanja i torzije u ramu su sada:

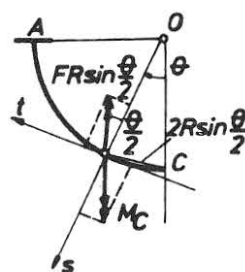
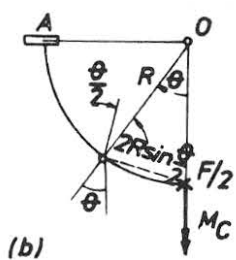
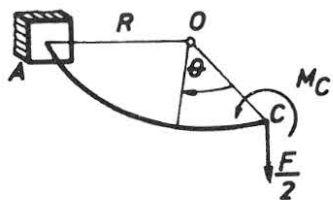
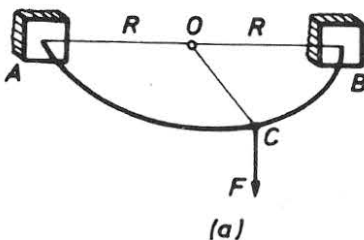
$$M_s = 0,32FR \cos \theta - \frac{1}{2} FR \sin \theta$$

$$M_t = 0,32FR \sin \theta - \frac{1}{2} FR (1 - \cos \theta).$$

Vertikalno pomjeranje tačke C dobićemo iz Castiglianovog stava:

$$f = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial F} = 2 \frac{FR^3}{EI} \left\{ \int_0^{\pi/2} \left(0,32 \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right)^2 d\theta + \frac{1}{0,8} \int_0^{\pi/2} \left[0,32 \sin \theta - \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \right]^2 d\theta \right\}$$

$$f = 0,254 \frac{FR^3}{EI}.$$



Sl. P 12.12.

Primjer 12.13.

Odrediti pomjeranje tačke C nosača od L 200 × 200 × 20 profila na sl. P 12.13 (a). Dato je: $F = 100 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $E = 20 \text{ MN/cm}^2$.

Rješenje:

Nosač je jedanput statički neodređen. Nepoznatu reakciju X odredićemo uz uslova $\eta_c = 0$, tj. iz uslova

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X} = \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial X} = 0,$$

gdje je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ deformacioni rad u nosaču. S obzirom da je u pitanju koso savijanje u dijelovima nosača, imamo

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial X} = \int_0^{2l} M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} \frac{dz}{EI_x} + \int_0^{2l} M_y \frac{\partial M_y}{\partial X} \frac{dz}{EI_y} = \frac{1}{2E} \left(\frac{1}{I_x} + \frac{1}{I_y} \right) \int_0^{2l} M_\xi \frac{\partial M_\xi}{\partial X} dz.$$

Sa sl. P 12.13 (b) je

$$\int_0^{2l} M_\xi \frac{\partial M_\xi}{\partial X} dz = \int_0^l Xz \cdot z dz + \int_0^{2l} [Xz - F(z-l)] z dz = 2l^3 (1,333X - 0,417F),$$

tako da je

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial X} = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{I_x} + \frac{1}{I_y} \right) l^3 (1,333X - 0,417F).$$

Slično nalazimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial X} &= \frac{1}{2E} \left(\frac{1}{I_u} + \frac{1}{I_v} \right) \int_0^{2l} M_a \frac{\partial M_a}{\partial X} dw = \frac{1}{2E} \left(\frac{1}{I_u} + \frac{1}{I_v} \right) \int_0^{2l} (2X - F) l \cdot 2l dw = \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{1}{I_x} + \frac{1}{I_y} \right) l^3 (4X - 2F). \end{aligned}$$

Prema tome, konačno

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X} = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{I_x} + \frac{1}{I_y} \right) l^3 (5,333X - 2,417F) = 0,$$

odakle je $X = 0,453F$.

Komponentalna pomjeranja tačke C dobićemo pomoću sl. P 12.13 (c). Komponenta pomjeranja u pravcu ξ ose je:

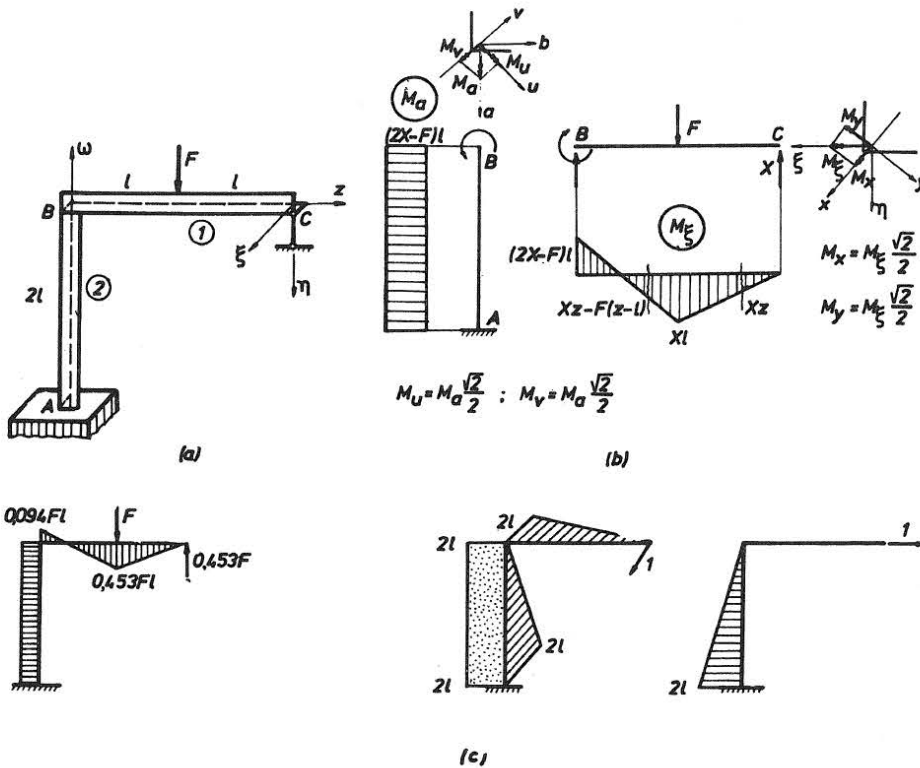
$$\begin{aligned} \xi_c &= \int_0^{2l} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI_x} dz + \int_0^{2l} \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} dz + \int_0^{2l} \frac{M_u \bar{M}_u}{EI_u} dw + \int_0^{2l} \frac{M_v \bar{M}_v}{EI_v} dw \\ &= 0,1873 \frac{Fl^3}{EI_x} - 0,1873 \frac{Fl^3}{EI_y} + 0,094 \frac{Fl^3}{EI_u} - 0,094 \frac{Fl^3}{EI_v} \\ &= \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) 0,0933 \frac{Fl^3}{E} = \dots = -0,3 \text{ cm}, \end{aligned}$$

pri čemu iz Tablica profila nalazimo da je za L 200 × 200 × 20 profil:

$$I_x = 4540 \text{ cm}^4 = I_v, \quad I_y = 1160 \text{ cm}^4 = I_u.$$

Slično nalazimo da je komponenta pomjeranja u pravcu z ose:

$$z_c = \frac{1}{2E} \left(\frac{1}{I_u} + \frac{1}{I_v} \right) 0,188 F l^3 = \dots = 0,5 \text{ cm}.$$

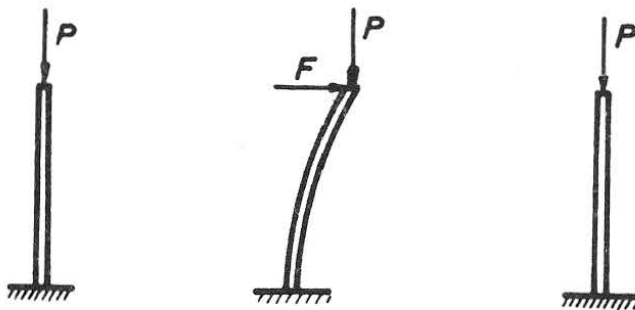


Sl. P 12.13.

13. STABILNOST GREDE

13.1. Uvodne napomene

Kao što smo vidjeli, pod djelovanjem spoljašnjeg opterećenja u gredi se javljaju naprezanja i deformacije, pri čemu se u deformisanoj konfiguraciji uspostavlja ravnoteža između spoljašnjih i unutrašnjih sila u gredi. Pri tome smo, prećutno, pretpostavljali da je deformisani ravnotežni oblik grede stabilan, tj. da mali poremećaj u opterećenju izaziva malu dopunsku deformaciju koja iščezava sa uklanjanjem poremećaja. Na primjer, u analizi aksijalnog naprezanja grednog nosača smatrali smo da je pritisnuti ravnotežni položaj grede stabilan, tako da dodatna bočna sila F izaziva ugib koji nestaje nakon uklanjanja sile F , tj. greda se vraća u prvobitni pravi ravnotežni položaj (sl. 13:1). Može se, međutim, dogoditi da gredni nosač (kao i drugi konstruktivni elementi, ploče, ljuske i sl.) budu takve

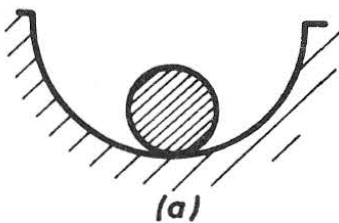


Sl. 13:1.

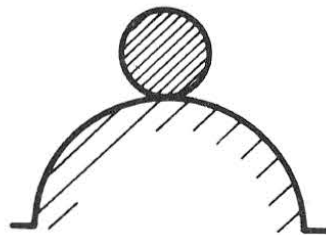
geometrije i tako opterećeni da u deformisanoj konfiguraciji zauzimaju nestabilan ravnotežni položaj i da je dovoljan i najmanji poremećaj da izazove trajno odstupanje od tog položaja, koje ostaje i nakon otklanjanja poremećaja. Gredni nosač pri tome gubi svoju nosivost i funkciju, i dolazi do njegovog sloma. Ovo se, naravno, u proraču-

nima konstrukcije mora spriječiti, pa je naš zadatak u ovom poglavlju da analiziramo problem stabilnosti grednog nosača.

Klasična ilustracija fenomena nestabilnosti može se dati pomoću eksperimenta sa kuglom na udubljenoj i ispupčenoj podlozi (sl. 13:2). Ravnotežni položaj kugle na sl. 13:2 (a) je očigledno stabilan, jer ako se nekim poremećajem kugla izvede iz tog ravnotežnog položaja, ona se vraća u njega nakon otklanjanja poremećaja. Međutim, kugla na sl. 13:2 (b) je u nestabilnom ravnotežnom položaju i dovoljan je i najmanji poremećaj da je trajno izvede iz njega.

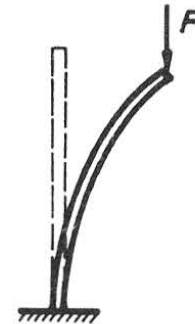


(a)



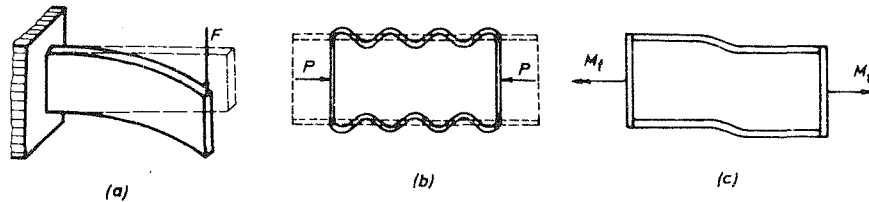
(b)

Sl. 13:2.



Sl. 13:3.

Ekvivalentna situacija se javlja sa pritisnutim štapom. Iz iskustva je poznato da se dovoljno vitak štap pri dovoljno velikoj (kritičnoj) pritisnoj sili može izviti, što vodi gubljenju njegove nosivosti i funkcije kao konstruktivnog elementa (sl. 13:3). Izvijanje pritisnutog štapa je, u stvari, fenomen nestabilnosti, jer je pri određenoj pritisnoj sili vertikalni ravnotežni položaj štapa nestabilan, i dovoljan je najmanji poremećaj (recimo, slučajno bočno djelovanje) pa da se štap izvije, tj. počne naglo da savija i uskoro slomi.



Sl. 13:4.

Slična situacija, tj. nastanak sloma usljed fenomena nestabilnosti, javlja se i u mnogim drugim slučajevima. Na primjer, na sl. 13:4 (a) prikazan je izvijeni oblik uske konzole opterećene na savijanje kritičnom silom F . Na sl. 13:4 (b) prikazan je izvijeni oblik tankozidne cijevi pod djelovanjem kritične sile pritiska P , dok je na sl. 13:4 (c) prikazan izvijeni oblik tankozidne cijevi pod djelovanjem kritičnog momenta torzije M_t . Mi ćemo se ograničiti samo na analizu stabilnosti pritisnutih grednih nosača (tj. štapova ili stubova). Analizu ćemo započeti tako što ćemo prvo posmatrati gredni nosač koji je opterećen istovremeno bočnim opterećenjem i pritisnom silom, i ustanoviti uticaj pritisne sile na veličinu ugiba nosača. Vidjećemo da pri određenoj (kritičnoj) sili pritiska, bez obzira koliko malo je bočno opterećenje, dolazi do pojave velikih ugiba, tj. do gubitka nosivosti i sloma grede. Ovo je direktno u vezi sa fenomenom nestabilnosti pritisnute grede, o čemu je zatim detaljno riječ.

13.2. Uticaj aksijalne sile na ugib grede

Ukoliko su opterećenje i deformacije nosača takvi da se deformisana konfiguracija neznatno razlikuje od nedeformisane, može se smatrati pri postavljanju uslova ravnoteže i izvođenju izraza za napon da opterećenje djeluje u nedeformisanoj, a ne u deformisanoj konfiguraciji, kakav je zaista slučaj. Na primjer, na sl. 13:5 (a) je prikazana greda opterećena silama F_1 i F_2 . Evidentno je da je uticaj malih deformacija (tj. ugiba) ove grede na raspodjelu momenta i transferzalne sile u gredi toliko zanemarljiv da se može smatrati da opterećenje djeluje u nedeformi-



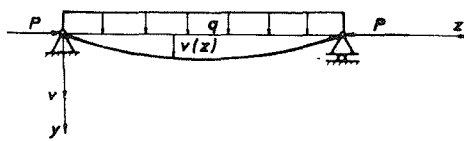
Sl. 13:5.

sanoj konfiguraciji (sl. 13:5 (b)). Ograničavajući se na male elastične deformacije, vidjeli smo zatim da zbog linearnosti izvedenih jednačina važi princip superpozicije, tj. napon i deformacija od nekoliko opterećenja mogu se dobiti sabiranjem napona, odnosno deformacija od pojedinačnih opterećenja. Ima, međutim, slučajeva kada se, uprkos malim deformacijama, ne može smatrati da opterećenje djeluje u nedeformisanoj konfiguraciji, već se mora posmatrati deformisana konfiguracija i u odnosu na nju postavljati uslovi ravnoteže i ostale jednačine. Takav je slučaj sa vitkom gredom istovremeno izloženom aksijalnoj sili i bočnom opterećenju (sl. 13:6). Očigledno, moment savijanja u proizvoljnom poprečnom presjeku deformisane konfiguracije je

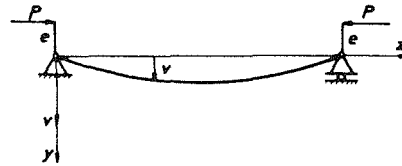
$$M_x(z) = Y_A z - \frac{1}{2} q z^2 + P v(z), \quad (1)$$

dok bi moment računat u odnosu na nedeformisanu konfiguraciju bio

$$M_x(z) = Y_A z - \frac{1}{2} q z^2. \quad (2)$$



Sl. 13:6.



Sl. 13:7.

Isti je slučaj sa ekscentrično pritisnutom gredom (sl. 13:7). Moment savijanja u proizvoljnom poprečnom presjeku deformisane konfiguracije je

$$M_x(z) = P(e + v), \quad (3)$$

što je, u slučaju vitkih greda za koje v može biti reda veličine ekscentriciteta e , sasvim različito od momenta koji se dobija u odnosu na nedeformisanu konfiguraciju

$$M_x(z) = P e. \quad (4)$$

Očigledno je iz (1), odnosno (3), da moment savijanja nije proporcionalan sa aksijalnom silom, jer ugib v zavisi od sile P . Prema tome, princip superpozicije za aksijalne sile ne važi.

13.2.1. Diferencijalne jednačine pritisnute savijene grede

Vitku gredu istovremeno opterećenu aksijalnom silom i bočnim opterećenjem zvaćemo pritisnuta savijena greda. Izdvojimo na proizvoljnom mjestu elemenat ove grede dužine dz između dva presjeka grede upravna na z osu (sl. 13:8). Iz uslova ravnoteže da je suma svih vertikalnih sila koje djeluju na uočeni elemenat jednaka nuli, dobijamo

$$-T_y + q dz + (T_y + dT_y) = 0,$$

tj.

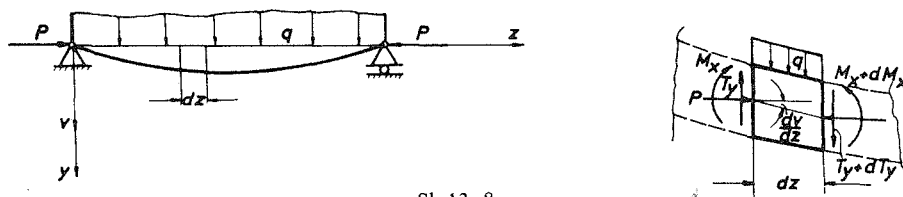
$$\frac{dT_y}{dz} = -q. \quad (1)$$

Iz momentnog uslova ravnoteže imamo

$$M_x + qdz \frac{dz}{2} + (T_y + dT_y) dz - (M_x + dM_x) + P \frac{dv}{dz} dz = 0,$$

tj.

$$\frac{dM_x}{dz} - P \frac{dv}{dz} = T_y. \quad (2)$$



Sl. 13:8.

Ograničavajući se na male deformacije grede kod kojih se krivina deformisane ose grede može aproksimirati sa d^2v/dz^2 , imamo

$$EI_x \frac{d^2v}{dz^2} = -M_x. \quad (3)$$

Kombinujući (3) sa (1) i (2) dobijamo:

$$EI_x \frac{d^3v}{dz^3} + P \frac{dv}{dz} = -T_y \quad (4)$$

$$EI_x \frac{d^4v}{dz^4} + P \frac{d^2v}{dz^2} = q. \quad (5)$$

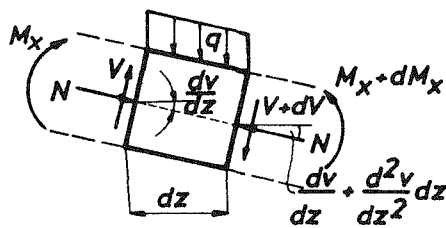
Jednačine (1)–(5) su osnovne diferencijalne jednačine pritisnute savijene grede. Ako je aksijalna sila P jednaka nuli, ove jednačine se svode na ranije izvedene jednačine za savijanje bočnim opterećenjem.

Napomena: Lako je pokazati da je transferzalna sila u presjeku upravnom na deformisanu osu grede (sl. 13:9) jednaka

$$V = T_y + P \frac{dv}{dz},$$

tako da je

$$\frac{dM_x}{dz} = V.$$



Sl. 13:9.

13.2.2. Koncentrisana bočna sila na pritisnutoj gredi

Neka je prosta greda pritisnuta silama P i opterećena bočno koncentrisanom silom F (sl. 13:10). Momenti savijanja lijevo i desno od koncentrisane sile su, respektivno:

$$M_x(z) = \frac{Fa}{l} z + Pv \quad (1)$$

$$M_x(z) = \frac{F(l-a)}{l} (l-z) + Pv, \quad (2)$$

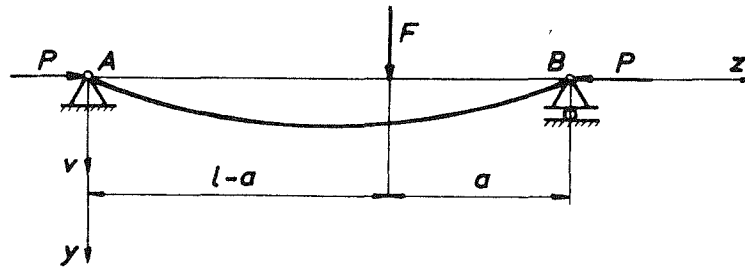
pa su diferencijalne jednačine elastične linije savijene grede:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + k^2v = -\frac{Fa}{EI_x} \frac{z}{l}, \quad 0 \leq z \leq l-a \quad (3)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} + k^2v = -\frac{F(l-a)}{EI_x} \frac{l-z}{l}, \quad l-a \leq z \leq l, \quad (4)$$

gdje je uvedena oznaka

$$k^2 = \frac{P}{EI_x}. \quad (5)$$



Sl. 13:10.

Opšte rješenje jednačina (3) i (4) je:

$$v = A \cos kz + B \sin kz - \frac{Fa}{Pl} z \quad (6)$$

$$v = C \cos kz + D \sin kz - \frac{F(l-a)}{Pl} (l-z). \quad (7)$$

Integracione konstante A , B , C , D određujemo iz uslova da je ugib jednak nuli na krajevima grede (za $z=0$ i $z=l$), i da je ugib i nagib na mjestu $z=l-a$ isti računat s lijeve, odnosno desne strane. Na taj način dobijamo:

$$A=0, \quad C = -D \operatorname{tg} kl \quad (8)$$

$$B = \frac{F \sin ka}{Pk \sin kl}, \quad D = -\frac{F \sin k(l-a)}{Pk \operatorname{tg} kl}.$$

Zamjenom (8) u (6) i (7) dobijamo:

$$v = \frac{F \sin ka}{Pk \sin kl} \sin kz - \frac{Fa}{Pl} z, \quad 0 \leq z \leq l-a \quad (9)$$

$$v = \frac{F \sin k(l-a)}{Pk \sin kl} \sin k(l-z) - \frac{F(l-a)}{Pl} (l-z), \quad l-a \leq z \leq l, \quad (10)$$

što definiše oblik elastične linije pritisnute grede opterećene koncentrisanom bočnom silom.

U specijalnom slučaju kada sila F djeluje na sredini grede, maksimalni ugib grede je

$$v_{\max} = v \left(z = \frac{l}{2} \right) = \frac{F}{2Pk} \left(\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right), \quad (11)$$

odnosno

$$v_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI_x} \frac{3(\operatorname{tg} \theta - \theta)}{\theta^3} = \frac{Fl^3}{48EI_x} \varkappa(\theta), \quad (12)$$

gdje je uvedena oznaka

$$\theta = \frac{kl}{2} = \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI_x}}. \quad (13)$$

Evidentno je iz (12) da prvi faktor $(Fl^3/48EI_x)$ predstavlja ugib grede samo od koncentrisane sile F , dok drugi faktor $(\varkappa(\theta))$ predstavlja uticaj aksijalne sile na ugib. Analizom izraza

$$\varkappa(\theta) = \frac{3(\operatorname{tg} \theta - \theta)}{\theta^3} \quad (14)$$

vidimo ako je sila P mala, tj. θ malo, tada $\varkappa(\theta) \rightarrow 1$. No, ako $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, tj. ako je sila P jednaka

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI_x}{l^2}, \quad (15)$$

tada $\varkappa(\theta) \rightarrow \infty$, tj. pri aksijalnoj sili pritiska datoj sa (15) i najmanja sila F izaziva velike (teorijski beskonačne) ugibe grede. Zato se vrijednost pritisne sile (15) zove kritična vrijednost pritisne sile i označava sa P_{kr} . Činjenica da pri pritisnoj sili $P = P_{kr}$ i najmanja bočna sila F izaziva beskonačno velike ugibe u stvari znači da je pritisnuti ravnotežni položaj grede pod kritičnom silom P_{kr} nestabilan i da greda pri najmanjem bočnom poremećaju napušta ovu nestabilnu konfiguraciju, počinje da se savija (izvija) i uskoro lomi.

Koeficijent θ definisan u (13) možemo sada izraziti, koristeći (15), u obliku

$$\theta = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}}, \quad (16)$$

tj. θ zavisi samo od odnosa P/P_{kr} .

Moment savijanja u gredi dobijamo unoseći nađeni izraz za ugib (9) i (10), u (1), odnosno (2). Za pritisnutu gredu opterećenu koncentrisanom bočnom silom na sredini raspona dobijamo da je maksimalni moment

$$M_{\max} = \frac{Fl \operatorname{tg} \theta}{4} = \frac{Fl}{4} \lambda(\theta). \quad (17)$$

I ovdje prvi faktor ($Fl/4$) predstavlja moment od bočne sile, dok drugi faktor ($\lambda(\theta)$) predstavlja uticaj aksijalne sile na vrijednost maksimalnog momenta. Očigledno je ako $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, tj. $P \rightarrow P_{kr}$, maksimalni moment raste neograničeno bez obzira koliko je mala sila F , jer

$$\lambda(\theta) = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\theta} \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Jasno je, međutim, fizički da se uprkos djelovanju kritične pritisne sile ne mogu javiti beskonačno veliki ugibi, tj. beskonačno veliki moment u gredi. Mi smo dobili beskonačno velike vrijednosti ovih veličina zato što smo koristili aproksimativni izraz za krivinu elastične linije

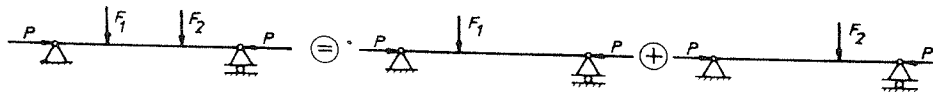
$$\frac{1}{\rho} \cong v'', \quad (19)$$

koji važi samo za male ugibe. No, kada se pritisna sila približava kritičnoj vrijednosti (15), ugibi postaju toliko veliki da se za krivinu elastične linije više ne može koristiti (19), već se mora uzeti tačan izraz za krivinu

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}}, \quad (20)$$

i na osnovu njega formirati diferencijalna jednačina elastične linije. Ukoliko bi tako postupili i prosljedili sa daljom analizom, dobili bismo konačne vrijednosti za ugib, s tim što bismo vidjeli da nakon što smo dostigli kritičnu silu pritiska, ugibi dalje naglo rastu i sa neznatnim porastom pritisne sile.

Očigledno je iz (9) i (10) da je za dato P ugib proporcionalan sa F , ali je nelinearno povezan sa P . Zato se u analizi savijanja pritisnutih greda princip superpozicije može koristiti samo u sljedećem obliku: ugib grede pritisnute silom P i opterećene bočnim silama F_1 i F_2 jednak je zbiru ugiba grede pritisnute silom P i



Sl. 13:11.

opterećene bočnom silom F_1 , i grede pritisnute silom P i opterećene bočnom silom F_2 , kao što je skicirano na sl. 13:11. Naravno, princip superpozicije u odnosu na pritisne sile ne važi.

13.2.3. Kontinualno opterećenje po pritiskutoj gredi

Diferencijalna jednačina elastične linije grede pritisnute silom P i opterećene bočno ravnomjerno raspoređenim opterećenjem q (sl. 13:12) je

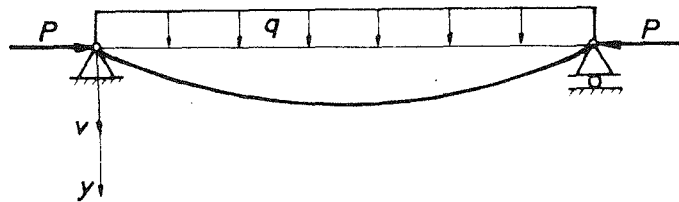
$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} = q, \quad (1)$$

odnosno

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dz^2} = k^2 \frac{q}{P}, \quad (2)$$

gdje je uvedena oznaka

$$k^2 = \frac{P}{EI_x}. \quad (3)$$



Sl. 13:12.

Opšte rješenje jednačine (2) je

$$v = A \sin kz + B \cos kz + Cz + D + \frac{qz^2}{2P}. \quad (4)$$

Integracione konstante A , B , C , D određujemo iz graničnih uslova:

$$v = v'' = 0 \quad \text{za} \quad z = 0 \quad \text{i} \quad z = l, \quad (5)$$

odakle dobijamo:

$$B = -D = \frac{q}{k^2 P}, \quad A = \frac{q}{k^2 P} \frac{1 - \cos kl}{\sin kl}, \quad C = -\frac{ql}{2P}. \quad (6)$$

Maksimalni ugib je na sredini grede

$$v_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI_x} - \frac{12(2 \sec \theta - 2 - \theta^2)}{50^4} \frac{q}{k^2 P}, \quad (7)$$

a maksimalni moment

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{5ql^4}{384EI_x} - \frac{12(2 \sec \theta - 2 - \theta^2)}{50^4} P, \quad (8)$$

pri čemu je, kao i u prethodnom odjeljku,

$$\theta = \frac{1}{2} kl = \frac{1}{2} k \sqrt{\frac{P}{EI_x}}. \quad (9)$$

Očigledno je iz (7) i (8) da v_{\max} i M_{\max} teže u beskonačnost kada $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, tj. kada $P \rightarrow P_{kr}$, pri čemu je opet

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI_x}{l^2}. \quad (10)$$

13.2.4. Savijanje spregovima pritiskute grede

Neka je greda pritiskuta silom P i opterećena spregovima M_A i M_B na osloncima (sl. 13:13). Diferencijalna jednačina elastične linije je

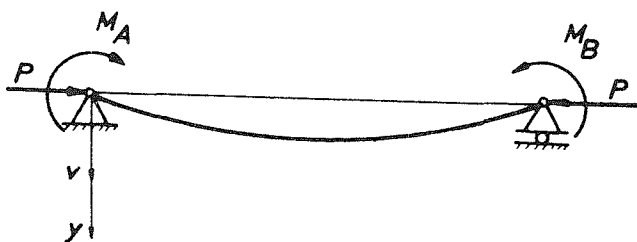
$$\frac{d^4 v}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \quad (1)$$

a granični uslovi:

$$\begin{aligned} z=0 : v=0, \quad v'' &= -\frac{M_A}{EI_x} \\ z=l : v=0, \quad v'' &= -\frac{M_B}{EI_x}, \end{aligned} \quad (2)$$

pa kao rješenje dobijamo

$$v = \frac{M_B}{P} \left(\frac{\sin kz - z}{\sin kl - l} \right) + \frac{M_A}{P} \left[\frac{\sin k(l-z) - l-z}{\sin kl - l} \right]. \quad (3)$$



Sl. 13:13.

U slučaju jednakih spregova ($M_A = M_B = \mathfrak{M}$) imamo

$$v = \frac{\mathfrak{M} l^2}{8EI_x} \frac{2}{\theta^2 \cos \theta} \left[\cos \left(1 - \frac{2z}{l} \right) \theta - \cos \theta \right], \quad (4)$$

tako da je maksimalni ugib

$$v_{\max} = \frac{\mathfrak{M} l^2}{8EI_x} \frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2 \cos \theta}, \quad (5)$$

gdje je

$$\theta = \frac{kl}{2} = \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI_x}}. \quad (6)$$

Lako se dalje nalazi da je maksimalni moment savijanja

$$M_{\max} = \mathfrak{M} \sec \theta. \quad (7)$$

Očigledno je da i u ovom slučaju $v_{\max} \rightarrow \infty$ i $M_{\max} \rightarrow \infty$ kada $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, tj. kada se pritisna sila P približava kritičnoj vrijednosti

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI_x}{l^2}. \quad (8)$$

Dobijene rezultate možemo koristiti i za ekscentrično pritisnutu gredu (sl. 13:14) stavljajući $\mathfrak{M} = P e$, gdje je e ekscentricitet sile. Naravno, ukoliko greda nije vitka, tj. ako je poprečni presjek veliki u odnosu na dužinu grede, ugibi grede su mali u odnosu na ekscentricitet sile e i mogu se zanemariti pri računanju momenta, tj. uzeti da je moment konstantan duž ose grede i jednak $M = P e$. Isti je slučaj i ako je greda vitka, a sila P mala: tada $\theta \rightarrow 0$, tj. $\sec \theta \rightarrow 1$, pa je moment opet konstantan duž ose grede. No, za vitke grede opterećene sa velikom silom P situacija se sasvim mijenja, i ako $P \rightarrow P_{kr}$ maksimalni ugib i moment oboje neograničeno rastu. Zato se pri djeystvu kritične pritisne sile javljaju veliki (neograničeni) ugibi i pri najmanjem ekscentricitetu sile, što u stvari znači nestabilan ravnotežni položaj grede pritisnute kritičnom silom.



Sl. 13:14.

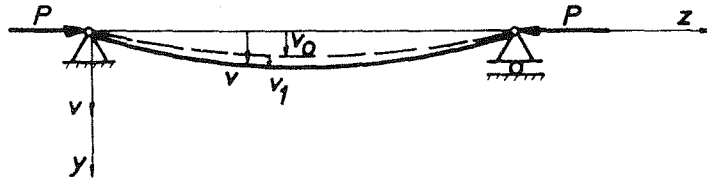
Napomena: U praktičnim proračunima maksimalnog ugiba pritisnute grede bočno opterećene (silom, spregovima ili kontinualnim opterećenjem) može se koristiti približan izraz

$$v_{\max} = v_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{kr}}}, \quad (9)$$

gdje je v_0 maksimalni ugib od bočnog opterećenja bez pritisne sile. Izraz (9) je dovoljno tačan pod uslovom da P/P_{kr} nije suviše veliko. Na primjer, za $\frac{P}{P_{kr}} < 0,6$ greška u korišćenju izraza (9) je manja od 2%.

13.2.5. Uticaj početne krivine na ponašanje pritisnute grede

Ako se greda koja ima malu početnu krivinu u neopterećenoj konfiguraciji optereti samo poprečnim (bočnim) silama, mala početna zakrivljenost grede nema uticaja na dalje savijanje grede, i njen ukupni ugib dobijamo sabiranjem početnog ugiba (v_0) sa ugibom usljed savijanja silama sračunatog za pravu gredu (v_1). Ako je, međutim, greda sa početnom krivinom opterećena na pritisak silama P (sl. 13:15),



Sl. 13:15.

tada početna krivina ima značajan uticaj na dalje ponašanje, tj. ugib grede. Pretpostavimo, na primjer, da je početni oblik ose grede dat sa

$$v_0 = a \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (1)$$

gdje je a početni ugib na sredini grede. Pod djelstvom sile P javlja se dodatni ugib v_1 , tako da je ukupan ugib

$$v = v_0 + v_1. \quad (2)$$

Dodatni ugib v_1 povezan je sa momentom savijanja

$$M_x = P (v_0 + v_1) \quad (3)$$

preko diferencijalne jednačine

$$EI_x \frac{d^2 v_1}{dz^2} = -P (v_0 + v_1), \quad (4)$$

odakle je

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} + k^2 v_1 = -k^2 a \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (5)$$

uz ranije uvedenu oznaku

$$k^2 = \frac{P}{EI_x}. \quad (6)$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine (5) je

$$v_1 = A \sin kz + B \cos kz + \frac{\alpha}{1-\alpha} a \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (7)$$

gdje je uvedena oznaka

$$\alpha = \frac{k^2 l^2}{\pi^2} = \frac{P}{P_{kr}}. \quad (8)$$

Iz graničnih uslova:

$$v=0 \quad \text{za} \quad z=0 \quad \text{i} \quad z=l \quad (9)$$

dalje slijedi da je $A=B=0$, tako da ostaje

$$v_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} a \sin \frac{\pi}{l} z. \quad (10)$$

Ukupan ugib je

$$v = v_0 + v_1 = \frac{a}{1-\alpha} \sin \frac{\pi}{l} z. \quad (11)$$

Maksimalni ugib se javlja na sredini grede i iznosi

$$v_{\max} = \frac{a}{1-\alpha}, \quad (12)$$

tj. početni ugib a je uvećan $\frac{1}{1-\alpha}$ puta. Jasno je sada ako $\alpha \rightarrow 1$, tj. ako $P \rightarrow P_{kr}$, gdje je

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI_x}{l^2}, \quad (13)$$

maksimalni ugib neograničeno raste, bez obzira koliko je mali ugib a usljed početne zakrivljenosti grede. Zato se pritiska sila definisana sa (13) i ovdje naziva kritična sila pritiska, jer se pri njoj i usljed najmanje nepravilnosti u geometriji grede (tj. njene zakrivljenosti koja nastaje, recimo, pri izradi grede) javljaju neograničeni ugibi, tj. slom grede. Ponovo, dakle, dolazimo do zaključka da je pravolinijski ravnotežni položaj grede pritisnute kritičnom silom nestabilan, jer i najmanji poremećaj u geometriji grede (mala zakrivljenost grede) vodi neograničenim ugibima i slomu grede.

Primjeri

U narednih nekoliko primjera ilustrovaćemo primjenu teorije pritisnute savijene grede sa akcentom na određivanju maksimalnog normalnog napona u gredi, dimenzionisanju grede i određivanju dijagrama presječnih sila u gredi.

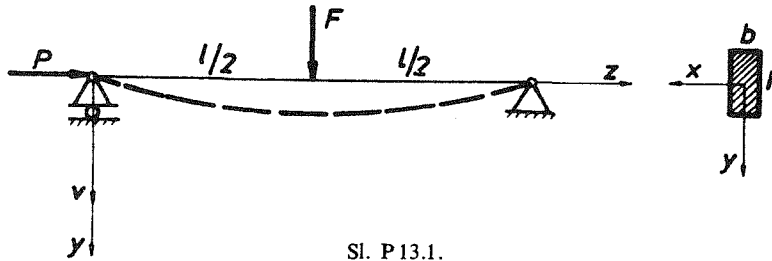
Primjer 13.1.

Za nosač na slici odrediti maksimalni ugib i maksimalni normalni napon uzimajući u obzir uticaj aksijalne sile na savijanje. Dato je: $P=8 \text{ kN}$, $F=1 \text{ kN}$, $l=2 \text{ m}$, $b \times h=2 \times 4 \text{ cm}$, $E=20 \text{ MN/cm}^2$.

Rješenje:

Maksimalni ugib dobićemo iz izraza (13.2.4:9)

$$v_{\max} = v_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{kr}}}, \quad (a)$$



Sl. P 13.1.

gdje je:

$$v_0 = \frac{Fl^3}{48EI_x} = 0,781 \text{ cm}, \quad P_{kr} = \pi^2 \frac{EI_x}{l^2} = 53,33 \text{ kN}, \quad \frac{P}{P_{kr}} = 0,15,$$

tako da je

$$v_{\max} = 0,781 \frac{1}{1 - 0,15} = 0,919 \text{ cm}.$$

Očigledno, $v_0 = 85\% v_{\max}$. Maksimalni normalni napon dobijamo iz izraza

pri čemu je: $\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{W_x}$, (napon potiska)

$$M_{\max} = \frac{Fl}{4} + P v_{\max} = 57,35 \text{ kNcm}, \quad A = 8 \text{ cm}^2, \quad W_x = \frac{16}{3} \text{ cm}^3,$$

pa je

$$\sigma_{\max} = \frac{8}{8} + \frac{57,35}{\frac{16}{3}} = 11,75 \text{ kN/cm}^2.$$

Vrijednost maksimalnog napona sračunata bez uticaja aksijalne sile na moment je

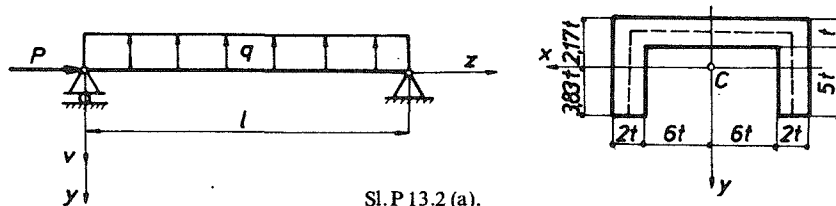
$$\frac{Fl}{4} + \frac{P}{A} = 10,38 = 88\% \sigma_{\max}.$$

Napomena: Umjesto približnog izraza (a) za v_{\max} mogli smo koristiti i tačan izraz (13.2.2: 12)

$$v_{\max} = v_0 \frac{3(\operatorname{tg} \theta - \theta)}{\theta^3}, \quad \theta = \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI_x}}.$$

Primjer 13.2.

Uzimajući u obzir uticaj aksijalne sile na savijanje, dimenzionisati nosač na sl. P 13.2(a). Aksijalna sila P jednaka je četvrtini kritične pritisne sile. Dato je: $q = 20 \text{ kN/m}$, $l = 6 \text{ m}$, $E = 20 \text{ MN/cm}^2$, $\sigma_d = 14 \text{ kN/cm}^2$.



Sl. P 13.2(a).

Rješenje:

Karakteristike poprečnog presjeka grede su: $A = 36t^2$, $I_x = 123t^4$, $W_x = 32t^3$. Dimenzionisanje vršimo iz uslova $\sigma_{\max} \leq \sigma_d$, gdje je:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{W_x}$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + P v_{\max}, \quad v_{\max} = v_0 \frac{12(2 \sec \theta - 2 - \theta^2)}{5\theta^4}$$

$$v_0 = \frac{5ql^4}{384EI_x} = 137,2t^{-4}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}} = \frac{\pi}{4}$$

Zamjenom brojnih vrijednosti dobijamo:

$$v_{\max} = 137,2t^{-4} \cdot 1,3345 = 183,1t^{-4}, \quad v_0 = 75\% v_{\max}$$

$$P = \frac{1}{4} P_{kr} = \frac{1}{4} \pi^2 \frac{EI_x}{l^2} = 16,86t^4$$

$$M_{\max} = 9000 + 3087 = 12\,087 \text{ kNcm}, \quad M_0 = \frac{ql^2}{8} = 9000 = 74,5\% M_{\max},$$

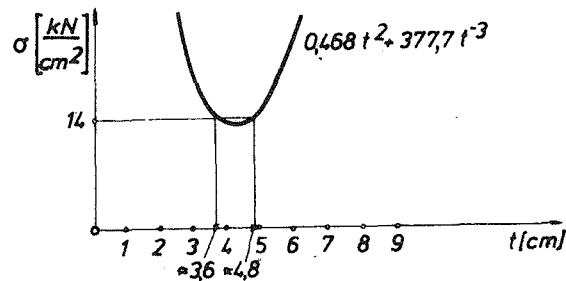
pa je

$$\sigma_{\max} = \frac{16,86t^4}{36t^2} + \frac{12\,087}{32t^3} \leq 14,$$

tj.

$$0,468t^2 + 377,7t^{-3} \leq 14. \quad (\text{a})$$

Rješenje nejednačine (a) dobićemo grafički kao što je prikazano na sl. P 13.2 (b). Sa sl. P 13.2 (b) vidimo da je nejednakost (a) zadovoljena u intervalu $t \in [3, 6; 4, 8]$, pa

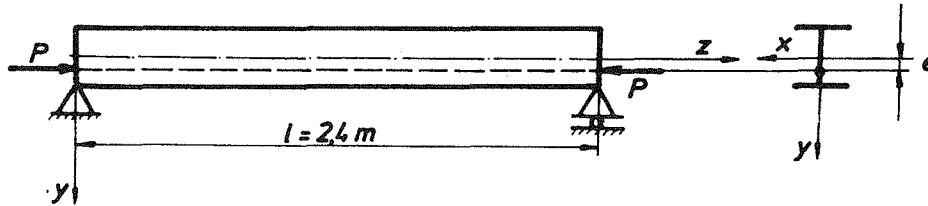


Sl. P 13.2 (b).

usvajamo, recimo, $t = 4$ cm. Korespondentna pritisna sila je $P = 16,86 \cdot 4^4 = 4316 \text{ kN} = 4,3 \text{ MN}$.

Primjer 13.3.

Provjeriti otpornost nosača na sl. P 13.3. Profil nosača je I20. Poznato, je: $P = 250 \text{ kN}$, $e = 6,5 \text{ cm}$, $\sigma_d = 16 \text{ kN/cm}^2$, $E = 20 \text{ MN/cm}^2$.



Sl. P 13.3.

Rješenje:

Karakteristike profila I 20 su: $A = 33,5 \text{ cm}^2$, $I_x = 2140 \text{ cm}^4$, $y_{\max} = 10 \text{ cm}$, $i_x = 8 \text{ cm}$. Provjeru otpornosti nosača vršimo iz zahtjeva $\sigma_{\max} \leq \sigma_d$, gdje je:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{I_x} y_{\max} \quad (\text{max. napon pritiska}),$$

$$M_{\max} = \mathfrak{M} \sec \theta, \quad \mathfrak{M} = P e, \quad \theta = \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI_x}}.$$

Dakle,

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{\mathfrak{M} \sec \theta}{I_x} y_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e y_{\max}}{i_x^2} \sec \left(\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI_x}} \right) \right]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e y_{\max}}{i_x^2} \sec \left(\frac{l}{2 i_x} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]. \quad (\text{a})$$

Formula (a) naziva se sekantna formula. Zamjenom brojnih vrijednosti dobijamo

$$\sigma_{\max} = 15,37 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < \sigma_d = 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2},$$

tj. nosač zadovoljava provjeru otpornosti.

Primjer 13.4.

Uzimajući u obzir uticaj aksijalne sile na savijanje, nacrtati dijagrame pre-sječnih sila konzole na sl. P 13.4 (a). Dato je: F , l , EI_x , $P = \frac{1}{16} \pi^2 \frac{EI_x}{l^2}$.

Rješenje:

Diferencijalna jednačina elastične linije je

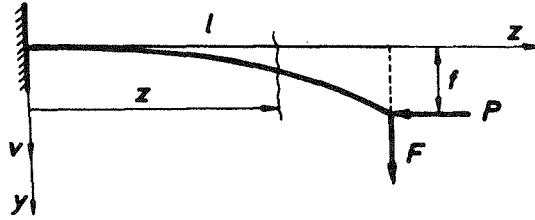
$$EI_x v'' = -M_x(z),$$

$$M_x(z) = -F(l-z) - P(f-v),$$

tj.

$$v'' + k^2 v = k^2 \left[\frac{F}{P}(l-z) + f \right],$$

$$k^2 = \frac{P}{EI_x},$$



Sl. P 13.4 (a).

čijom integracijom dobijamo

$$v = A \cos kz + B \sin kz + \frac{F}{P}(l-z) + f.$$

Integracione konstante određujemo iz graničnih uslova:

$$v(0) = v'(0) = 0, \quad v(l) = f \Rightarrow A = -\left(\frac{F}{P}l + f\right), \quad B = \frac{1}{k} \frac{F}{P}, \quad f = \frac{F}{P} \left(\frac{\operatorname{tg} kl}{k} - l\right),$$

tako da je

$$v = \frac{1}{k} \frac{F}{P} (\sin kz - \operatorname{tg} kl \cos kz) + \frac{F}{P}(l-z) + f.$$

Moment savijanja u konzoli je

$$M_x(z) = -EI_x v'' = -Fl \frac{\operatorname{tg} kl \cos kz - \sin kz}{kl},$$

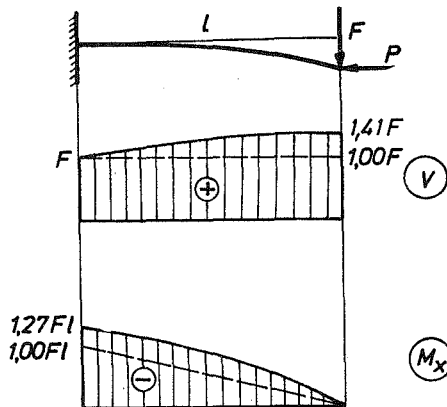
a transferzalna sila

$$V(z) = \frac{dM_x}{dz} = F (\cos kz + \operatorname{tg} kl \sin kz).$$

Kako je $kl = \sqrt{\frac{P}{EI_x}} l = \frac{\pi}{4}$, dobijamo konačno:

$$M_x(z) = -1,27Fl \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} \frac{z}{l}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{z}{l}\right) \right)$$

$$V(z) = F \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} \frac{z}{l}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{z}{l}\right) \right)$$



Sl. P 13.4 (b).

što je dijagramski prikazano na sl. P 13.4 (b). Crtkano su naznačeni dijagrami koji se dobijaju kada se zanemari uticaj aksijalne sile P na savijanje.

13.3. Izvijanje grede

U prethodnom poglavlju smo vidjeli da ukoliko aksijalna sila pritiska dostigne kritičnu vrijednost, dovoljna je i najmanja poprečna sila ili ekscentričnost u djejtvu aksijalne sile, kao i najmanja početna zakrivljenost grede, pa da se jave veliki (neograničeni) ugibi i deformacije. Ovo je, u stvari, posljedica fenomena nestabilnosti pritisnutog grednog nosača. Naime, ako se idealno prav štap optereti na pritisak silom koja je manja od kritične, on ostaje prav i trpi samo aksijalnu kompresiju. Pri tome je štap u položaju stabilne ravnoteže, što znači ako na njega djelujemo bočnom silom i izazovemo bočna pomjeranja, ova pomjeranja nestaju sa uklanjanjem bočne sile, tj. štap se vraća u prvobitni pravi položaj. Ako, međutim, pritisna sila raste i dostigne kritičnu vrijednost, ravnoteža štapa, tj. pravolinijski deformisani oblik štapa prestaje da bude stabilan. Bočna sila izazvaće ugibe koji ostaju i nakon uklanjanja bočne sile, tj. štap se ne vraća u prvobitni pravi oblik. Kritična sila se zato može definisati i kao sila pritiska koja je dovoljna da održi štap u savijenom ravnotežnom položaju (sl. 13:16). Gubljenje stabilnosti pravolinijskog ravnotežnog položaja pritisnutog štapa pri djejtvu kritične sile pritiska, tj. prelazak štapa u savijeni ravnotežni oblik, nazivamo izvijanje pritisnutog štapa (ili grednog nosača). Kritična sila pritiska pri kojoj se javlja izvijanje zove se kritična sila izvijanja.

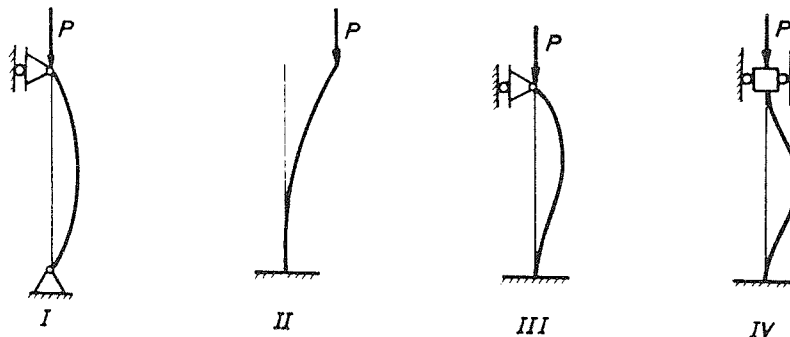


Sl. 13:16.

Jasno je iz izraza za kritičnu silu koji su izvedeni u prethodnom poglavlju da veličina kritične sile ne zavisi od vrste i veličine bočnog opterećenja koje može djelovati na grednom nosaču. Veličina kritične sile, međutim, zavisi od graničnih uslova, tj. načina oslanjanja grede. Da bismo ovo pokazali, posmatračemo četiri karakteristična slučaja oslanjanja grede i izvesti izraze za korespondentne kritične sile izvijanja. Ove slučajeve je svojevremeno prvi proučavao Euler, pa se nazivaju osnovni Eulerovi slučajevi izvijanja grednog nosača.

13.3.1. Osnovni Eulerovi slučajevi izvijanja

U zavisnosti od načina oslanjanja grednog nosača, razlikujemo četiri osnovna (karakteristična) slučaja izvijanja, koja su prikazana na sl. 13:17. Naš je zadatak da za svaki od njih odredimo kritičnu silu pri kojoj dolazi do izvijanja.



Sl. 13:17.

1. Greda zglavkasto oslonjena na oba kraja

Posmatrajmo gredu zglavkasto oslonjenu na oba kraja koja se pod dejstvom kritične sile P nalazi u izvijenom ravnotežnom položaju (sl. 13:18). Moment savijanja u presjeku na udaljenju z od donjeg oslonca je

$$M = P v, \quad (1)$$

gdje je v ugib grede, tj. ordinata elastične linije izvijene grede. Diferencijalna jednačina elastične linije je onda

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -P v, \quad (2)$$

gdje je I minimalni moment inercije poprečnog presjeka grede ($I = I_{\min}$), s obzirom da će se pri izvijanju greda izviti u ravni minimalne krutosti na savijanje. Uvodeći oznaku

$$k^2 = \frac{P}{EI}, \quad (3)$$

diferencijalna jednačina (2) postaje

$$v'' + k^2 v = 0. \quad (4)$$

Opšte rješenje ove jednačine je

$$v = A \cos kz + B \sin kz, \quad (5)$$

gdje su A i B integracione konstante koje određujemo iz graničnih uslova:

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0. \quad (6)$$

Iz prvog od graničnih uslova (6) slijedi da je $A = 0$, a iz drugog slijedi

$$B \sin kl = 0, \quad (7)$$

odakle mora biti ili $B = 0$ ili $\sin kl = 0$. No, ako je $B = 0$, nema ugiba, pa, dakle, ni izvijanja. Zato mora biti $\sin kl = 0$ (ukoliko se nosač izvio), tj.

$$kl = n\pi, \quad (8)$$

gdje je $n = 1, 2, 3, \dots$ Jednačina elastične linije je

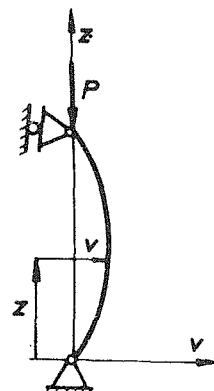
$$v = B \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad (9)$$

što je prikazano na sl. 13:19 za razne vrijednosti n . Svakom od ovih oblika elastične linije odgovara vrijednost kritične sile izvijanja prema obrascu

$$P_{kr} = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (10)$$

koji dobijamo ako (8) unesemo u (3). Ukoliko bočno pomjeranje nekih tačaka duž ose grede nije spriječeno, jasno je da će do izvijanja doći pri najmanjoj vrijednosti kritične sile, koja se dobija iz (10) za $n = 1$

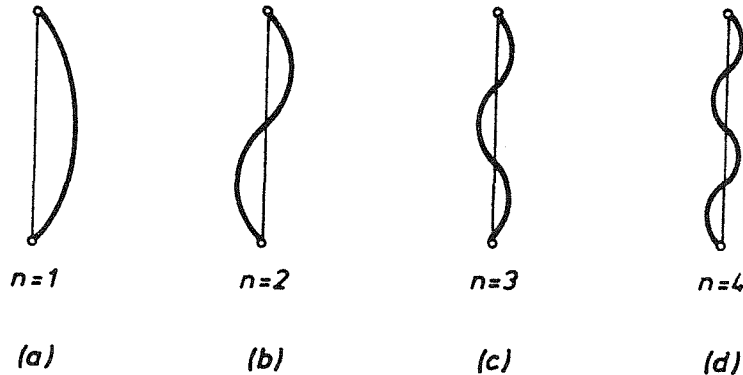
$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}, \quad (11)$$



Sl. 13:18.

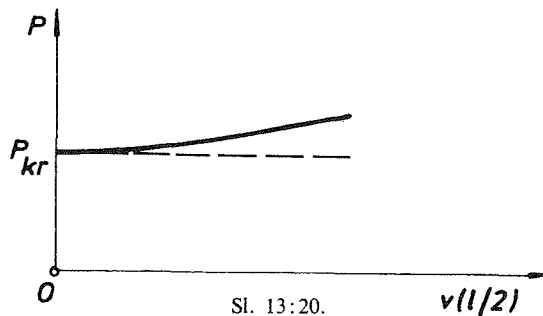
a štapa će se izviti kao na sl. 13:19 (a), tj. saglasno jednačini

$$v = B \sin \frac{\pi}{l} z. \quad (12)$$



Sl. 13:19.

Pri ovome je konstanta $B = v \left(\frac{l}{2} \right)$ u (12) neodređena i može imati bilo koju vrijednost u okviru ograničenja na mala pomjeranja. Ovo je posljedica korišćenja aproksimativnog izraza za krivinu elastične linije $\left(\frac{1}{\rho} \cong v'' \right)$ u diferencijalnoj jednačini (2). Da smo koristili tačan izraz za krivinu (13.2.2:20), dobili bismo nelinearnu diferencijalnu jednačinu elastične linije čijom integracijom slijede jednoznačne



Sl. 13:20.

vrijednosti ugiba $v \left(\frac{l}{2} \right)$ za sve vrijednosti pritisne sile P . Ovo rješenje, međutim, pokazuje da nakon što sila P dostigne kritičnu vrijednost (11), ugibi naglo rastu i sa neznatnim porastom sile (sl. 13:20), što objašnjava neodređenost dobijenu u linearnoj teoriji (crtkano prikazano na sl. 13:20).

II. Greda ukliještena na jednom kraju

Neka je konzola pritisnuta kritičnom silom izvijanja prešla u izvijeni položaj kao što je prikazano na sl. 13:21. Nađimo vrijednost korespondentne kritične sile. Moment savijanja u proizvoljnom poprečnom presjeku grede je

$$M = -P(f-v), \quad (13)$$

gdje je sa f označen ugib na kraju konzole. Diferencijalna jednačina elastične linije je

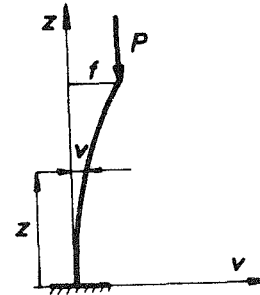
$$EI v'' = P(f - v), \quad (14)$$

tj.

$$v'' + k^2 v = k^2 f, \quad (15)$$

gdje je, kao i prije,

$$k^2 = \frac{P}{EI}. \quad (16)$$



Sl. 13:21.

Opšte rješenje diferencijalne jednačine (15) je

$$v = A \cos kz + B \sin kz + f. \quad (17)$$

Integracione konstante A i B određujemo iz graničnih uslova:

$$v(0) = v'(0) = 0, \quad (18)$$

što daje $A = -f$, $B = 0$. Dakle,

$$v = f(1 - \cos kz). \quad (19)$$

Na gornjem kraju konzole mora biti $v = f$. Ovo je zadovoljeno ako je

$$\cos kl = 0, \quad (20)$$

tj.

$$kl = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad (21)$$

gdje je $n = 1, 2, 3, \dots$, što definiše, preko (16), kritičnu silu izvijanja. Izvijanje će se dogoditi pri najnižoj vrijednosti kritične sile koja se dobija iz (21) za $n = 1$. Dakle,

$$kl = \frac{\pi}{2}, \quad (22)$$

i

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{(2l)^2}. \quad (23)$$

Jednačina elastične linije je

$$v = f \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l} z \right), \quad (24)$$

pri čemu je, iz ranije diskutovanih razloga, f neodređeno i može imati bilo koju vrijednost u okviru malih pomjeranja.

III. Greda ukliještena na jednom i zglavkasto oslonjena na drugom kraju

Ovaj slučaj izvijanja prikazan je na sl. 13:22. Sa Y je označena reakcija u osloncu na gornjem kraju grede. Moment savijanja presjeka na udaljenju z od ukliještenja je

$$M = P v - Y (l - z), \quad (25)$$

pa je diferencijalna jednačina elastične linije

$$v'' + k^2 v = + k^2 \frac{Y}{P} (l - z) \quad (26)$$

uz ranije uvedenu oznaku za k^2 . Opšte rješenje jednačine (26) je

$$v = A \cos kz + B \sin kz + \frac{Y}{P} (l - z), \quad (27)$$

pri čemu integracione konstante A i B određujemo iz graničnih uslova:

$$v(0) = v'(0) = 0. \quad (28)$$

Iz njih dobijamo:

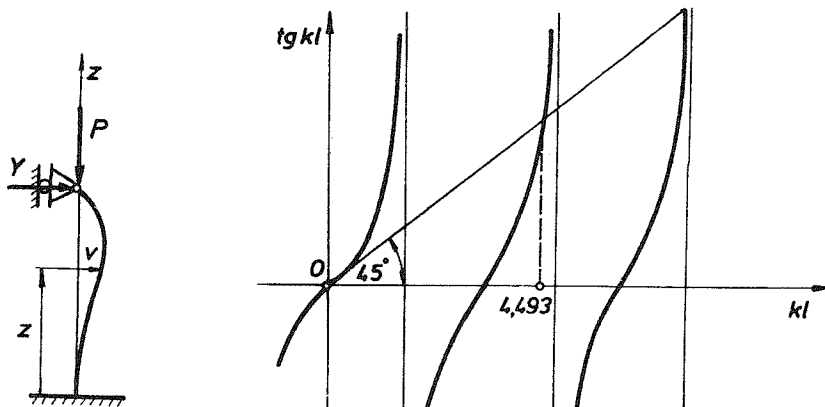
$$A = -\frac{Y}{P} l, \quad B = +\frac{Y}{kP}, \quad (29)$$

tako da je

$$v = \frac{Yl}{P} \left[-\cos kz + \frac{1}{kl} \sin kz + \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right]. \quad (30)$$

Iz preostalog graničnog uslova

$$v(l) = 0 \quad (31)$$



Sl. 13 : 23.

sada slijedi da mora biti

$$\operatorname{tg} kl = kl, \quad (32)$$

što definiše kritičnu silu izvijanja. Rješenje transcendentne jednačine (32) možemo dobiti grafičkim putem kao što je prikazano na sl. 13:23. Najniži pozitivan korijen jednačine (32) je

$$kl = 4,493, \quad (33)$$

čemu odgovara kritična sila izvijanja

$$P_{kr} = 20,19 \frac{EI}{l^2} = \pi^2 \frac{EI}{(0,7l)^2}. \quad (34)$$

IV. Greda uklještena na oba kraja

Ovaj slučaj izvijanja prikazan je na sl. 13:24. Neka je M_0 reaktivni moment u uklještenju, tada je moment savijanja u proizvoljnom poprečnom presjeku

$$M = Pv - M_0, \quad (35)$$

a diferencijalna jednačina elastične linije izvijene grede

$$v'' + k^2v = k^2 \frac{M_0}{P}. \quad (36)$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine (36) je

$$v = A \cos kz + B \sin kz + \frac{M_0}{P}. \quad (37)$$

Integracione konstante A i B dobijamo iz graničnih uslova:

$$v(0) = v'(0) = 0. \quad (38)$$

što daje $A = -\frac{M_0}{P}$ i $B = 0$, pa je

$$v = \frac{M_0}{P} (1 - \cos kz). \quad (39)$$

Iz preostala dva granična uslova:

$$v(l) = v'(l) = 0 \quad (40)$$

slijedi da mora biti:

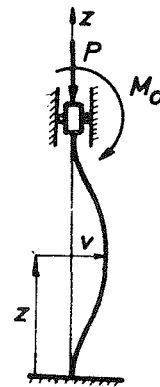
$$1 - \cos kl = 0, \quad \sin kl = 0, \quad (41)$$

što je zadovoljeno za

$$kl = 2n\pi, \quad (42)$$

gdje je $n = 1, 2, 3, \dots$. Najnižu vrijednost kritične sile dobijamo za $n = 1$

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{(0,5l)^2}. \quad (43)$$



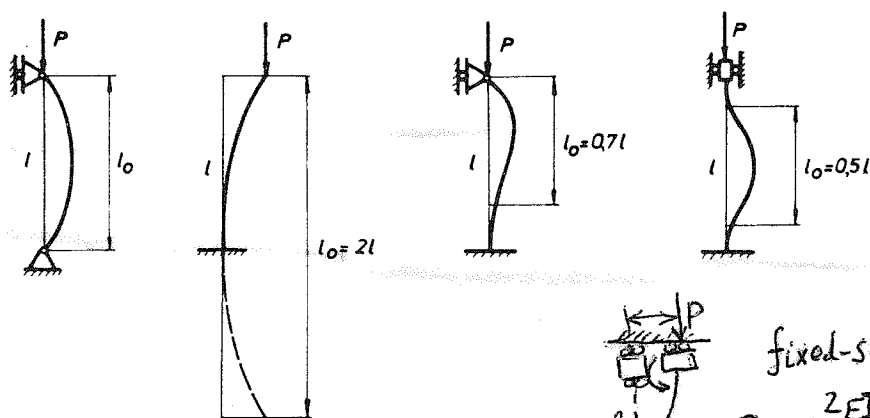
Sl. 13:24:

13.3.2. Slobodna dužina izvijanja

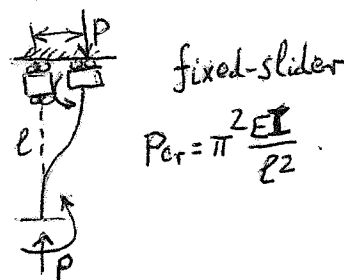
Ako uporedimo četiri osnovna Eulerova slučaja izvijanja, možemo uočiti da se u sva četiri slučaja kritična sila može izraziti u obliku

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}, \quad (1)$$

gdje je $l_0 = \mu l$, a koeficijent μ redom jednak: $\mu = 1$ u I slučaju, $\mu = 2$ u II slučaju, $\mu = 0,7$ u III slučaju i $\mu = 0,5$ u IV slučaju. Dužina l_0 naziva se slobodna ili redukovana dužina izvijanja grednog nosača za dato oslanjanje njegovih krajeva. Fizički smisao slobodne dužine izvijanja je jasan sa sl. 13:25. To je dužina između krajeva polutalasa sinusoide, tj. prevojnih tačaka elastične linije grede, u kojima je moment jednak nuli, tako da se polutalasa između tih tačaka nalazi u istim uslovima kao i greda sa zglavkasto oslonjenim krajevima. Zato se kritična sila izvijanja u slučaju bilo kog oslanjanja grede na krajevima može odrediti iz (1) unoseći odgovarajuću slobodnu dužinu izvijanja l_0 .



Sl. 13:25.



13.3.3. Dimenzionisanje prema izvijanju

Kao što smo vidjeli, kritična sila izvijanja pritisnute grede je

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}, \quad (1)$$

gdje je l_0 slobodna (redukovana) dužina izvijanja koja zavisi od načina oslanjanja grede. Napon koji odgovara kritičnoj sili izvijanja je kritični napon izvijanja

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}, \quad (2)$$

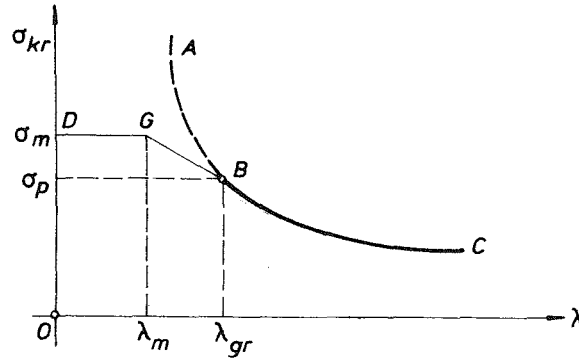
gdje je

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (3)$$

tzv. vitkost grede. U (3) je

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (4)$$

minimalni poluprečnik inercije poprečnog presjeka grede. Dakle, kritični napon pri kome se javlja izvijanje zavisi samo od modula elastičnosti i vitkosti grede. Grafički je ova zavisnost prikazana na sl. 13:26. Kriva ABC koja odgovara relaciji (2) naziva se Eulerova kriva. Kriva je, međutim, fizički važeća samo na dijelu BC gdje je σ_{kr} manje od granice proporcionalnosti materijala, jer smo pretpostavljali da se izvijanje događa na linearno elastičan način, tj. uz važenje Hookeovog zakona. Graničnu vrijednost za λ ispod koje Eulerova kriva ne važi dobijamo iz



Sl. 13:26.

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (5)$$

Na primjer, za čelik sa $\sigma_p = 21 \text{ kN/cm}^2$ i $E = 21 \text{ MN/cm}^2$ dobijamo $\lambda_{gr} \cong 100$. (Za liveno gvožđe je $\lambda_{gr} = 80$, za drvo je $\lambda_{gr} = 70$, itd.).

Ako je $\lambda < \lambda_{gr}$, plastična deformacija (tj. nelinearno ponašanje) počinje prije nego dođe do elastičnog izvijanja grede. Ako je vitkost grede veoma mala, tj. ako je u pitanju kratka greda, do izvijanja uopšte neće doći već će se sa porastom sile pritiska greda slomiti usljed prekoračenja njene izdržljivosti, tj. otpornosti materijala. Neka je σ_m maksimalni napon koji materijal grede može da izdrži a da ne dođe do njegovog sloma (u smislu plastičnog tečenja za žilave, odnosno loma za krte materijale), tada prava linija DG predstavlja kritični napon za kratke grede. Za grede srednje dužine ($\lambda_m < \lambda < \lambda_{gr}$) do sloma dolazi usljed plastičnog (nelinearnog) izvijanja grede. Problem plastičnog izvijanja grede je suviše komplikovan, no je za praktične svrhe ponekad dovoljno smatrati da je kritični napon u ovom domenu definisan sa pravom linijom koja spaja tačke G i B. Ova prava se naziva Tetmajerova prava, i njena jednačina je

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda, \quad (6)$$

gdje vrijednosti koeficijenata a i b zavise od vrste materijala i određuju se eksperimentalno. Na primjer, za ranije pomenuti čelik je $a = 46,9$ i $b = 0,262 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$, pri čemu (6) važi u opsegu vitkosti $60 < \lambda < 100$. Za $\lambda < 60$ uzima se $\sigma_{kr} = \sigma_T$, gdje je σ_T napon na granici tečenja (gnječenja) materijala (za pomenuti čelik je $\sigma_T = 31,2 \text{ kN/cm}^2$), tabela 13:1.

Tabela 13:1 – (Eksperimentalni obrasci za kritičan napon izvijanja σ_{kr})

Materijal	λ_m	λ_{gr}	σ_{kr} [kN/cm ²]	
			$0 < \lambda < \lambda_m$	$\lambda_m < \lambda < \lambda_{gr}$
Čelik (JUS Č.0370)	60	100	24	$28,9 - 0,082\lambda$
Čelik (JUS Č.0545)	60	100	31,2	$46,9 - 0,262\lambda$
Liveno gvoždje	0	80	76,1	$76,1 - 1,18\lambda + 0,0052\lambda^2$
Drvo (četinari)	0	60	4	$4 - 0,02\lambda$

Tabela 13:2. – (Vrijednosti koeficijenta izvijanja ω)

Materijal	λ										
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Č.0370	1,00	1,02	1,04	1,08	1,14	1,21	1,30	1,41	1,55	1,71	1,90
Č.0545	1,00	1,03	1,06	1,11	1,19	1,28	1,41	1,58	1,79	2,05	2,53
Liveno gvoždje	1,00	1,01	1,05	1,11	1,22	1,39	1,67	2,21	3,50	4,43	5,45
Drvo	1,00	1,01	1,03	1,08	1,14	1,24	1,42	1,64	2,07	2,62	3,22

Tabela 13:2. – (nastavak) (Vrijednosti koeficijenta izvijanja ω)

Materijal	λ										
	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
Č.0370	2,11	2,43	2,85	3,31	3,80	4,32	4,88	5,47	6,10	6,75	
Č.0545	3,06	3,65	4,28	4,96	5,70	6,48	7,32	8,21	9,14	10,13	
Liveno gvoždje	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
Drvo	3,90	4,64	5,45	6,31	7,25	8,25	9,32	-	-	-	

Prema tome, dobili smo liniju *DGBC* koja definiše kritični napon za pritisnutu gredu u čitavom opsegu vitkosti grede. Zbog uvijek prisutne nepravilnosti u geometriji i materijalu grede, necentričnom djejestvu pritisne sile i sl., uvodimo koeficijent sigurnosti protiv izvijanja (n_{izv}), tako da je dozvoljeni napon u gredi koji najviše smijemo dopustiti da ne dođe do izvijanja

$$\sigma_{izv} = \frac{\sigma_{kr}}{n_{izv}} \quad (7)$$

Dakle, pri dimenzionisanju pritisnute grede zahtijevamo da je

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{izv} = \frac{\sigma_{kr}}{n_{izv}} \quad (8)$$

Koeficijent sigurnosti protiv izvijanja n_{izv} zavisi od vitkosti grede i uzima se veći što je veća vitkost. Za čelik se uzima $n_{izv} = 1,5 - 3$, za liveno gvoždje $n_{izv} = 4,5 - 5,5$, za drvo $n_{izv} = 2,5 - 3,5$, itd.

Često se, međutim, umjesto korišćenja (8) dimenzionisanje grednog nosača na izvijanje vrši pomoću tzv. ω postupka. Po ovom postupku uzima se da je

$$\sigma_{izv} = \frac{\sigma_d}{\omega}, \quad (9)$$

gdje je σ_d dozvoljeni napon pritiska koji imamo u slučaju kada nema opasnosti od izvijanja, a $\omega (>1)$ je koeficijent izvijanja koji zavisi od vitkosti grede i koji je za razne materijale eksperimentalno određen (tabela 13:2). Prema tome, dimenzionisanje po ω postupku vrši se prosto zahtijevajući da je

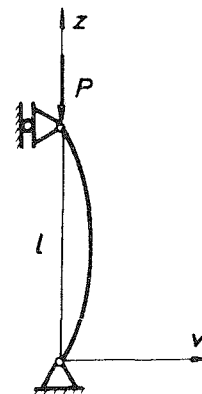
$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_d}{\omega}, \quad (10)$$

dakle, bez korišćenja kritičnog napona definisanog krivom *DGBC* na sl. 13:26. Jedino se za datu vitkost odabere korespondentno ω i zahtijeva (10). (U nekim tabelama je umjesto veličine ω data je veličina $\phi = \frac{1}{\omega}$, tako da je $\sigma_{izr} = \phi \sigma_d$).

Međutim, problem pri dimenzionisanju grednog nosača na izvijanje je što se najčešće ne znaju dimenzije poprečnog presjeka grede, pa se ne može unaprijed odrediti vitkost λ , pa prema tome niti σ_{kr} niti ω , koji figurišu u (8), odnosno (10). Zato se dimenzionisanje u takvim slučajevima vrši iz nekoliko puta, pretpostavljajući i provjerom, kao što je ilustrovano u primjeru 13.12.

13.3.4. Određivanje kritične sile izvijanja metodom potencijalne energije

Vidjeli smo da je pravi oblik pritisnutog štapa stabilni oblik ravnoteže ako je sila pritiska mala i da on postaje nestabilan kada sila pritiska dostigne kritičnu vrijednost pri kojoj počinje izvijanje. Kritičnu vrijednost sile izvijanja možemo naći i posmatranjem potencijalne energije sistema. Poznato je da sistem u stabilnom ravnotežnom položaju ima minimum svoje potencijalne energije. Pritisnuti štap će zato biti u stabilnom ravnotežnom položaju ako je pozitivan priraštaj potencijalne energije sistema koji odgovara prelasku štapa iz pravog u savijeni položaj. Ako je taj priraštaj negativan, ravnotežni položaj štapa je nestabilan. Prema tome, kritičnu vrijednost sile izvijanja pritisnutog štapa koja odgovara prelasku ravnotežne konfiguracije iz stabilne u nestabilnu određujemo iz uslova da je priraštaj potencijalne energije jednak nuli. Posmatrajmo, na primjer, zglavkasto oslonjen pritisnuti štap (sl. 13:27). Priraštaj potencijalne energije koji odgovara prelasku štapa iz pravog u savijeni položaj sastoji se iz dva dijela: priraštaja potencijalne energije unutrašnjih sila i potencijalne energije pritiskne sile P . Priraštaj potencijalne energije unutrašnjih sila jednak je deformacionom radu akumuliranom u gredi



Sl. 13:27.

usljed njenog savijanja, a priraštaj potencijalne energije sile P je negativan i jednak proizvodu sile P i pomjeranja njene napadne tačke. Dakle,

$$\Delta (P.E.) = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz - P u, \quad (1)$$

gdje je

$$u = \int_0^l (ds - dz) = \int_0^l (\sqrt{1 + v'^2} - 1) dz \cong \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz. \quad (2)$$

Potencijalna energija sile P je negativna jer bi sila P izvršila negativan rad kada bi se štap vratio iz savijenog u pravi položaj.

Kritičnu silu izvijanja određujemo, dakle, iz uslova da je

$$\int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz - \frac{1}{2} P \int_0^l v'^2 dz = 0. \quad (3)$$

Za zglavkasto oslonjen štap je $M = Pv$, gdje je v ugib štapa, pa je iz (3)

$$P_{kr} = \frac{\int_0^l v'^2 dz}{\int_0^l \frac{v^2}{EI} dz}. \quad (4)$$

Izraz (4) definiše vrijednost kritične sile izvijanja. U konkretnim primjenama treba pretpostaviti oblik izvijenog štapa, tj. funkciju $v = v(z)$, koja zadovoljava granične uslove oslanjanja štapa, a onda iz (4) direktno nalazimo P_{kr} . Ukoliko smo tačno pogodili izraz za $v = v(z)$, iz (4) dobijamo tačnu vrijednost za kritičnu silu izvijanja, inače dobijamo približnu vrijednost sa tačnošću koja zavisi od toga koliko dobro smo pretpostavili izraz za $v = v(z)$. Da bismo ovo ilustrovali, pretpostavimo da je izvijeni oblik zglavkasto oslonjenog štapa dat sa

$$v(z) = az(l-z), \quad (5)$$

gdje je $a = \text{const}$. Granični uslovi $v(0) = v(l) = 0$ su očigledno zadovoljeni. Zamjenom (5) u (4) dobijamo

$$P_{kr} = 10 \frac{EI}{l^2}, \quad (6)$$

što se za manje od 1,5% razlikuje od tačne vrijednosti

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}. \quad (7)$$

Da smo umjesto (5) pretpostavili tačan izraz za izvijeni oblik štapa

$$v(z) = a \sin \frac{\pi}{l} z, \quad (8)$$

dobili bismo iz (4) tačan izraz za kritičnu silu, (7).

Određivanje kritične sile izvijanja pomoću metode potencijalne energije se često koristi u slučajevima kada su geometrija i opterećenje štapa takvi da je korespondentna diferencijalna jednačina elastične linije izvijenog štapa toliko komplikovana da je iz nje teško odrediti kritičnu silu. Tada se koristi (4) i uz pretpostavljeni oblik funkcije $v=v(z)$ određuje približna vrijednost kritične sile.

13.3.5. Dodatne napomene o izvijanju

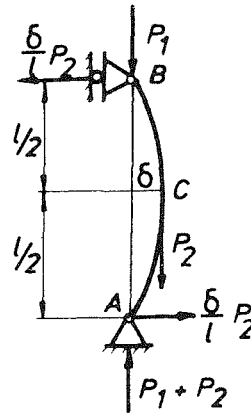
U izvedenoj analizi izvijanja grednog nosača pretpostavljali smo da je pritisna sila imala konstantan (vertikalno) pravac u toku izvijanja. Ukoliko se, međutim, pravac pritisne sile mijenja u toku izvijanja grede, na primjer stalno prolazi kroz neku fiksnu tačku, recimo tačku O na sl. 13:28, dobijaju se druge vrijednosti za kritičnu silu izvijanja. Ponavljajući proceduru kao u analizi osnovnih Eulerovih slučajeva izvijanja, tj. postavljajući i integrirajući diferencijalnu jednačinu elastične linije uz odgovarajuće granične uslove, dobijamo da je za slučaj na sl. 13:28 kritična sila izvijanja

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}, \quad (1)$$

tj. četiri puta veća nego za konzolu pritisnutu silom čiji pravac ostaje vertikalno u toku izvijanja. Uočavamo da se P_{kr} dato sa (1) podudara sa kritičnom silom koja se dobija za ranije analiziranu pritisnutu zglavkasto oslonjenu gredu, što se može objasniti time da, kada pravac sile P prolazi kroz tačku O na sl. 13:28, moment u toj tački je nula pa se greda nalazi u istim uslovima kao da je zglavkasto oslonjena.



Sl. 13:28.



Sl. 13:29.

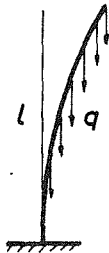
U praksi se takođe ponekad sreće slučaj da je greda pritisnuta i sa aksijalnom silom koja djeluje između oslonaca, recimo kao na sl. 13:29. Postavljajući diferencijalnu jednačinu elastične linije za dijelove AC i CB i integrirajući ih uz korišćenje graničnih uslova, nalazimo da je kritično stanje na izvijanje definisano sa

$$(P_1 + P_2)_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2},$$

gdje dužina L zavisi od odnosa $m = (P_1 + P_2)/P_1$, kao što je prikazano u tabeli 13:3.

m	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
$\frac{L}{l}$	1,00	0,95	0,91	0,89	0,87	0,82

Tabela 13:3.



Sl. 13:30.

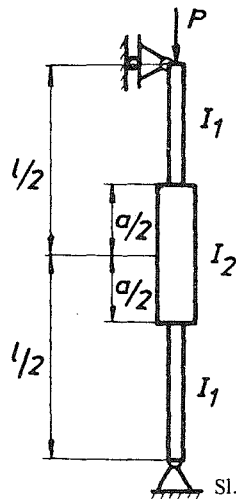
Ako ima više pritisnih sila između oslonaca, postupak postavljanja i integracije diferencijalnih jednačina elastične linije postaje suviše obiman, pa je pogodnije koristiti približne metode, na primjer, metodu potencijalne energije. Ista je stvar i sa gredom opterećenom kontinualno raspoređenom pritisnom silom (sl. 13:30). Diferencijalna jednačina elastične linije u ovom slučaju ima promjenljive koeficijente, što prilikom integracije zahtijeva korišćenje beskonačnih redova. Zato se pribjegava približnim metodama. Na primjer, za slučaj prikazan na sl. 13:30 kritično opterećenje je definisano sa

$$(ql)_{kr} = 7,837 \frac{EI}{l^2}. \quad (3)$$

Na kraju, dajemo napomenu o izvijanju grede promjenljivog poprečnog presjeka. Jasno je sa stanovišta stabilnosti pritisnute grede da greda konstantnog poprečnog presjeka nije najekonomičniji oblik grede. Na primjer, stabilnost zglavkasto oslonjene pritisnute grede može se povećati ako se smanji poprečni presjek na krajevima a poveća u sredini grede (sl. 13:31). Ako postavimo diferencijalne jednačine elastične linije izvijene grede posebno za dijelove sa momentom inercije I_1 i I_2 , i izvršimo integraciju uz korišćenje graničnih uslova, nalazimo da je

$$P_{kr} = \alpha \frac{EI_2}{l^2}, \quad (4)$$

gdje koeficijent α zavisi od odnosa $\frac{a}{l}$ i $\frac{I_1}{I_2}$, kao što je prikazano u tabeli 13:4. No, i u ovim slučajevima, tj. u analizi grede promjenljivog poprečnog presjeka, pogodnije su približne metode, kao što je metoda potencijalne energije.

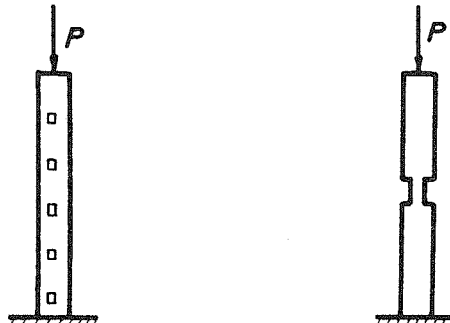


Sl. 13:31.

Tabela 13:4.

$\frac{a}{l} \backslash \frac{I_1}{I_2}$	0,2	0,4	0,6	0,8
0,01	0,15	0,27	0,60	2,26
0,1	1,47	2,40	4,50	8,59
0,2	2,80	4,22	6,69	9,33
0,4	5,09	6,68	8,51	9,67
0,6	6,98	8,19	9,24	9,78

Napominjemo da lokalna slabljenja poprečnog presjeka, recimo kao na sl. 13:32, neznatno utiču na vrijednost kritične sile izvijanja i mogu se zanemariti pri njenom određivanju.



Sl. 13:32.

Primjeri

Primjer 13.5.

Odrediti kritičnu silu izvijanja grede na sl. P 13.5. Poznato je: $E = 21 \text{ MN/cm}^2$, $\lambda_{gr} = 100$, $l = 1,5 \text{ m}$.

Rješenje:

Za I 16 profil je: $I_{min} = 54,7 \text{ cm}^4$, $A = 22,8 \text{ cm}^2$, $i_{min} = 1,55 \text{ cm}$, pa je vitkost grede

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{2l}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 150}{1,55} = 193,5 > \lambda_{gr} = 100.$$

Prema tome, kritičnu silu određujemo po Eulerovom obrascu

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2} = \pi^2 \frac{EI}{(2l)^2} = \pi^2 \frac{21 \cdot 10^3 \cdot 54,7}{(2 \cdot 150)^2} = 125,97 \text{ kN}.$$

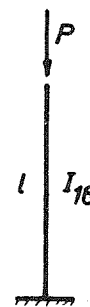
Primjer 13.6.

Dvije grede zglavkasto oslonjene na krajevima imaju iste dužine, iste površine poprečnog presjeka i isti modul elastičnosti. Jedna je kružnog, druga kvadratnog poprečnog presjeka. Uporediti kritične sile izvijanja pretpostavljajući da važi Eulerov obrazac.

Rješenje:

Iz uslova zadatka je $\frac{d^2\pi}{4} = a^2 = A$. Za kružni poprečni presjek je:

$$I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{A^2}{4\pi}, \quad P_{kr,1} = \pi^2 \frac{E \frac{A^2}{4\pi}}{l^2} = \frac{\pi EA^2}{4 l^2},$$



Sl. P 13.5.



Sl. P13.6.

a za kvadratni:

$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{A^2}{12},$$

pa je

$$P_{kr,2} = \pi^2 \frac{E \frac{A^2}{12}}{l^2} = \frac{\pi^2 EA^2}{12 l^2},$$

$$P_{kr,1} = \frac{3}{\pi} P_{kr,2} = 0,755 P_{kr,2}.$$

Primjer 13.7.

Vitki štap je zglavkasto vezan za nepomične oslonce kao na sl. P13.7. Pretpostavljajući elastično ponašanje odrediti porast temperature ΔT koji će izazvati izvijanje štapa. Dato je: l, I, A, α .

Rješenje:

Izduženje štapa je

$$\Delta l = \alpha l \Delta T - \frac{Pl}{EA} = 0,$$

pa je

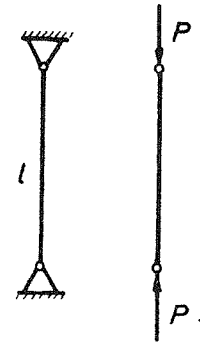
$$P = EA\alpha\Delta T.$$

Štap će se izviti ako je

$$EA\alpha(\Delta T)_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2},$$

odakle dobijamo porast temperature

$$(\Delta T)_{kr} = \frac{\pi^2 I}{\alpha A l^2}.$$



Sl. P13:7.

Na primjer, za $l=1$ m, $d=3$ cm, $\alpha=1,25 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ je $(\Delta T)_{kr}=44,4^\circ\text{C}$.

Primjer 13.8.

Za konstrukciju na sl. P13.8 (a) koja se sastoji od krute grede AB i štapova ① i ② odrediti silu Q pri kojoj dolazi do izvijanja u jednom od štapova, kao i silu Q_{kr} pri kojoj konstrukcija gubi nosivost usljed izvijanja.

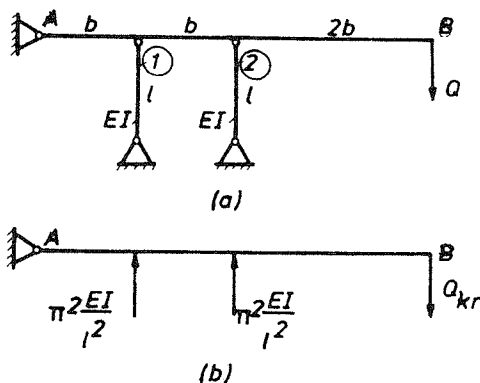
Rješenje:

Lako je naći sile u štapovima: $S_1 = \frac{4}{5} Q$, $S_2 = \frac{8}{5} Q$. Pošto su štapovi iste dužine i poprečnog presjeka, prvo će doći do izvijanja štapa u kome je veća sila, dakle štapa ②. Silu pri kojoj dolazi do izvijanja štapa ② dobijamo iz

$$\frac{8}{5} Q = \pi^2 \frac{EI}{l^2}, \quad Q = \frac{5}{8} \pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Konstrukcija gubi nosivost ukoliko dođe do izvijanja oba štapa. Ovo će se dogoditi pri sili Q_{kr} koju dobijamo pomoću sl. P 13.8 (b):

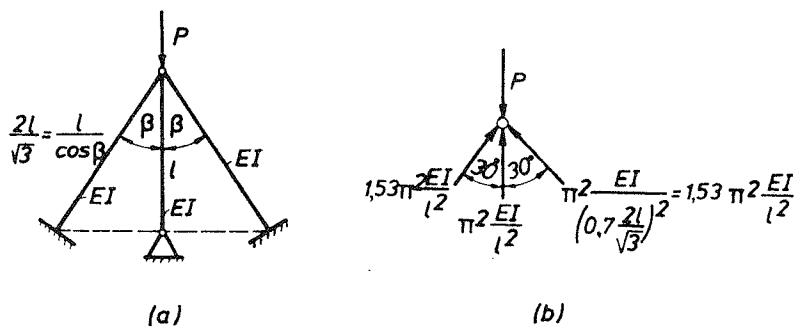
$$Q_{kr} 4b - \pi^2 \frac{EI}{l^2} 2b - \pi^2 \frac{EI}{l^2} b = 0, \quad Q_{kr} = \frac{3}{4} \pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$



Sl. P 13.8.

Primjer 13.9.

Odrediti silu P pri kojoj dolazi do gubljenja nosivosti konstrukcije na sl. P 13.9 (a) usljed izvijanja.



Sl. P 13.9.

Rješenje:

Konstrukcija će izgubiti nosivost ako sile u štapovima dostignu kritičnu vrijednost (sl. P 13.9 (b)), pa silu P_{kr} određujemo iz:

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} + 2 \cdot 1,53 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \cos 30^\circ = 3,65 \pi^2 \frac{EI}{l^2} = 36 \frac{EI}{l^2}.$$

Primjer 13.10.

- a) U kom štapu konstrukcije na sl. P 13.10(a) će prvo doći do izvijanja? Kolika je sila F pri tome?
 b) Izračunati kritičnu silu F_{kr} pri kojoj nastaje slom konstrukcije usljed izvijanja.

Štapovi su čelični ($E=21 \text{ MN/cm}^2$) i od profila I 16. Dato je: $a=2 \text{ m}$, $\lambda_{gr}=100$.

Rješenje:

- a) Sile u štapovima nalazimo iz statičkih jednačina i uslova kompatibilnosti. Dobijamo: $S_1=0,0147F$, $S_2=0,512F$, $S_3=0,745F$. Geometrijske karakteristike I 16 profila su: $I_{\min}=54,7 \text{ cm}^4$, $A=22,8 \text{ cm}^2$, $i_{\min}=1,55 \text{ cm}$. Da bismo našli koji štap će se prvo izviti i kolika je sila F pri tome, nađimo kolike su vrijednosti sile F potrebne za izvijanje svakog pojedinačnog štapa:

$$\text{štap ①: } \lambda_1 = \frac{l_1}{i} = \frac{200}{1,55} = 129 > 100, \quad S_1^{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l_1^2} = 283 \text{ kN},$$

$$F = \frac{283}{0,0147} = 19\,251 \text{ kN};$$

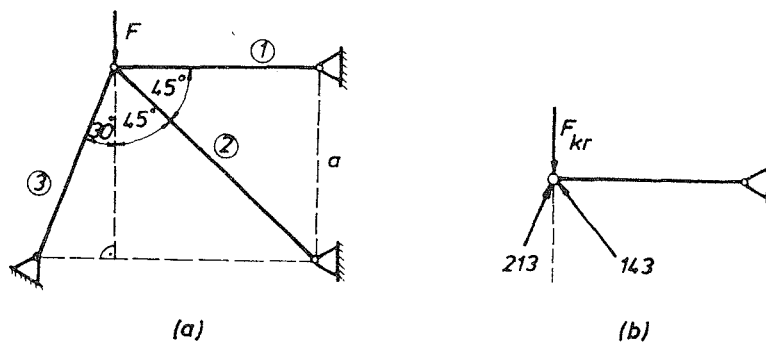
$$\text{štap ②: } \lambda_2 = \frac{l_2}{i} = \frac{282}{1,55} = 182 > 100, \quad S_2^{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l_2^2} = 143 \text{ kN}, \quad F = \frac{143}{0,512} = 279 \text{ kN};$$

$$\text{štap ③: } \lambda_3 = \frac{l_3}{i} = \frac{231}{1,55} = 149 > 100, \quad S_3^{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l_3^2} = 213 \text{ kN}, \quad F = \frac{213}{0,745} = 286 \text{ kN}.$$

Izvijanje počinje pri najmanjoj od ovih sila, dakle, pri sili $F=279 \text{ kN}$, i to u štapu ②.

- b) Slom konstrukcije usljed izvijanja će nastati kada sila F poraste toliko da i sila u štapu ③ dostigne svoju kritičnu vrijednost (213 kN), jer nakon toga konstrukcija postaje mehanizam. Dakle, sa sl. P 13.10 (b) slijedi:

$$F_{kr} - 213 \cos 30^\circ - 143 \cos 45^\circ = 0, \quad F_{kr} = 284,75 \text{ kN}.$$



Sl. P 13.10.

Primjer 13.11.

Odrediti kritičnu silu izvijanja P_{kr} stuba na slici. Materijal stuba je liveno gvožđe ($E = 12 \frac{\text{MN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_p = 18 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_d = 12 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$). Dato je: $d = 3 \text{ cm}$, $D = 4 \text{ cm}$, $l = 1,2 \text{ m}$.

Rješenje:

Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka stuba su:

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 8,59 \text{ cm}^4, \quad A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 5,5 \text{ cm}^2, \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = 1,25 \text{ cm}.$$

Vitkost stuba je

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{0,7l}{i} = \frac{0,7 \cdot 120}{1,25} = 67,2$$

što je manje od granične vrijednosti za dati materijal stuba

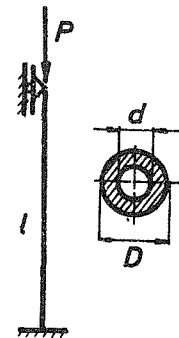
$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{12 \cdot 10^3}{18}} = 81.$$

Prema tome, kritičan napon izvijanja određujemo po obrascu (vidi tabelu 13:1)

$$\sigma_{kr} = 76,1 - 1,18\lambda + 0,0052\lambda^2 \text{ [kN/cm}^2\text{]},$$

odakle je $\sigma_{kr} = 20,29 \text{ kN/cm}^2$. Kritična sila je

$$P_{kr} = \sigma_{kr} A = 20,29 \cdot 5,5 = 111,6 \text{ kN}.$$



Sl. P 13 41.

No, zbog mogućih nepravilnosti uzima se da je dozvoljena sila $P_{izv} = \frac{P_{kr}}{n_{izv}}$, gdje je n_{izv} koeficijent sigurnosti protiv izvijanja. Za $n_{izv} = 3,5$ dobija se $P_{izv} = \frac{1}{3,5} \cdot 111,6 = 31,886 \text{ kN}$.

Dozvoljenu silu P_{izv} možemo odrediti i po ω postupku. Iz tabele 13:2, za $\lambda = 67,2$ nalazimo $\omega = 2,05$, pa je:

$$\sigma_{izv} = \frac{\sigma_d}{\omega} = \frac{12}{2,05} = 5,85 \text{ kN/cm}^2, \quad P_{izv} = \sigma_{izv} A = 5,85 \cdot 5,5 = 32,175 \text{ kN}.$$

Primjer 13.12.

Odabrati poprečni presjek stuba sastavljenog od jednakokrakih ugaonika (L profila) na sl. P 13.12 za slučaj da je stub izložen sili pritiska $P = 600 \text{ kN}$. Dužina stuba je $l = 3,5 \text{ m}$, a stub je zglavkasto oslonjen na krajevima. Materijal stuba je čelik (Č.0370), $\sigma_d = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Rješenje:

U problemima u kojima treba odabrati profil, odnosno odrediti dimenzije poprečnog presjeka, procedura je sljedeća:

- Pretpostavimo vrijednost za ω , recimo $\omega = 2$.
- Iz izraza (13.3.3:10) izračunamo površinu poprečnog presjeka

$$A = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_d} = \frac{2 \cdot 600}{16} = 75 \text{ cm}^2.$$

Iz Tabela profila nalazimo da profil L 90 × 90 × 11 ima karakteristike $A = 18,7 \text{ cm}^2$, $I = 138 \text{ cm}^4$, $y_0 = 2,62 \text{ cm}$, tako da je:

$$A = 4 \cdot 18,7 = 74,8 \text{ cm}^2, \quad I = 4 \left[138 + \left(\frac{1,5}{2} + 2,62 \right)^2 \cdot 18,7 \right] = 1402 \text{ cm}^4,$$

$$i = \sqrt{\frac{1402}{74,8}} = 4,33 \text{ cm}.$$

- Korespondentna vitkost je

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{350}{4,33} = 80,8,$$

čemu iz tabele 13:2 odgovara $\omega = 1,558$, pa je $P = \frac{1}{\omega} \sigma_d A = \frac{1}{1,558} \cdot 16 \cdot 74,8 = 768 \text{ kN}$. Ova sila je veća od 600 kN, pa zaključujemo da je poprečni presjek L 90 × 90 × 11 nedovoljno napregnut. Zato biramo novo ω .

- Pretpostavimo da je $\omega = 1,5$ i ponovimo proračun. Površina poprečnog presjeka je

$$A = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_d} = \frac{1,5 \cdot 600}{16} = 56,25 \text{ cm}^2.$$

Za L 75 × 75 × 10 profil je $\bar{A} = 14,1 \text{ cm}^2$, $\bar{I} = 71,4 \text{ cm}^4$, $y_0 = 2,21 \text{ cm}$, pa je:

$$A = 4 \cdot 14,1 = 56,4 \text{ cm}^2, \quad I = 4 \left[71,4 + \left(\frac{1,5}{2} + 2,21 \right)^2 \cdot 14,1 \right] = 780 \text{ cm}^4,$$

$$i = \sqrt{\frac{780}{56,4}} = 3,72 \text{ cm}.$$

Vitkost je

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{350}{3,72} = 94,09,$$

pa je $\omega = 1,782$ i $P = \frac{1}{\omega} \sigma_d A = \frac{1}{1,782} \cdot 16 \cdot 56,4 = 506,4 \text{ kN}$,

pa ni profil L 75 × 75 × 10 ne zadovoljava. Zato biramo novo ω .

- Pretpostavimo da je $\omega = 1,8$. Površina poprečnog presjeka je

$$A = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_d} = \frac{1,8 \cdot 600}{16} = 67,5 \text{ cm}^2.$$

Za L 90 × 90 × 9 profil je $\bar{A} = 15,5 \text{ cm}^2$, $\bar{I} = 116 \text{ cm}^4$, $y_0 = 2,54 \text{ cm}$, pa je:

$$A = 4 \cdot 15,5 = 62 \text{ cm}^2, \quad I = 4 \left[116 + \left(\frac{1,5}{2} + 2,54 \right)^2 \cdot 15,5 \right] = 1135 \text{ cm}^4,$$

$$i = \sqrt{\frac{1135}{62}} = 4,28 \text{ cm}.$$

Vitkost je

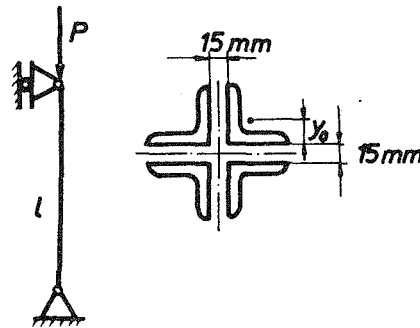
$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{350}{4,28} = 81,8,$$

pa je $\omega = 1,576$ i $P = \frac{1}{1,576} \cdot 16 \cdot 62 = 629,5 \text{ kN}$. Dakle, usvajamo L 90 × 90 × 9 profil.

Provjerimo na kraju i otpornost stuba:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{600}{62} = 9,68 < 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2},$$

pa je, znači, i ovaj uslov zadovoljen.



Sl. P 13.12.

Primjer 13.13.

Stub zglavkasto oslonjen na krajevima čine dva [10 profila spojena prečagama na rastojanju b kao na slici.

- Odrediti razmak a između [profila tako da stub ima istu otpornost na izvijanje u svim ravnima.
- Odrediti odstojanje između prečaga b iz uslova jednake stabilnosti cijelog stuba i dijelova [profila između prečaga.
- Kolika je dozvoljena sila izvijanja ako je materijal stuba čelik (Č.0370), $\sigma_d = 16 \text{ kN/cm}^2$?

Rješenje:

- Geometrijske karakteristike [10 profila su: $I'_x = 206 \text{ cm}^4$, $I'_y = 29,3 \text{ cm}^4$, $A' = 13,5 \text{ cm}^2$. Momenti inercije poprečnog presjeka stuba (bež prečaga) su:

$$I_x = 2I'_x \quad I_y = 2I'_y + 2 \left(\frac{a}{2} - 1,55 \right)^2 A'$$

Istu otpornost na izvijanje u svim ravnima stub će imati ako je $I_y \cong 1,15 I_x$ (gdje koeficijent 1,15 približno kompenzuje uticaj prečaga), što daje

$$1,15 \cdot 206 = 29,3 + \left(\frac{a}{2} - 1,55 \right)^2 \cdot 13,5,$$

odakle je $a = 10,94 \text{ cm}$.

- b) Uslov jednake stabilnosti cijelog stuba i dijela [profila između prečaga je jednakost vitkosti cijelog stuba i dijela [profila između prečaga

$$\frac{l}{i_x} = \frac{b}{i'_y}$$

Kako je:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2I'_x}{2A'}} = \sqrt{\frac{206}{13,5}} = 3,9 \text{ cm}, \quad i'_y = \sqrt{\frac{I'_y}{A'}} = \sqrt{\frac{29,3}{13,5}} = 1,48 \text{ cm},$$

dobijamo

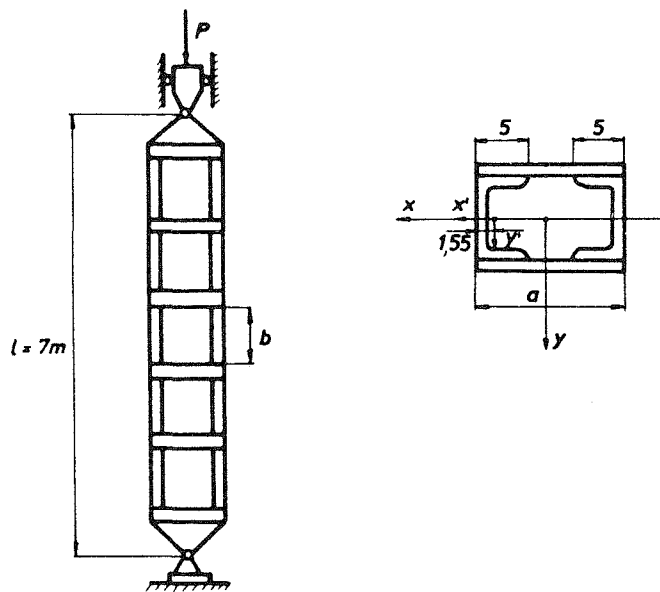
$$b = \frac{i'_y}{i_x} l = \frac{1,48}{3,9} l = 0,36l.$$

- c) Vitkost stuba je

$$\lambda = \frac{l}{i_x} = \frac{700}{3,9} \cong 180,$$

pa je $\omega = 5,47$ i $\sigma_{izv} = \frac{1}{\omega} \sigma_d = \frac{1}{5,47} \cdot 16 = 2,92 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$. Prema tome je dozvoljena sila izvijanja

$$P_{izv} = \sigma_{izv} A = 2,92 \cdot 27 = 79 \text{ kN}.$$



Sl. P 13.13.

Primjer 13.14.

Odrediti prečnik štapova konstrukcije na slici iz uslova da ne dođe do izvijanja u konstrukciji. Štapovi su od drveta ($\sigma_d = 1 \text{ kN/cm}^2$, $E = 1 \text{ MN/cm}^2$). Sila $P = 43 \text{ kN}$. Koeficijent sigurnosti protiv izvijanja je $n = 3$.

Rješenje:

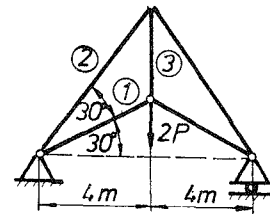
Lako je naći da su sile u štapovima: $S_1 = P (+)$, $S_2 = \sqrt{3} P (-)$, $S_3 = 3P (+)$, pa vidimo da su samo štapovi ② izloženi na pritisak. ($S_2 = \sqrt{3} \cdot 43 = 74,5 \text{ kN}$). Da ne bi došlo do (elastičnog) izvijanja, mora biti

$$S_2 = \frac{1}{n} S_{kr} = \frac{1}{n} \pi^2 \frac{EI}{l^2},$$

odakle je

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{64nS_2l^2}{\pi^3 E}},$$

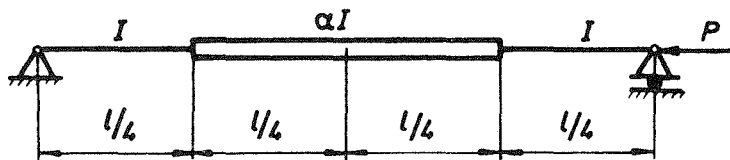
tj. zamjenom brojnih vrijednosti $d \geq 23,3 \text{ cm}$. Korespondentne geometrijske karakteristike poprečnog presjeka su: $I = 14\,489 \text{ cm}^4$, $A = 426 \text{ cm}^2$, $i = 5,83 \text{ cm}$, pa je vitkost štapova ②, $\lambda = \frac{l}{i} = \frac{800}{5,83} = 137 > \lambda_{gr} = 70$, što znači da je učinjena pretpostavka o elastičnom ponašanju bila ispravna.



Sl. P 13.14.

Primjer 13.15.

Metodom potencijalne energije odrediti kritičnu silu izvijanja nosača na slici.



Sl. P 13.15.

Rješenje:

Kritičnu silu izvijanja dobijamo iz izraza (13.3.4:4)

$$P_{kr} = \frac{\int_0^l v'^2 dz}{\int_0^l \frac{v^2}{EI} dz}.$$

Pretpostavimo da je izvijeni oblik nosača dat sa

$$v(z) = a \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (a)$$

Tada je:

$$\int_0^l v'^2 dz = \int_0^l a^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{a^2 \pi^2}{2l}$$

$$\int_0^l \frac{v^2}{EI} dz = 2 \left(\int_0^{l/4} \frac{v^2}{EI} dz + \int_{l/4}^{l/2} \frac{v^2}{\alpha EI} dz \right) = \frac{2a^2}{EI} \left[\left(\frac{l}{8} - \frac{l}{4\pi} \right) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{l}{8} + \frac{l}{4\pi} \right) \right],$$

pa je

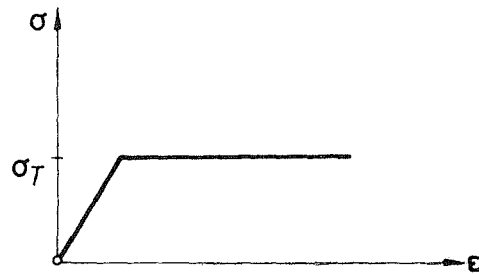
$$P_{kr} = \frac{a^2 \frac{\pi^2}{2l}}{\frac{2a^2}{EI} \left[\left(\frac{l}{8} - \frac{l}{4\pi} \right) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{l}{8} + \frac{l}{4\pi} \right) \right]} = \varphi \cdot \pi^2 \frac{EI}{l^2}, \quad \varphi = \frac{2\pi\alpha}{(1+\alpha)\pi + (1-\alpha) \cdot 2}. \quad (b)$$

Za $\alpha = 1$ je $P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$, što je tačan izraz za kritičnu silu izvijanja, jer je funkcija (a) tačan izraz za izvijeni oblik zglavkasto oslonjene grede konstantnog poprečnog presjeka. Za $\alpha \neq 1$ izraz (b) daje približne vrijednosti kritične sile izvijanja.

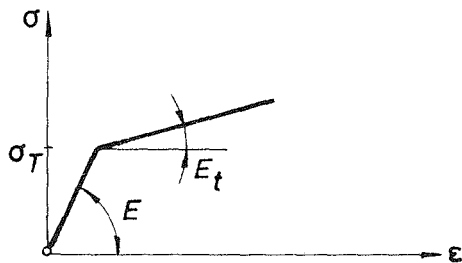
14. ELASTO-PLASTIČNA ANALIZA GREDE

14.1. Uvodne napomene

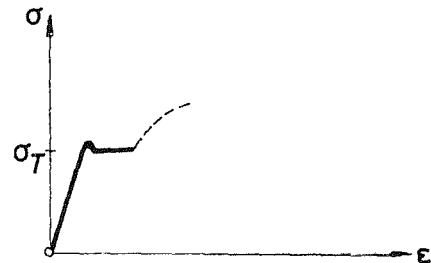
U dosadašnjoj analizi grednog nosača smatrali smo da su naprezanja takva da se u nosaču javljaju samo elastične (povratne) deformacije, pri čemu važi linearni Hookeov zakon za vezu između napona i deformacije. Dimenzionisanje, tj. određivanje dozvoljenog opterećenja i potrebnih dimenzija, vršili smo iz uslova da se nigdje u nosaču ne javi plastična deformacija, saglasno usvojenom kriterijumu o početku plastične deformacije (recimo Treskinom ili Misesovom kriterijumu). Međutim, pojava plastične deformacije u nekoj tački, pa čak i u široj oblasti nosača, ne mora značiti zaista i njegov slom, tj. gubljenje nosivosti. Zato se danas dimenzionisanje češće vrši ne prema naprezanju koje odgovara početku plastične deformacije u nosaču, već prema naprezanju koje izaziva toliko intenzivnu (proširenu) plastičnu deformaciju u nosaču da ovaj gubi svoju nosivost i postaje mehanizam. Ovo je tzv. dimenzionisanje prema graničnoj nosivosti. Da bi se detaljnije upoznali sa njim, neophodno je da prvo damo elemente elasto-plastične analize grednog nosača. Pri tome ćemo smatrati da se materijal nosača ponaša elastično-idealno plastično, tj. da (σ , ϵ) kriva u testu istezanja izgleda kao na sl. 14:1. Idealno plastično znači da zanemarujemo očvršćavanje materijala koje je kod realnih materijala prisutno (sl. 14:2), i smatramo da se deformacija nastavlja bez porasta napona nakon što napon distigne granicu plastičnog tečenja σ_T . Ovo je često dovoljno tačna idealizacija jer je za mnoge metale (recimo aluminijum i njegove legure) očvršćavanje dosta blago ($E_t \sim 10^{-3} E$), pa se može zanemariti, a s druge strane se neki materijali (recimo čelik) u određenom intervalu deformacije zaista ponašaju idealno plastično (sl. 14:3), što opet opravdava model na sl. 14:1.



Sl. 14:1.



Sl. 14:2.



Sl. 14:3.

14.2. Elasto-plastična analiza aksijalno opterećenog nosača

Posmatrajmo konstrukciju na sl. 14:4 aksijalno opterećenu silom F . Konstrukcija se sastoji iz dva štapa, ① i ②, dužina l i αl , $\alpha > 1$, i površina poprečnog presjeka A , odnosno βA , $\beta > 1$. Štapovi su spojeni na donjem kraju sa horizontalnom krutom pločom ③. Jedan dio sile F prihvata štap ①, a drugi dio štap ②, tako da je

$$F = F_1 + F_2. \quad (1)$$

Naponi u štapovima su:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{\beta A}, \quad (2)$$

pa (1) možemo prepisati u obliku

$$F = A(\sigma_1 + \beta\sigma_2). \quad (3)$$

Označimo sa δ izduženje štapova, tj. spuštanje krute ploče 3 usljed dještva sile F . Relativna deformacija štapova je onda:

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta}{l}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta}{\alpha l}. \quad (4)$$

Pretpostavljajući dalje da je sila F takva da su deformacije štapova elastične i da važi Hookeov zakon, imamo:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = E \frac{\delta}{l}, \quad \sigma_2 = E\varepsilon_2 = E \frac{\delta}{\alpha l}. \quad (5)$$

Zamjenom (5) u (3) sada je

$$F = \frac{EA}{l} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \delta, \quad = F_1 + F_2 \quad (6)$$

što je očigledno linearna veza između sile F i izduženja δ , kao što smo i očekivali u domenu linearnih elastičnih deformacija.

Sa povećanjem sile F raste i napon u štapovima konstrukcije, ali ne preko granice plastičnog tečenja σ_T , s obzirom na usvojeni model ponašanja materijala prikazan na sl. 14:1. Kako je $\alpha > 1$, iz (5) vidimo da je $\sigma_1 > \sigma_2$, pa će pri povećanju sile F granicu plastičnog tečenja prvo dostići štap ①. Naponi u štapovima u tom trenutku su:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A} = E \frac{\delta_T}{l} = \sigma_T, \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{\beta A} = E \frac{\delta_T}{\alpha l} = \frac{\sigma_T}{\alpha}, \quad (7)$$

a sila F je

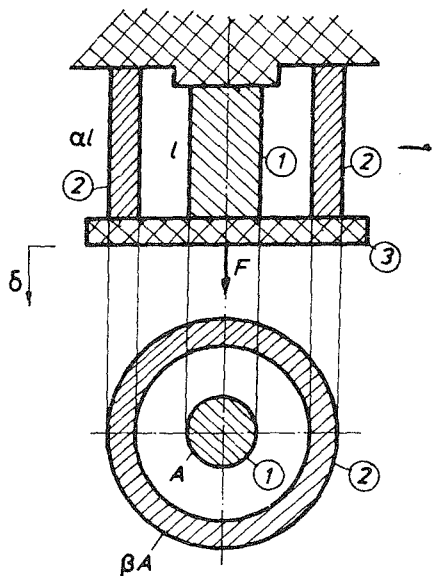
$$F = F_1 + F_2 = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) A\sigma_T. \quad (8)$$

Sa daljim porastom sile F sila u štapu ① ostaje konstantna $F_1 = A\sigma_T$, jer je štap ① plastifikovan ($\sigma_1 = \sigma_T$), pa povećanje sile F prihvata samo štap ②, koji je još uvijek elastično deformisan ($\sigma_2 < \sigma_T$). Dakle, za $F > F_T$ imamo:

$$F_1 = A\sigma_T, \quad F_2 = F - A\sigma_T = EA \frac{\beta}{\alpha} \frac{\delta}{l}. \quad (9)$$

$$F = A\sigma_T + EA \frac{\beta}{\alpha} \frac{\delta}{l}$$

$$F_2 = EA \frac{\beta}{\alpha} \frac{\delta}{l}$$



Sl. 14:4.

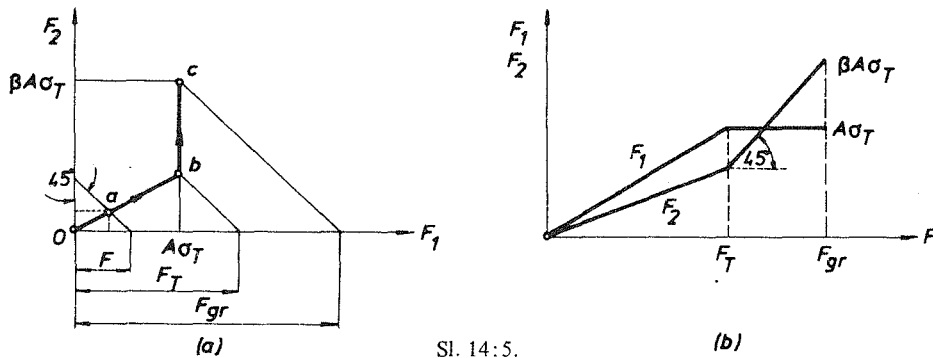
No, kada sila F poraste toliko da i napon u štapu ② dostigne granicu plastičnog tečenja ($\sigma_2 = \sigma_T$), sile u štapovima su:

$$F_1 = A\sigma_T, \quad F_2 = \beta A\sigma_T. \quad (10)$$

Sila $F = F_{gr}$ pri kojoj se ovo događa je

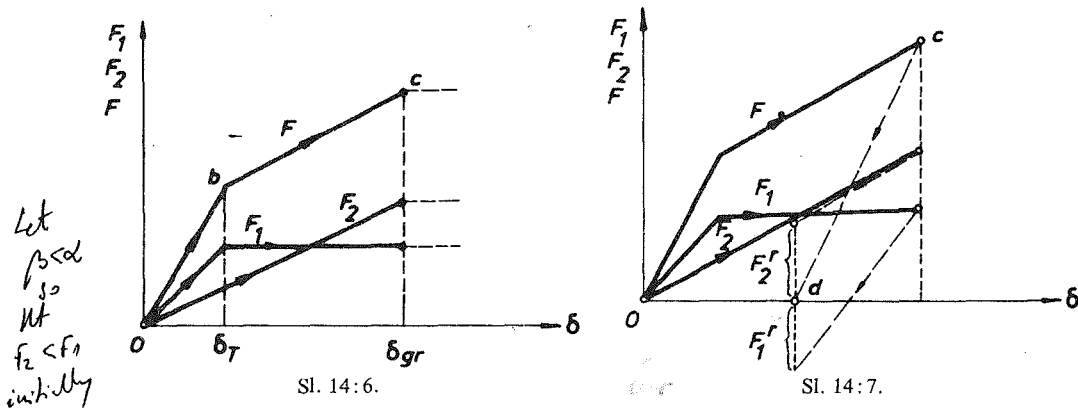
$$F_{gr} = F_1 + F_2 = (1 + \beta) A\sigma_T, \quad (11)$$

i predstavlja graničnu (maksimalnu) silu kojom se konstrukcija smije opteretiti. Pri graničnoj sili (11) čitava konstrukcija je plastifikovana i gubi dalju sposobnost nosivosti.



Sl. 14:5.

Zavisnost sila F_1 i F_2 , međusobno i u odnosu na ukupnu silu F , u toku čitavog procesa deformacije, od početnog do graničnog stanja, prikazana je dijagramski na sl. 14:5. Tačka a (F_1, F_2) na sl. 14:5 (a) odgovara stanju elastične deformacije u oba štapa, tačka b ($A\sigma_T, F_2$) odgovara početku plastičnog tečenja u štapu ①, dok tačka c ($A\sigma_T, \beta A\sigma_T$) odgovara graničnom stanju kada usljed plastifikacije i drugog štapa konstrukcija gubi dalju nosivost.



Sl. 14:6.

Sl. 14:7.

Na sl. 14:6 je prikazana zavisnost sila F_1, F_2 i F od deformacije, tj. izduženja štapova δ u toku čitavog procesa deformisanja.

Pretpostavimo na kraju da smo dostigli graničnu nosivost (tj. tačku c na sl. 14:6) i da onda rasteretimo konstrukciju, tj. uklonimo silu F . S obzirom da se pri rasterećenju štapovi ponašaju elastično, linije rasterećenja u dijagramu na sl. 14:7

Let
β < α
so
kt
f2 < f1
initially



for β > α
you can have
plasticity on reverse
load by taking F=0
is needed.

$$F_1 = A\sigma_T \frac{d-1}{d}$$

$$F_2 = A\sigma_T \frac{d-1}{d}$$

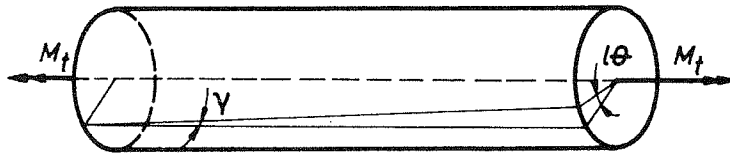
su paralelne linijama elastičnog opterećenja. Sa dijagrama se vidi da u tački d koja odgovara rasterećenom stanju ($F=0$) imamo zaostalu (trajnu) deformaciju (δ_d), pri čemu su štapovi ① i ② i dalje u napregnutom stanju, jer su u njima zaostale sile F_1^r i F_2^r ($F_1^r = -F_2^r$), odnosno naponi:

$$\sigma_1^r = \frac{F_1^r}{A}, \quad \sigma_2^r = \frac{F_2^r}{\beta A}. \quad (12)$$

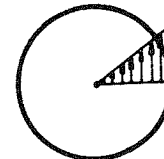
Ovi naponi se zovu zaostali ili rezidualni naponi i imaju važnu ulogu u analizi konstrukcija podvrgnutih cikličnom opterećenju (tj. ponovljenom opterećenju sa suprotnim smjerom), u šta se mi ovdje nećemo upuštati.

14.3. Elasto-plastična analiza grede opterećene na torziju

Posmatrajmo gredu kružnog poprečnog presjeka opterećenu na torziju spregovima koji djeluju na krajevima grede (sl. 14:8). Neka je lijevi kraj grede



Sl. 14:8.



Sl. 14:9.

ukliješten. Tada pod dejstvom momenta torzije M_t desni kraj (bazu) zarotira u odnosu na lijevi za ugao $l\theta$, gdje je θ ugao torzije po jedinici dužine grede. Uzdužno vlakno na radijusu r od ose grede pri tome zarotira za ugao $\gamma(r)$, tako da je

$$\gamma(r) \cdot l = r \cdot l\theta, \quad (1)$$

odakle je

$$\gamma(r) = r\theta, \quad (2)$$

što predstavlja smičuću deformaciju na radijusu r od ose grede. Pretpostavljajući da su deformacije elastične, korespondentni smičući napon je određen Hookeovim zakonom

$$\tau(r) = G\gamma(r) = G\theta r, \quad (3)$$

što je linearna veza između napona τ i radijusa r (sl. 14:9). Vezu između momenta torzije M_t i ugla torzije θ nalazimo iz uslova ravnoteže

$$M_t = \int_A \tau r dA = G\theta I_0, \quad (4)$$

gdje je $I_0 = \int_A r^2 dA$ polarni moment inercije kružnog poprečnog presjeka grede.

Zamjenom izraza za torzionu krutost $G\theta$ iz (4) u (3) dobijamo poznati obrazac za smičući napon elastično uvijene grede momentom torzije M_t ,

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_0} r. \quad (5)$$

Maksimalni napon je na spoljašnjem radijusu $r = R$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_0} R = 2 \frac{M_t}{\pi R^3}. \quad (6)$$

Sa porastom momenta torzije M_t , maksimalni napon raste sve dok ne dostigne granicu plastičnog tečenja za smičući napon τ_T , s obzirom da pretpostavljamo da se materijal u testu smicanja ponaša kao na sl. 14:10. (Inače, $\tau_T = \frac{1}{2} \sigma_T$ po Treskinom

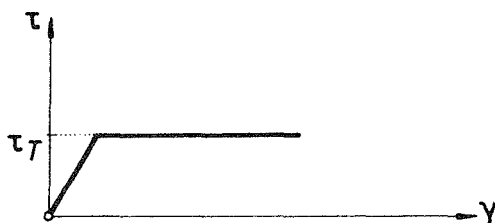
kriterijumu, odnosno $\tau_T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T$ po Misesovom kriterijumu o plastičnom tečenju, gdje je σ_T granica plastičnog tečenja koju materijal ima u testu istezanja). Moment torzije pri kome počinje plastičnost u gredi je, dakle,

$$M_t^T = \frac{\pi}{2} R^3 \tau_T, \quad (7)$$

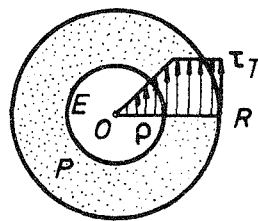
a korespondentni ugao torzije

$$\theta_T = \frac{\tau_T}{RG}, \quad (8)$$

što slijedi nakon zamjene (7) u (4).



Sl. 14:10.



Sl. 14:11.

Sa daljim porastom momenta preko vrijednosti (7), plastičnost se širi ka unutrašnjosti grede, tako da u trenutku kada je plastičnost dosegla radijus ρ , dijagram napona izgleda kao na sl. 14:11. Za $\rho \leq r \leq R$ materijal je plastično deformisan, a smičući napon je jednak granici plastičnog tečenja τ_T , dok je za $0 \leq r \leq \rho$ materijal elastično deformisan, a smičući napon se linearno mijenja sa radijusom r . Dakle,

$$\tau(r) = \begin{cases} \frac{\tau_T}{\rho} r, & 0 \leq r \leq \rho \\ \tau_T, & \rho \leq r \leq R. \end{cases} \quad (9)$$

Da bismo našli moment torzije koji je potreban da se plastičnost proširi do radijusa ρ , koristimo uslov ravnoteže

$$M_t = \int_A \tau r dA = \int_0^{\rho} \frac{\tau_T}{\rho} r \cdot r \cdot 2r \pi dr + \int_{\rho}^R \tau_T \cdot r \cdot 2r \pi dr = \frac{2\pi}{3} R^3 \tau_T \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{R} \right)^3 \right]. \quad (10)$$

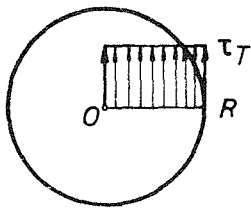
Ovo je veza između momenta torzije i radijusa ρ . Vezu između momenta torzije i ugla torzije dobićemo ako uočimo da je $G \gamma (\rho) = \tau_T$, tako da iz (2) imamo

$$\rho = \frac{\tau_T}{G\theta}. \quad (11)$$

Zamjenom (11) u (10) je onda

$$M_t = \frac{2\pi}{3} R^3 \tau_T \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_T}{\theta} \right) \right], \quad (12)$$

što predstavlja željenu vezu između momenta torzije M_t i korespondentnog ugla torzije θ u elasto-plastičnom domenu deformacija grede.



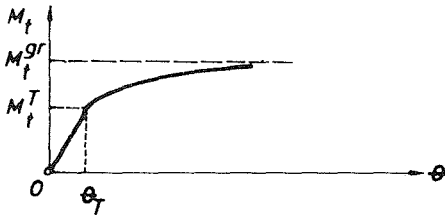
Sl. 14:12.

Granično stanje, tj. gubljenje nosivosti grede, nastupa kada se plastičnost proširi po čitavom poprečnom presjeku (sl. 14:12). Korespondentni, granični moment torzije dobijamo stavljajući u (10) $\rho = 0$

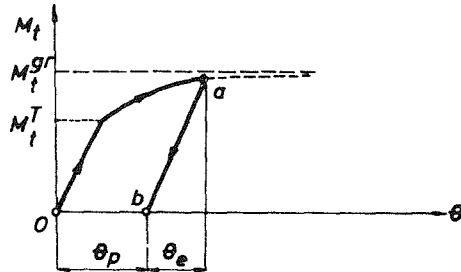
$$M_t^{gr} = \frac{2\pi}{3} R^3 \tau_T. \quad (13)$$

Upoređujući (13) sa (7) slijedi da je $M_t^{gr} = \frac{4}{3} M_t^T$.

Iz (12) vidimo da ugao torzije neograničeno raste kad moment torzije teži graničnoj vrijednosti (13), kao što je prikazano na sl. 14:13.

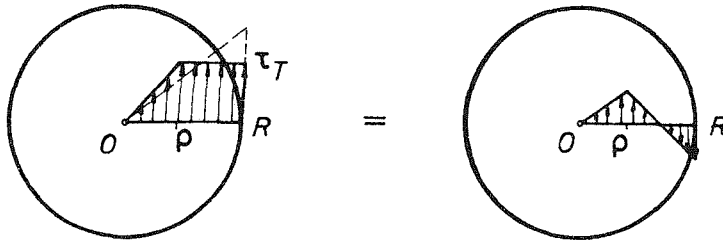


Sl. 14:13.



Sl. 14:14.

Zaostali naponi. — Pretpostavimo da je greda uvijena momentom torzije $M_t^T < M_t < M_t^{gr}$ i da želimo da rasteretimo gredu, tj. uklonimo moment torzije. Rasterećenje se odvija elastično, tj. po liniji ab , paralelno liniji prvobitnog elastičnog opterećenja (sl. 14:14). Očigledno, u tački b na sl. 14:14 je $M_t = 0$, ali je zbog prethodne plastične deformacije greda ostala uvijena za plastični dio ugla uvijanja θ_p , dok se elastični dio θ_e povratio rasterećenjem. Osim toga, u gredi su u rasterećenom stanju prisutni i zaostali (rezidualni) naponi. Zaista, raspored napona koji odgovara tački b na sl. 14:14 dobija se kada se od rasporeda napona koji odgovara tački a na sl. 14:14 oduzme elastična (linearna) raspodjela napona korespondentna momentu torzije M_t (sl. 14:15). Na primjer, ako je $\rho = \frac{2}{3} R$, čemu iz



Sl. 14:15.

(10) odgovara moment torzije $M_t = 1,24 \frac{\pi}{2} R^3 \tau_T$, tada je linearna elastična raspodjela napona koju treba oduzeti pri rasterećenju od elasto-plastične raspodjele, definisana sa

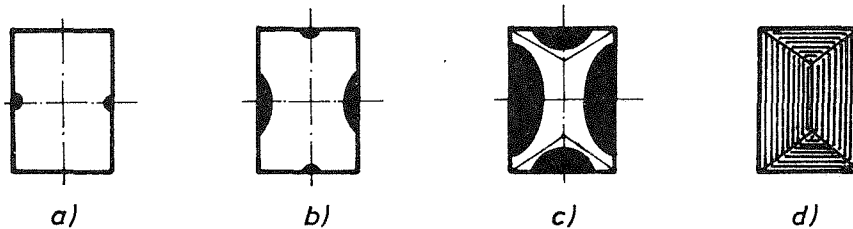
$$\tau = \frac{1,24 \frac{\pi}{2} R^3 \tau_T}{I_0} r = 1,24 \tau_T \frac{r}{R}. \quad (14)$$

Dakle, zaostale (rezidualne) napone dobijamo ako od (9) sa $\rho = \frac{2}{3} R$ oduzmemo (14)

$$\tau_{res}(r) = \begin{cases} 0,26 \tau_T \frac{r}{R}, & 0 \leq r \leq \frac{2}{3} R \\ \tau_T \left(1 - 1,24 \frac{r}{R}\right), & \frac{2}{3} R \leq r \leq R. \end{cases} \quad (15)$$

Na periferiji kruga je $\tau_{res}(R) = -0,24 \tau_T$, a na granici između elastične i plastične oblasti je $\tau_{res}\left(\frac{2}{3} R\right) = 0,17 \tau_T$.

Na kraju ističemo da smo u ovom poglavlju analizirali elasto-plastičnu torziju grede kružnog poprečnog presjeka. Elasto-plastična torzija grede proizvoljnog poprečnog presjeka zahtijeva složeniju analizu, u koju se mi ovdje nećemo upuštati. Napominjemo samo da se, recimo za gredu pravougaonog poprečnog presjeka, plastičnost javlja i širi kao što je skicirano na sl. 14:16. Zaista, maksimalni smičući



Sl. 14:16.

napon pri torziji grede pravougaonog poprečnog presjeka je na sredini duže stranice pravougaonika, pa se i plastičnost prvo tu javlja (sl. 14:16 (a)). Pri daljem porastu momenta torzije, plastičnost se sve više širi (sl. 14:16 (b) i (c)) dok ne obuhvati cijeli poprečni presjek (sl. 14:16 (d)), kada greda gubi dalju nosivost.

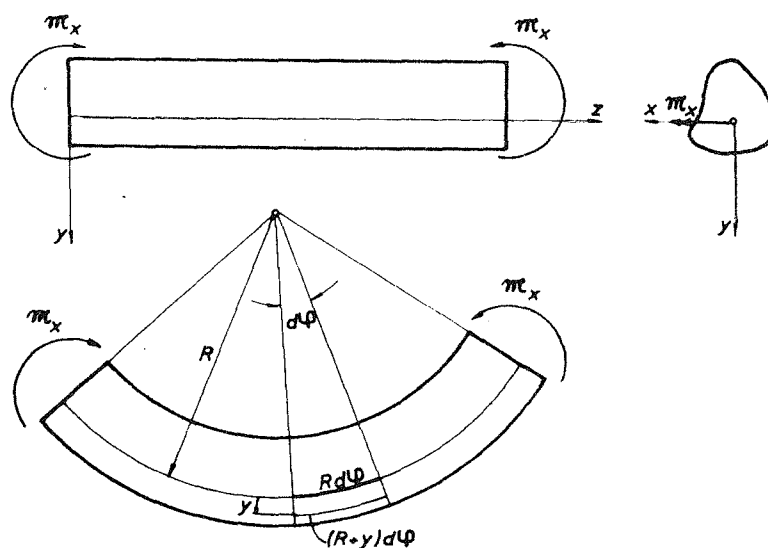
14.4. Elasto-plastična analiza grede opterećene na savijanje

14.4.1. Elasto-plastično savijanje spregovima

Posmatrajmo gredu opterećenu na savijanje sa dva sprega savijanja \mathfrak{M}_x koji djeluju na krajevima grede u glavnoj ravni inercije yz . Pod dejstvom ovih spregova greda će se deformisati i preći u savijeni položaj prikazan na sl. 14:17. Dilatacija vlakna na udaljenju y od neutralne (težišne) ose z je

$$\varepsilon_{zz}(y) = \frac{(R+y)d\varphi - Rd\varphi}{Rd\varphi} = \frac{y}{R}, \quad (1)$$

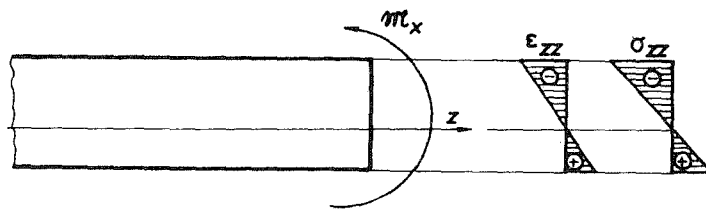
gdje je R poluprečnik krivine neutralne ose korespondentne momentu savijanja \mathfrak{M}_x . Relacija (1), tj. linearna veza između dilatacije ε_{zz} i veličine y , važi bez obzira da li su u pitanju elastične ili plastične deformacije, pod uslovom da su deformacije male.



Sl. 14:17.

Ukoliko je moment savijanja \mathfrak{M}_x takav da su deformacije grede elastične, korespondentni napon određujemo iz Hookeovog zakona

$$\sigma_{zz}(y) = E \varepsilon_{zz}(y) = \frac{E}{R} y, \quad (2)$$



Sl. 14:18.

što je takođe linearna promjena sa distancom y (sl. 14:18). Vežu između poluprečnika krivine R i momenta savijanja \mathfrak{M}_x određujemo iz uslova ravnoteže

$$\mathfrak{M}_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = \frac{EI_x}{R}, \quad (3)$$

gdje je $I_x = \int y^2 dA$ moment inercije površine poprečnog presjeka grede za x osu. Zamjenom (3) u (2) dobijamo poznati obrazac za napon usljed savijanja grede spregovima u elastičnom domenu deformacija

$$\sigma_{zz}(y) = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y. \quad (4)$$

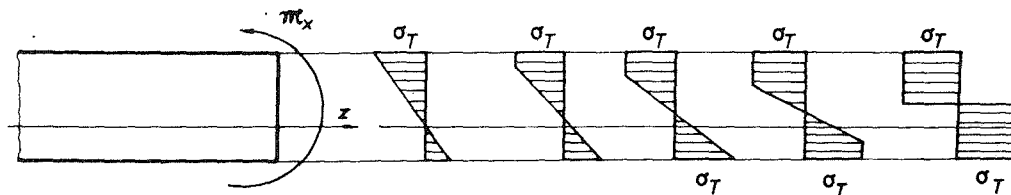
Maksimalni napon (po apsolutnoj vrijednosti) je u najudaljenijim tačkama od neutralne ose

$$|\sigma_{zz}^{\max}| = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} |y_{\max}| = \frac{\mathfrak{M}_x}{W_x}. \quad (5)$$

Sa porastom momenta \mathfrak{M}_x raste i maksimalni napon (5), ali ne preko granice plastičnog tečenja σ_T . Moment savijanja pri kome počinje plastičnost u gredi, dakle, dobijamo iz

$$\mathfrak{M}_x^T = W_x \sigma_T. \quad (6)$$

Sa daljim porastom momenta, preko vrijednosti (6), plastičnost se širi unutar grede, a dijagram napona se mijenja kao što je skicirano na sl. 14:19. Očigledno je da se u domenu elasto-plastičnih deformacija neutralna osa više ne poklapa sa težišnom osom, već se pomjera sa širenjem plastičnosti.



Sl. 14:19.

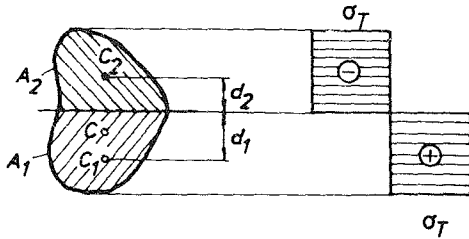
U graničnom stanju kada je plastičnost obuhvatila čitav poprečni presjek, neutralna osa polovi površinu poprečnog presjeka (sl. 14:20). Ovo slijedi iz uslova ravnoteže da je rezultujuća sila u pravcu z ose jednaka nuli

$$\sigma_T A_1 - \sigma_T A_2 = 0, \quad (7)$$

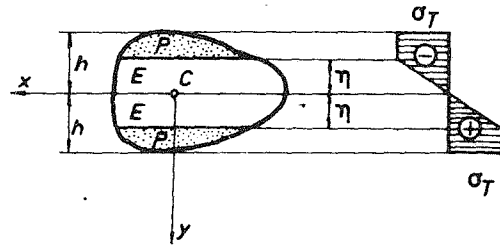
odakle je $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$, gdje je A ukupna površina poprečnog presjeka grede. Iz momentnog uslova ravnoteže dobijamo vrijednost graničnog momenta savijanja

$$\mathfrak{M}_x^{gr} = \sigma_T A_1 d_1 + \sigma_T A_2 d_2 = \sigma_T \frac{A}{2} d, \quad (8)$$

gdje je $d = d_1 + d_2$ rastojanje između težišta C_1 i C_2 površina A_1 i A_2 poprečnog presjeka.



Sl. 14:20.



Sl. 14:21.

U slučaju da poprečni presjek ima horizontalnu osu simetrije (sl. 14:21), neutralna osa se poklapa sa težišnom x osom i u plastičnom domenu deformacija, jer se plastične zone obrazuju simetrično. Neka se pod dejstvom momenta \mathfrak{M}_x plastičnost proširila do nivoa η na sl. 14:21. Izraz za napon je

$$\sigma_{zz}(y) = \begin{cases} \sigma_T \frac{y}{\eta}, & |y| \leq \eta \\ \sigma_T \operatorname{sgn} y, & |y| \geq \eta, \end{cases} \quad (9)$$

gdje je $\operatorname{sgn} y = \begin{cases} +1, & y > 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$. Vezu između momenta \mathfrak{M}_x i η dobijamo iz momentnog uslova ravnoteže

$$\mathfrak{M}_x(\eta) = \int_A \sigma_{zz} y dA = 2 \left(\int_0^{\eta} \sigma_T \frac{y}{\eta} y dA + \int_{\eta}^h \sigma_T y dA \right) = \sigma_T \left[\frac{1}{\eta} I_x^e(\eta) + S_x^p(\eta) \right], \quad (10)$$

gdje je $I_x^e(\eta) = 2 \int_0^{\eta} y^2 dA$ moment inercije elastično deformisanog dijela poprečnog presjeka u odnosu na x osu, a $S_x^p(\eta) = 2 \int_{\eta}^h y dA$ je dvostruka vrijednost statičkog momenta polovine plastično deformisanog dijela poprečnog presjeka u odnosu na x osu.

Za pravougaoni poprečni presjek dimenzija $b \times 2h$ je:

$$I_x^e(\eta) = \frac{2}{3} b\eta^3, \quad S_x^p(\eta) = b(h^2 - \eta^2), \quad (11)$$

pa je

$$\mathfrak{M}_x(\eta) = \sigma_T \frac{bh^2}{3} \left[3 - \left(\frac{\eta}{h} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

Očigledno je iz (12) da je $\mathfrak{M}_x^T = \mathfrak{M}_x(h) = \frac{2}{3} \sigma_T bh^2$ i $\mathfrak{M}_x^{gr} = \mathfrak{M}_x(0) = \sigma_T bh^2$, tako da je za pravougaoni poprečni presjek $\mathfrak{M}_x^{gr} = \frac{3}{2} \mathfrak{M}_x^T$. Koristeći vrijednost za \mathfrak{M}_x^{gr} , (12) možemo prepisati u obliku

$$\mathfrak{M}_x(\eta) = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_x^{gr} \left[3 - \left(\frac{\eta}{h} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Korišćenjem izraza (13) lako je naći i vezu između momenta \mathfrak{M}_x i krivine $K = \frac{1}{R}$ neutralne ose elasto-plastično deformisane grede. Zaista, iz Hookeovog zakona i relacije (1) je

$$\varepsilon_{zz}(\eta) = \frac{\eta}{R} = \frac{1}{E} \sigma_T, \quad (14)$$

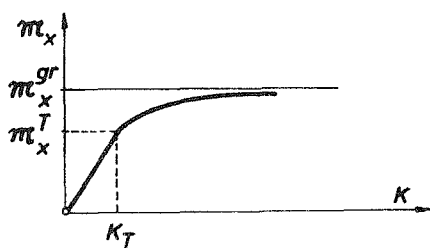
što zamjenom u (13) daje

$$\mathfrak{M}_x(K) = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_x^{gr} \left[3 - \left(\frac{K_T}{K} \right)^2 \right], \quad (15)$$

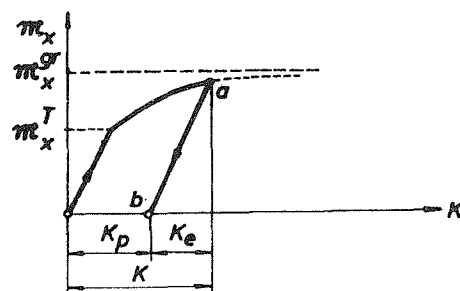
gdje je

$$K_T = \frac{\sigma_T}{hE} \quad (16)$$

krivina neutralne ose na početku plastičnosti, koju dobijamo iz (14) za $\eta = h$. Dijagramski je zavisnost (15) prikazana na sl. 14:22.



Sl. 14:22.



Sl. 14:23.

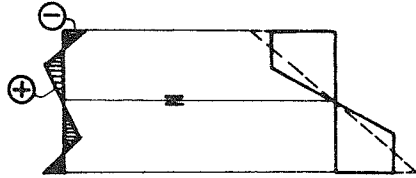
Kao što se vidi sa sl. 14:22, krivina neutralne ose neograničeno raste kada se moment savijanja približava graničnoj vrijednosti.

Zaostali naponi. – Odredimo na kraju zaostale (rezidualne) napone koji su prisutni u plastično deformisanoj gredi nakon njenog rasterećenja, tj. uklanjanja momenta savijanja. Rasterećenje se odvija elastično, pa je linija rasterećenja na sl. 14:23 paralelna liniji prvobitnog elastičnog opterećenja. Zaostala krivina je

$$K_p = K - K_e = K - \frac{\mathfrak{M}_x}{EI_x}, \quad (17)$$

dok zaostale napone dobijamo ako od naponskog stanja koje odgovara tački a na sl. 14:23 oduzmemo elastičnu (linearnu) raspodjelu napona korespondentnu momentu savijanja \mathfrak{M}_x (sl. 14:24). Neka je,

recimo, $\eta = \frac{2}{3}h$, čemu iz (12) odgovara moment $\mathfrak{M}_x = 0,85bh^2\sigma_T$, tada je linearna elastična raspodjela napona koju treba oduzeti od elasto-plastične raspodjele, definisana sa



Sl. 14:24.

$$\sigma_{zz}(y) = \frac{0,85bh^2\sigma_T}{b(2h)^3}y = 1,275\sigma_T\frac{y}{h}. \quad (18)$$

Oduzimanjem (18) od (9) dobijamo zaostale (rezidualne) napone

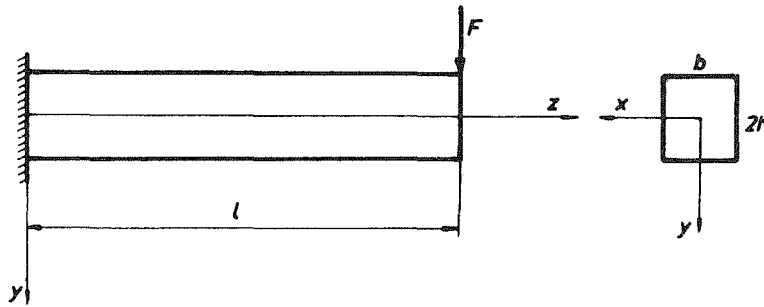
$$\sigma_{zz}^{\text{res}}(y) = \begin{cases} 0,225\sigma_T\frac{y}{h}, & |y| \leq \frac{2}{3}h \\ \sigma_T\left(\text{sgn } y - 1,275\frac{y}{h}\right), & |y| \geq \frac{2}{3}h. \end{cases} \quad (19)$$

Tako je, na primjer, $\sigma_{zz}^{\text{res}}\left(\frac{2}{3}h\right) = 0,15\sigma_T$, $\sigma_{zz}^{\text{res}}(h) = -0,275\sigma_T$

14.4.2. Elasto-plastično savijanje silama

Kod grede savijene silama, pored normalnog napona σ_{zz} , javlja se i smičući napon τ . Međutim, za dovoljno duge (vitke) grede smičući napon je znatno manji od normalnog, pa se može zanemariti, čime se analiza svodi samo na normalni napon. Ovo važi kako za elastičnu, tako i za elasto-plastičnu analizu vitkih greda. Dakle, posmatrajmo gredu uklještenu na lijevom kraju i opterećenu koncentrisanom silom F na desnom kraju (sl. 14:25). Greda je pravougaonog poprečnog presjeka dimenzija $b \times 2h$ i dužine l . Moment savijanja u proizvoljnom presjeku na udaljenju z od uklještenja je

$$M_x(z) = -F(l-z). \quad (1)$$



Sl. 14:25.

Pretpostavljajući da su deformacije grede elastične, raspodjela normalnog napona u uočenom poprečnom presjeku je

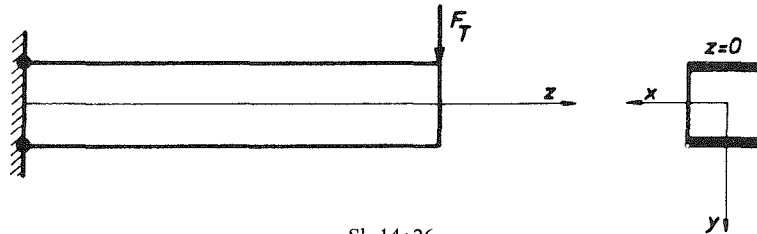
$$\sigma_{zz}(y) = \frac{M_x(z)}{I_x} y = -\frac{F(l-z)}{I_x} y. \quad (2)$$

Maksimalni napon u gredi javlja se u kritičnom presjeku (uklještenju $z=0$), i u najudaljenijim tačkama od neutralne ose ($y = \pm h$)

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{Fl}{I_x} h = \frac{3 Fl}{2 bh^2}. \quad (3)$$

Sa porastom sile F raste i normalni napon. Plastičnost će se pojaviti u gredi kada maksimalni normalni napon (3) dostigne granicu plastičnog tečenja σ_T , tj. kada je

$$\frac{3 F_T l}{2 bh^2} = \sigma_T. \quad (4)$$



Sl. 14:26.

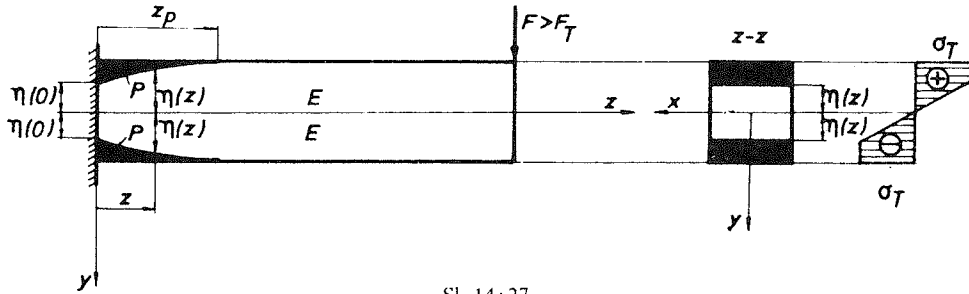
Oдавде dobijamo silu pri kojoj počinje plastičnost u gredi

$$F_T = \frac{2 bh^2}{3 l} \sigma_T. \quad (5)$$

Plastičnost se pri tome javlja samo u krajnjim tačkama presjeka u uklještenju, kao što je prikazano na sl. 14:26. Sa daljim porastom sile plastičnost se širi ka unutrašnjosti grede, tako da pri nekoj vrijednosti sile $F > F_T$, plastične zone izgledaju kao na sl. 14:27. Odredimo granicu između elastične i plastične oblasti

grede, tj. jednačinu krive $\eta = \eta(z)$ na sl. 14:27. Normalni napon u presjeku z , u kome je plastičnost dosegla do nivoa $\eta(z)$, je

$$\sigma_{zz}(y) = \begin{cases} -\sigma_T \frac{y}{\eta}, & |y| \leq \eta \\ -\sigma_T \operatorname{sgn} y, & |y| \geq \eta. \end{cases} \quad (6)$$



Sl. 14:27.

Ovome odgovara moment savijanja

$$M_x(z) = -2 \left(\sigma_T \cdot hb \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \sigma_T \cdot \eta b \cdot \frac{1}{3} \eta \right) = -\frac{\sigma_T bh^2}{3} \left[3 - \left(\frac{\eta}{h} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Izjednačujući (7) sa (1) imamo

$$F(l-z) = \frac{\sigma_T bh^2}{3} \left[3 - \left(\frac{\eta}{h} \right)^2 \right], \quad (8)$$

što rješavanjem po η daje traženi oblik granice između elastične i plastične oblasti grede

$$\eta(z) = \sqrt{3} h \sqrt{1 - \frac{F(l-z)}{bh^2 \sigma_T}}. \quad (9)$$

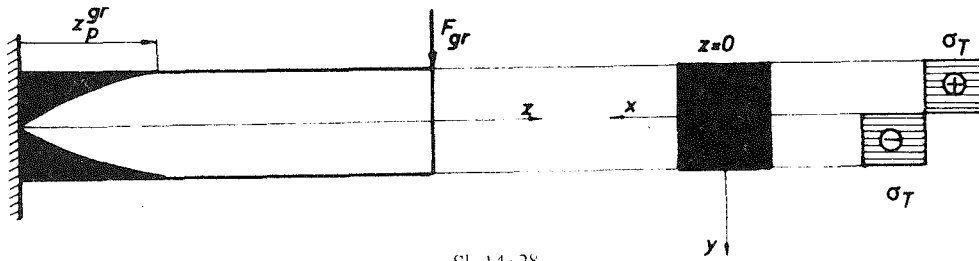
Kao što vidimo, granica između elastične i plastične oblasti je parabolična kriva, pri čemu je

$$\eta(0) = \sqrt{3} h \sqrt{1 - \frac{Fl}{bh^2 \sigma_T}}, \quad (10)$$

dok vrijednost $z = z_p$ do koje se proteže plastičnost, uzduž grede dobijamo iz (9) i uslova $\eta(z_p) = h$, što daje

$$z_p = l - \frac{2}{3} bh^2 \frac{\sigma_T}{F}. \quad (11)$$

Sa daljim porastom sile F plastičnost se sve više širi. Kada sila F postane toliko velika da se plastične zone u uklještenju dodirnu (sl. 14:28), nosač gubi dalju nosivost jer se u uklještenju formirao tzv. plastični zglob, koji nosač prevodi u



Sl. 14:28.

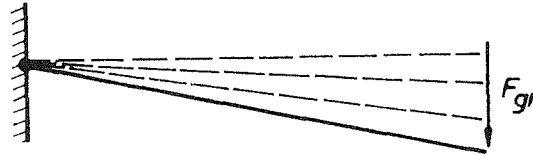
mehanizam (sl. 14:29). Silu $F = F_{gr}$ pri kojoj se ovo javlja nazivamo graničnom silom. Njenu vrijednost dobijamo iz (10) stavljajući $\eta(0) = 0$

$$F_{gr} = \frac{bh^2}{l} \sigma_T. \quad (12)$$

Vrijednost granične sile mogli smo direktno dobiti i iz uslova

$$F_{gr} l = M_{gr}, \quad (13)$$

budući da je u trenutku potpune plastifikacije presjeka u ukleštenju, moment u njemu jednak graničnom momentu



Sl. 14:29.

$$M_{gr} = 2 \cdot \sigma_T bh \frac{h}{2} = bh^2 \sigma_T. \quad (14)$$

Zamjenom (14) u (13) i rješavanjem po F_{gr} , opet dobijamo vrijednost granične sile (12).

Vrijednost $z_p = z_p^{gr}$ do koje se proširila plastičnost uzduž grede pri sili $F = F_{gr}$, dobijamo kada u (11) unesemo (12), što daje

$$z_p^{gr} = \frac{1}{3} l. \quad (15)$$

Jednačinu deformisane neutralne ose elasto-plastično savijene grede silom $F_T < F < F_{gr}$, dobijamo ako pođemo do izraza za krivinu pri malim ugibima grede

$$K(z) = \frac{d^2 v}{dz^2}, \quad (16)$$

i veze između momenta savijanja i krivine

$$M_x(z) = -F(l-z) = \begin{cases} -EI_x K(z), & z_p \leq z \leq l \\ -\frac{1}{3} M_{gr} \left\{ 3 - \left[\frac{K_T}{K(z)} \right]^2 \right\}, & 0 \leq z \leq z_p, \end{cases} \quad (17)$$

gdje je $K_T = \frac{\sigma_T}{hE}$ krivina neutralne ose grede u trenutku početka plastičnosti u gredi.

Rješavanjem (17) po $K = K(z)$, dobijamo

$$K(z) = \begin{cases} \frac{F}{EI_x} (l-z), & z_p \leq z \leq l \\ \frac{K_T}{\sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{F(l-z)}{bh^2 \sigma_T}}}, & 0 \leq z \leq z_p, \end{cases} \quad (18)$$

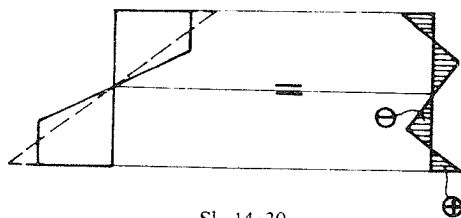
što zamjenom u (16) daje diferencijalnu jednačinu deformisane neutralne ose elasto-plastično savijene grede. Integracijom ove jednačine uz korišćenje graničnih uslova $v(0) = v'(0) = 0$ i prelaznih uslova na mjestu $z = z_p$ dobijamo jednačinu, tj. oblik deformisane neutralne ose. U integraciju se, međutim, nećemo upuštati.

Zaostali naponi. – Ako u trenutku kada je greda elasto-plastično deformisana silom $F_T < F < F_m$, izvršimo rasterećenje, tj. uklonimo silu F , dio krivine ose grede se povlači, a dio ostaje kao trajna (plastična) deformacija. Zapravo, dio grede $z \geq z_p$ na sl. 14:27 je samo elastično deformisan, pa njegova krivina u potpunosti iščezava sa rasterećenjem, dok je dio grede $z < z_p$ elasto-plastično deformisan tako da se samo jedan dio krivine tog dijela grede povlači sa rasterećenjem, dok drugi dio ostaje kao trajna (zaostala, rezidualna) krivina. Prema tome,

$$k(z) = \begin{cases} 0, & z_p \leq z \leq l \\ \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{F(l-z)}{bh^2 \sigma_T}} \frac{K_T}{EI_x} (l-z), & 0 \leq z \leq z_p. \end{cases} \quad (19)$$

Ista je situacija sa naponom. S obzirom da je rasterećenje elastično, oduzimanjem raspodjele napona

$$\sigma_{zz}(y) = -\frac{F(l-z)}{I_x} y \quad (20)$$

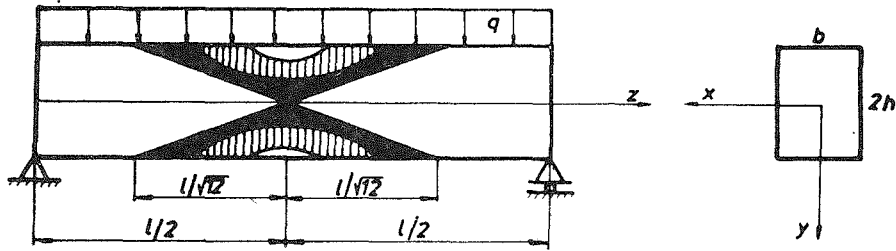


Sl. 14:30.

od raspodjele koja odgovara elasto-plastičnom stanju deformacije na sl. 14:27, dobijamo polje zaostalih napona u gredi. Jasno je da su u dijelu grede $z \geq z_p$ zaostali naponi jednaki nuli, jer je taj dio grede bio samo elastično deformisan, pa se zaostali naponi javljaju samo u dijelu grede $z < z_p$. Zaostale napone u ovom dijelu dobijamo ako od (6) oduzmemo (23), što je skicirano za uočeni presjek $0 \leq z \leq z_p$ na sl. 14:30.

Napomena: U ovom odjeljku analizirali smo elasto-plastično savijanje konzole koncentrisanom silom na kraju. U slučaju drugačijeg oslanjanja i opterećenja grede analiza se sprovodi slično. Na primjer, može se pokazati da se kod proste grede opterećene ravnomjernim kontinualnim opterećenjem duž cijelog raspona grede, plastične zone šire kao što je to skicirano na sl. 14:31. Granično opterećenje je

$$q_{gr} = \frac{8M_{gr}}{l^2} = 8 \frac{bh^2}{l^2} \sigma_T \quad (21)$$



Sl. 14:31.

14.5. Dimenzionisanje prema graničnoj nosivosti

Ranije smo formulisali i koristili kriterijum dimenzionisanja grednog nosača koji je bio baziran na pronalaženju kritične tačke grednog nosača, saglasno usvojenoj hipotezi o slomu, u kojoj uporedni napon nije smio da dostigne unaprijed zadatu vrijednost karakterističnu za dati materijal. Vidjeli smo, međutim, u prethodnim poglavljima da dostizanje kritičnog naponskog stanja u tački znači samo da u toj tački počinje plastična deformacija, dok nosač i dalje zadržava svoju nosivost. Tek kada se plastične zone prošire toliko da nosač postane mehanizam, dolazi do gubljenja njegove dalje nosivosti, tj. do stvarnog sloma. Opterećenje pri kome se ovo javlja nazivamo graničnim opterećenjem. Dimenzionisanje nosača prema graničnom stanju kada on postaje mehanizam daje daleko bolju sliku o stvarnoj nosivosti nosača nego što to daje dimenzionisanje prema kritičnom naponskom stanju lokalno, u tački. Zato se sve više dimenzionisanje danas vrši na bazi određivanja graničnog stanja i graničnog opterećenja. Ovakvo dimenzionisanje nazivamo dimenzionisanje prema graničnoj nosivosti.

Kod statički određenih nosača granično stanje, tj. mehanizam sloma, je uglavnom lako utvrditi. Ako je u pitanju aksijalno opterećena konstrukcija, granično stanje nastupa kada se štap u kome je najveći napon plastificira, tj. kada napon u njemu dostigne vrijednost napona na granici plastičnog tečenja σ_T . Kod nosača opterećenog na torziju granično stanje nastupa kada se u kritičnom presjeku, gdje je najveći moment torzije, plastičnost proširi po čitavom presjeku, tj. kada moment torzije u tom presjeku dostigne vrijednost graničnog momenta torzije M_T^{gr} (koji je za kružni poprečni presjek jednak $\frac{2\pi}{3} R^3 \tau_T$). Kod nosača opterećenog na savijanje granično stanje nastupa kada se u kritičnom presjeku gdje je najveći moment savijanja plastičnost proširi po cijelom presjeku (čime se formira plastični zglob), tj. kada moment savijanja u tom presjeku dostigne vrijednost graničnog momenta savijanja M_{gr} (koji je za pravougaoni poprečni presjek dimenzija $b \times 2h$ jednak $bh^2 \sigma_T$).

Kod statički neodređenih nosača situacija je složenija. Ukoliko je nosač n puta statički neodređen, za granično stanje je potrebno u principu da se $(n+1)$ štap plastifikuje, ukoliko je u pitanju aksijalno opterećena konstrukcija, odnosno da se formira $(n+1)$ plastični zglob, ukoliko je u pitanju nosač opterećen na torziju ili savijanje. To je zato što n puta statički neodređen nosač postaje statički određen nakon formiranja n plastičnih zglobova, jer je na raspolaganju n novih jednačina

(da je u plastičnim zglobovima moment jednak M_{gr} , odnosno da je u plastifikovanim štapovima sila jednaka $\sigma_T A$), pa je potrebno da se formira još samo jedan plastični zglob i da nosač postane mehanizam, tj. da dođe u granično stanje, ukoliko već nije postao mehanizam. Može se, naime, dogoditi, za određenu geometriju i opterećenje, da do sloma n puta statički neodređenog nosača dođe i pri manjem broju plastičnih zglobova od $(n+1)$ usljed formiranja lokalnog mehanizma na nekom dijelu nosača (vidi primjer 14.11).

Jasno je da će se kod aksijalno opterećene konstrukcije prvo plastifikovati štapovi u kojima su najveći naponi, odnosno da će se kod nosača opterećenog na torziju ili savijanje plastični zglobovi formirati u presjecima ekstremalnih momenata torzije, odnosno savijanja. No, da bi se precizno znali štapovi sa najvećim naponom, odnosno presjeci sa najvećim momentom, potrebno je prethodno riješiti elastičan problem. Ovo, međutim, može biti obiman posao, pa se pri određivanju graničnog stanja direktno pretpostavljaju mogući mehanizmi sloma, i za svaki od njih računa korespondentno granično opterećenje. Stvarni mehanizam sloma koji će se zaista dogoditi je onaj za koji je sračunato granično opterećenje najniže. Ovo granično opterećenje je stvarno opterećenje do kog se nosač smije opteretiti. Pri sračunavanju graničnog opterećenja koriste se ili klasične jednačine statike ili metod virtualnog rada, kao što je ilustrovano u primjerima koji slijede.

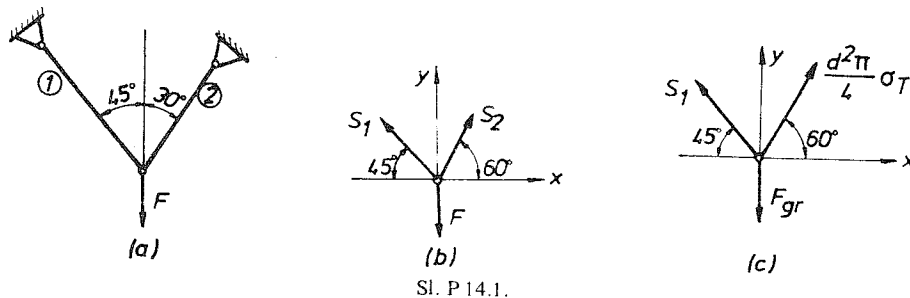
Na kraju ističemo da se prilikom dimenzionisanja prema graničnoj nosivosti uvodi, iz uobičajenih razloga, i odgovarajući koeficijent sigurnosti kojim se smanjuje granično i definiše dozvoljeno opterećenje

$$F_d = \frac{1}{n} F_{gr} \quad (1)$$

Primjeri

Primjer 14.1.

Odrediti graničnu silu konstrukcije na sl. P 14.1 (a). Štapovi su kružnog poprečnog presjeka prečnika $d=2$ cm i od materijala sa granicom plastičnog tečenja $\sigma_T=20$ kN/cm².



Rješenje:

Iz uslova ravnoteže (sl. P 14.1 (b)) je

$$S_2 \cos 60^\circ - S_1 \cos 45^\circ = 0, \quad S_2 = \sqrt{2} S_1.$$

Dakle, $S_2 > S_1$, pa pošto je $A_1 = A_2 = \frac{d^2 \pi}{4}$, slijedi $\sigma_2 > \sigma_1$, pa će se štap ② prvo plastifikovati. Konstrukcija time dolazi u granično stanje (sl. P 14.1 (c)). Graničnu silu dobijamo iz:

$$S_1 \cos 45^\circ - \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_T \cos 60^\circ = 0$$

$$F_{gr} - \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_T \sin 60^\circ - S_1 \sin 45^\circ = 0,$$

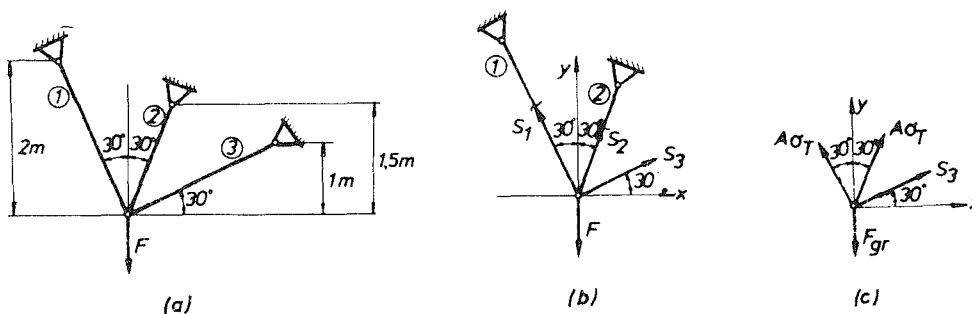
što daje:

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_T$$

$$F_{gr} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_T = 85,6 \text{ kN}.$$

Primjer 14.2.

Odrediti silu F_T pri kojoj počinje plastičnost u konstrukciji na sl. P 14.2 (a). Naći takođe i graničnu silu F_{gr} . Štapovi su kružnog poprečnog presjeka prečnika $d = 2 \text{ cm}$ i od materijala sa $\sigma_T = 16 \text{ kN/cm}^2$.



Sl. P 14.2.

Rješenje:

Konstrukcija je jedanput statički neodređena. Zamislimo da smo uklonili štap ③ (sl. P 14.2 (b)). Tada je:

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} F + \frac{1}{\sqrt{3}} S_3, \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} F - \frac{2}{\sqrt{3}} S_3. \quad (a)$$

Nepoznatu vrijednost sile S_3 dobićemo iz

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial S_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{S_i \frac{\partial S_i}{\partial S_3} l_i}{EA} = 0: \frac{1}{\sqrt{3}} (F + S_3) \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} (F - 2S_3) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{3} + S_3 \cdot 1 \cdot 2 = 0,$$

što daje $S_3 = \frac{1}{8 + 3\sqrt{3}} F$. Zamjenom u (a) sada slijedi:

$$S_1 = 0,622F, \quad S_2 = 0,490F.$$

Pošto su poprečni presjeci svih štapova isti, zaključujemo da je $\sigma_{\max} = \sigma_1$ (jer je $S_{\max} = S_1$), pa će plastičnost prvo početi u štapu ①. Silu F_T dobijamo iz:

$$0,622F_T = \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_T, \quad F_T = \frac{1}{0,622} \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_T = 80,77 \text{ kN}.$$

Granično stanje će nastupiti kada još jedan štap postane plastičan. Kako je $S_2 > S_3$, granično stanje je kao na sl. P 14.2 (c). Silu F_{gr} dobijamo iz:

$$S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} + A \sigma_T \frac{1}{2} - A \sigma_T \frac{1}{2} = 0$$

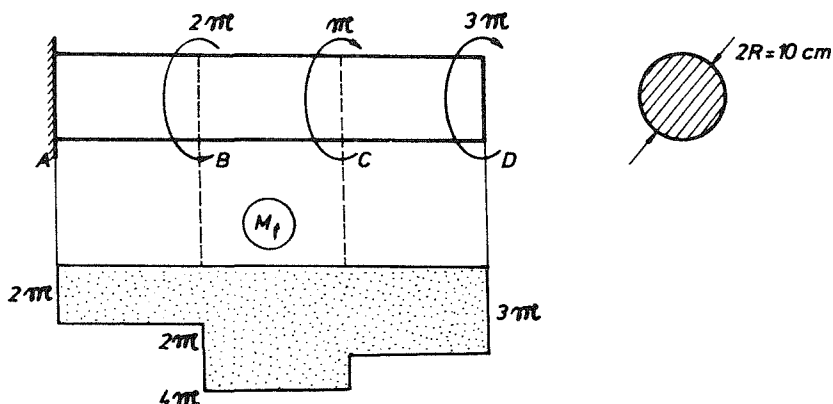
$$F_{gr} - A \sigma_T \frac{\sqrt{3}}{2} - A \sigma_T \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

što daje:

$$S_3 = 0, \quad F_{gr} = \sqrt{3} A \sigma_T = \sqrt{3} \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_T = 86,92 \text{ kN}.$$

Primjer 14.3.

Odrediti vrijednost graničnog momenta torzije: M_{gr} za nosač na sl. P 14.3. Dato je $\tau_T = 10 \text{ kN/cm}^2$.



Sl. P 14.3.

Rješenje:

Sa dijagrama momenta torzije vidimo da je kritičan dio nosača dio BC jer je tamo najveći moment torzije $M_t^{\max} = 4M_{gr}$. Granično stanje je definisano sa

$$M_t^{\max} = M_{gr}^{\max}: \quad 4M_{gr} = \frac{2\pi}{3} R^3 \tau_T,$$

odakle je

$$M_{gr} = \frac{\pi}{6} R^3 \tau_T = 6,545 \text{ kNm}.$$

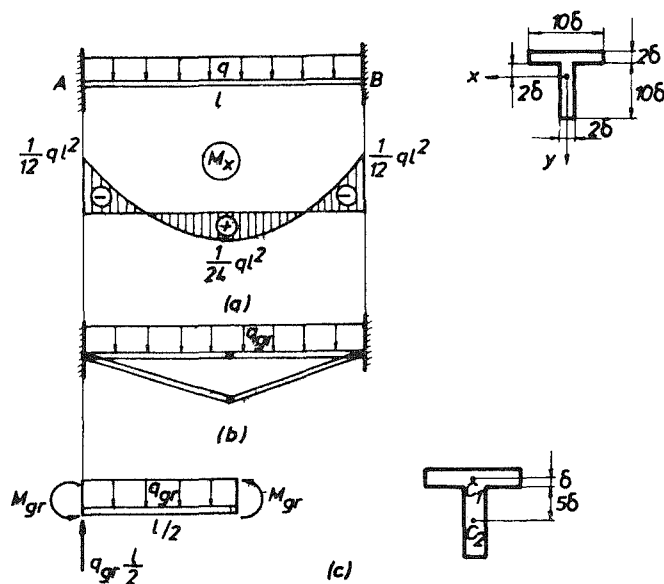
Primjer 14.4.

Za obostrano ukliještenu gredu na sl. P 14.4 (a) odrediti q_T i q_{gr} . Dato je l , δ , σ_T .

Rješenje:

Za T profil na slici je: $I_x = 533 \delta^4$, $y_{\max} = 8\delta$, pa veličinu kontinualnog opterećenja pri kome počinje plastičnost u gredi nalazimo iz:

$$\sigma_{zz}^{\max} = \frac{M_A}{I_x} y_{\max} = \frac{\frac{1}{12} q l^2}{533 \delta^4} 8\delta = \sigma_T, \quad q_T = 800 \frac{\delta^3}{l^2} \sigma_T.$$



Sl. P 14.4

Vrijednost graničnog opterećenja pri kome nosač postaje mehanizam (sl. P 14.4 (b)) dobijamo iz:

$$M_{gr} - q_{gr} \frac{l}{2} + M_{gr} = 0, \quad q_{gr} = \frac{16M_{gr}}{l^2}.$$

No, granični moment savijanja za T profil je

$$M_{gr} = \sigma_T \frac{A}{2} d = \sigma_T \cdot 20\delta^2 \cdot 6\delta = 120\delta^3 \sigma_T,$$

pa je

$$q_{gr} = 1920 \frac{\delta^3}{l^2} \sigma_T.$$

Primjer 14.5.

Odrediti polje zaostalih momenta u gredi iz prethodnog primjera ako se neposredno nakon dostizanja graničnog opterećenja q_{gr} izvrši rasterećenje, tj. ukloni opterećenje q_{gr} .

Rješenje:

Moment savijanja u gredi koji odgovara graničnom stanju (sl. P 14.5 (a)) definisan je sa

$$M_x(z) = -\frac{1}{16} q_{gr} l^2 + \frac{1}{2} q_{gr} lz - q_{gr} \frac{z^2}{2}. \quad (a)$$

Rasterećenje se odvija elastično, pa je raspodjela momenta koja odgovara rasterećenju (sl. P 14:5 (b))

$$\tilde{M}_x(z) = \frac{1}{12} q_{gr} l^2 - \frac{1}{2} q_{gr} lz + q_{gr} \frac{z^2}{2}. \quad (b)$$

Zaostali moment se dobija superpozicijom (a) i (b):

$$M_{res} = M_x + \tilde{M}_x = \frac{1}{48} q_{gr} l^2,$$

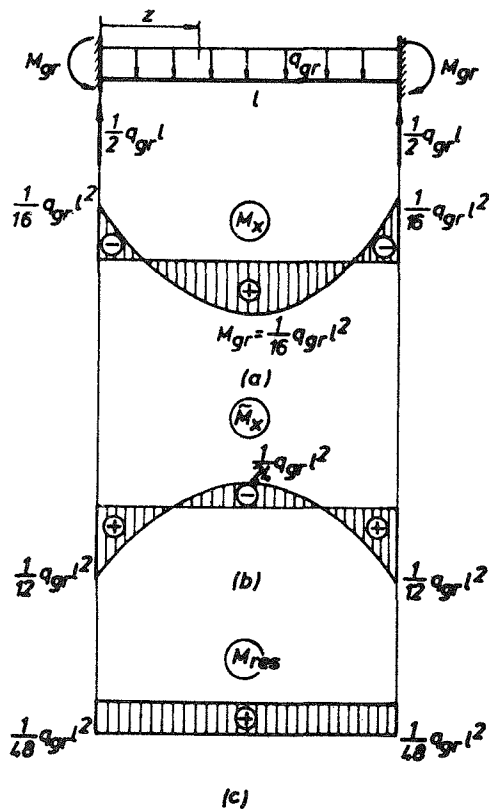
pa kako je

$$q_{gr} = \frac{16M_{gr}}{l^2},$$

dobijamo

$$M_{res} = 40\delta^3 \sigma_T,$$

što je prikazano na sl. P 14.5 (c).



Sl. P 14.5.

Primjer 14.6.

Odrediti graničnu silu nosača na sl. P 14.6 (a). Poznato je R, l, σ_T .

Rješenje:

Granični moment koji odgovara kružnom poprečnom presjeku (sl. P 14.6(b)) je

$$M_{gr} = \sigma_T \frac{A}{2} d = \frac{4}{3} R^3 \sigma_T. \quad (a)$$

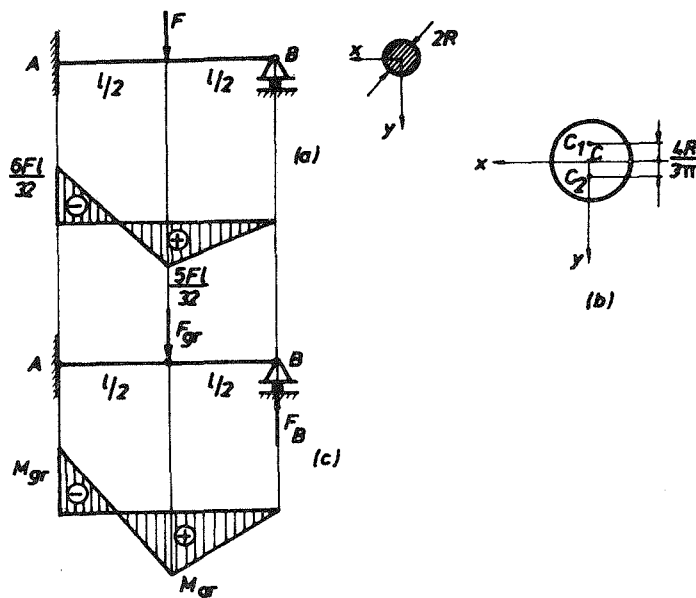
Pri graničnom stanju nosača (sl. P 14.6(b)) je:

$$F_B \frac{l}{2} = M_{gr}, \quad F_B = \frac{2M_{gr}}{l}$$

$$F_B l - F_{gr} \frac{l}{2} = -M_{gr}, \quad F_{gr} = \frac{6M_{gr}}{l},$$

pa korišćenjem (a) dobijamo

$$F_{gr} = \frac{64}{l^3} R^3 \sigma_T = 8 \frac{R^3}{l} \sigma_T.$$



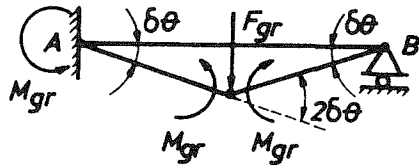
Sl. P 14.6.

Primjer 14.7.

Odrediti graničnu silu u prethodnom primjeru koristeći princip virtualnog rada.

Rješenje:

Grafičnu silu možemo dobiti i koristeći princip virtualnog rada: za sistem u ravnoteži je rad sila na virtualnom pomjeranju sistema jednak nuli. Dakle,



Sl. P 14.7.

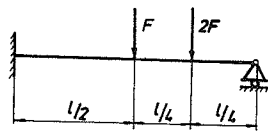
$$\delta \mathcal{A} = F_{gr} \frac{l}{2} \delta\theta - M_{gr} \delta\theta - M_{gr} 2\delta\theta = 0, \quad (a)$$

pa je $F_{gr} = \frac{6M_{gr}}{l}$. (U relaciji (a) rad momenta M_{gr} je negativan jer se momenta M_{gr} suprotstavljaju virtualnom pomjeranju $\delta\theta$).

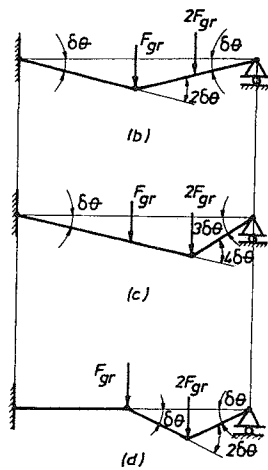
Primjer 14.8.

Odrediti grafičnu silu F_{gr} nosača na sl. P 14.8 (a). Dato je l i M_{gr} .

Rješenje:



(a)



Sl. P 14.8.

Nosač je jedanput statički neodređen pa je za mehanizam sloma, tj. grafično stanje potrebno da se formiraju dva plastična zgloba. Naravno, plastični zglobovi će se formirati na mjestima ekstremuma momentnog dijagrama nosača. Ekstremumi momentnog dijagrama su očigledno u presjecima u uklještenju i ispod sila F i $2F$. Da bismo odredili u koja se dva od ova tri presjeka formiraju plastični zglobovi, koristimo najčešće sljedeći postupak: pretpostave se svi mogući mehanizmi sloma i sračuna korespondentno grafično opterećenje; pravi mehanizam sloma je onaj za koji je grafično opterećenje najniže. Mogući mehanizmi sloma za nosač na sl. P 14.8 (a) prikazani su na sl. P 14.8 (b) — (d).

Za slučaj (b) je:

$$F_{gr} \frac{l}{2} \delta\theta + 2F_{gr} \frac{l}{4} \delta\theta - M_{gr} \delta\theta - M_{gr} 2\delta\theta = 0 \quad F_{gr} = 3 \frac{M_{gr}}{l}$$

za slučaj (c):

$$F_{gr} \frac{l}{2} \delta\theta + 2F_{gr} \frac{l}{4} 3\delta\theta - M_{gr} \delta\theta - M_{gr} 4\delta\theta = 0 \quad F_{gr} = \frac{5}{2} \frac{M_{gr}}{l}$$

a za slučaj (d):

$$2F_{gr} \frac{l}{4} \delta\theta - M_{gr} \delta\theta - M_{gr} 2\delta\theta = 0 \quad F_{gr} = 6 \frac{M_{gr}}{l}$$

Stvarna granična sila je

$$F_{gr} = \min \left\{ 3 \frac{M_{gr}}{l}, \frac{5 M_{gr}}{2 l}, 6 \frac{M_{gr}}{l} \right\} = \frac{5 M_{gr}}{2 l},$$

a mehanizam sloma je mehanizam prikazan na sl. P 14.8 (c).

Primjer 14.9.

Odrediti granično opterećenje nosača na sl. P 14.9 (a) ako je poznato l i M_{gr} .

Rješenje:

Nosač je jedanput statički neodređen pa su potrebna dva plastična zgloba za mehanizam sloma. Jedan plastični zglob će se formirati u uklještenju jer je tamo maksimalan negativni moment, a drugi plastičan zglob će se formirati negdje između A i B , jer je tamo maksimalan pozitivni moment. Prema tome, mehanizam sloma je kao na sl. P 14.9 (b), s tim što ćemo veličinu b odrediti naknadno iz uslova minimuma funkcije $q_{gr} = q_{gr}$ (b).

Iz principa virtualnog rada je

$$\delta \mathcal{A} = \int_0^l q_{gr} dz \cdot \delta v(z) - M_{gr} \delta \theta - M_{gr} (\delta \theta + \delta \theta_1) = 0,$$

tj.

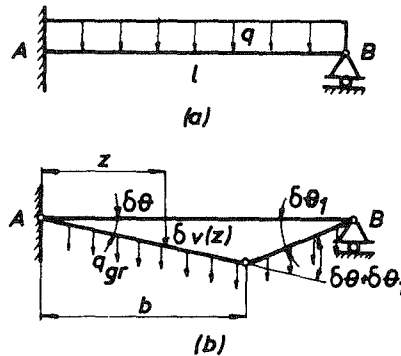
$$q_{gr} \int_0^l \delta v(z) dz - M_{gr} (2\delta \theta + \delta \theta_1) = 0. \quad (a)$$

Kako je

$$\int_0^l \delta v(z) dz = \frac{1}{2} l \cdot b \delta \theta, \quad \delta \theta_1 = \frac{b}{l-b} \delta \theta,$$

dobijamo iz (a)

$$q_{gr} = \frac{2M_{gr}}{l} \frac{2l-b}{b(l-b)}. \quad (b)$$



Sl. P 14.9.

Ovo je zavisnost $q_{gr} = q_{gr}$ (b). Stvarno q_{gr} pri kome će doći do sloma je minimum ove funkcije. Iz uslova minimuma $\frac{dq_{gr}}{db} = 0$, dobijamo $b = (2 - \sqrt{2}) l$, što zamjenom u (b) daje

$$q_{gr} = \frac{2M_{gr}}{l^2} (3 + 2\sqrt{2}) \cong 11,66 \frac{M_{gr}}{l^2}.$$

Primjer 14.10.

Dimenzionisati prema graničnoj nosivosti gredu pravougaonog poprečnog presjeka na sl. P 14.10 (a) ako je: $F = 10$ kN, $l = 2$ m, $\sigma_T = 16$ kN/cm². Koeficijent sigurnosti je $n = 2$.

Rješenje:

Uobičajenom procedurom, pretpostavljajući alternativne mehanizme sloma (sa tri plastična zgloba) i računajući korespondentno F_{gr} , nalazimo da je stvarna granična sila $F_{gr} = \frac{9 M_{gr}}{2 l}$, dok je mehanizam sloma prikazan na sl. P 14.10 (b).

Dimenzionisanje nosača vršimo iz zahtjeva

$$F < F_d = \frac{1}{n} F_{gr} = \frac{1}{n} \frac{9}{2} \frac{M_{gr}}{l},$$

što daje

$$M_{gr} > n \frac{2}{9} Fl. \quad (a)$$

No, za pravougaoni poprečni presjek je

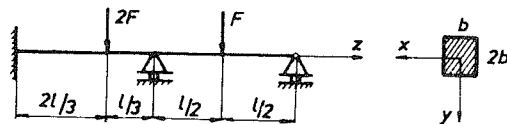
$$M_{gr} = \sigma_T \frac{A}{2} d = \sigma_T b^3,$$

pa zamjenom u (a) imamo

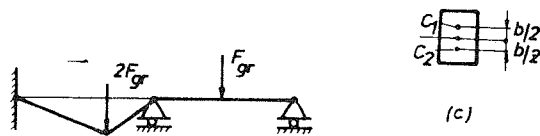
$$\sigma_T b^3 > n \frac{2}{9} Fl,$$

odakle je

$$b > \sqrt[3]{n \frac{2Fl}{9\sigma_T}} = 3,8 \text{ cm.}$$



(a)



(b)

(c)

Sl. P 14.10.

Primjer 14.11.

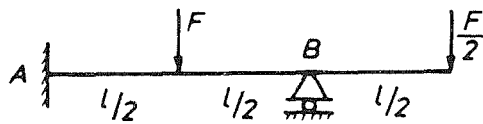
Odrediti mehanizam sloma i granično opterećenje nosača na sl. P 14.11 (a) ako je poznato l i M_{gr} .

Rješenje:

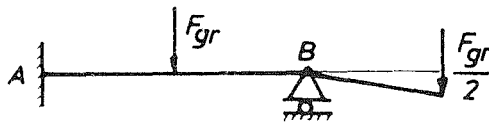
Ovaj primjer pokazuje da n puta statički neodređen nosač može preći u mehanizam i pri manjem broju plastičnih zglobova od $(n+1)$. Zaista, ovaj nosač je jedanput statički neodređen, a do sloma dolazi već pri formiranju prvog plastičnog zgloba.

Naime, rješavanjem elastičnog problema nalazimo da je maksimalni moment u nosaču u presjeku B , pa se plastični zglob prvo tamo formira. No, to već predstavlja mehanizam, kao što je skicirano na sl. P 14.11 (b). Graničnu silu dobijamo iz

$$\frac{F_{gr}}{2} \frac{l}{2} = M_{gr}, \quad F_{gr} = \frac{4M_{gr}}{l}$$



(a)

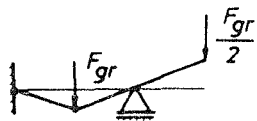


(b)

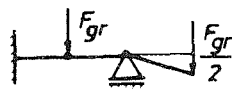
Sl. P 14.11 (a) - (b).

Napomena: Ista vrijednost za graničnu silu, međutim, dobila bi se i da smo konstruisali alternativne mehanizme sloma sa dva plastična zgloba, pa prosljedili kao u prethodnim primjerima (sl. P 14. 11 (c)). Granična sila je

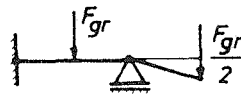
$$F_{gr} = \min \left\{ 12 \frac{M_{gr}}{l}, 4 \frac{M_{gr}}{l}, 4 \frac{M_{gr}}{l} \right\} = 4 \frac{M_{gr}}{l}$$



$$F_{gr} = 12 \frac{M_{gr}}{l}$$



$$F_{gr} = 4 \frac{M_{gr}}{l}$$



$$F_{gr} = 4 \frac{M_{gr}}{l}$$

Sl. P 14.11 (c).

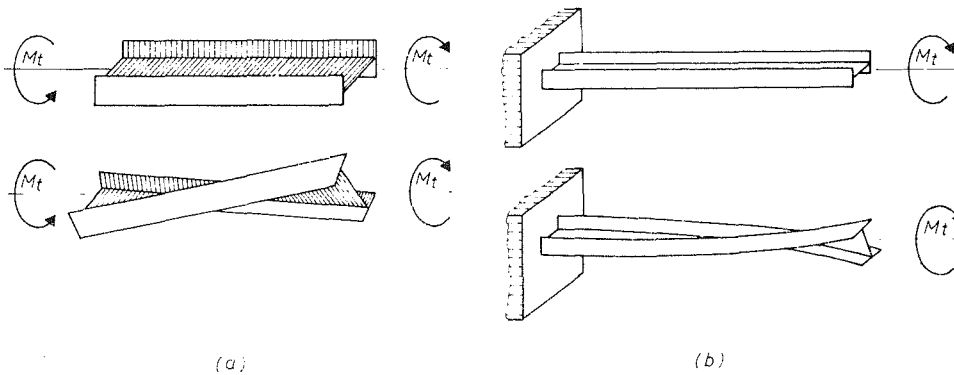
15. OGRANIČENA TORZIJA TANKOZIDNIH ŠTAPOVA OTVORENOG PROFILA

15.1. Uvodne napomene

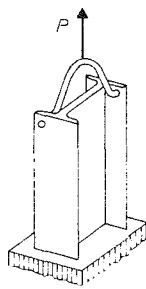
Razmatrajući torziju prizmatičnih štapova proizvoljnog poprečnog presjeka (glava 10) vidjeli smo da pored rotacije poprečnih presjeka u svojoj ravni, tačke poprečnog presjeka imaju i uzdužno pomjeranje (vitoperenje, krivljenje, deplanaciju) $u_z = u_z(x, y)$, koje je nezavisno od uzdužne z koordinate štapa ukoliko je štap opterećen samo sa dva momenta torzije na inače slobodnim krajevima štapa (sl. 15:1 (a)). Ovo je tzv. slobodna (neograničena, neometena) torzija pri kojoj se u štapu javljaju samo smičući naponi σ_{zx} i σ_{zy} . Ukoliko je, međutim, deplanacija nekog poprečnog presjeka sprečena (na primjer, lijevi kraj štapa ukliješten, sl. 15:1 (b)), tada je očigledno deplanacija promjenljiva od presjeka do presjeka, tj. $u_z = u_z(x, y, z)$, pa se nužno javlja dilatacija $\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ i, prema tome, normalni napon σ_{zz} . Uzdužna vlakna (paralelna z osi) nisu nakon deformacije neophodno prava (kao kod slobodne torzije), već postaju zakrivljena, tj. pored torzije javlja se i savijanje (sl. 15:1 (b)). Ovakvu torziju, sa prisustvom normalnog napona usljed neslobodne deplanacije poprečnih presjeka, nazivamo ograničena ili ometena (ponekad i savojna) torzija. Ograničena torzija javlja se u mnogim slučajevima. Pored navedenog slučaja ukliještenog štapa, javlja se, na primjer, i u štapu opterećenom na sredini raspona koncentrisanim momentom torzije koji na krajevima uravnotežuju dva jednaka momenta: zbog simetrije nema deplanacije srednjeg poprečnog presjeka, dok se ostali poprečni presjeci deplaniraju, pa opet imamo slučaj ograničene torzije. Uopšte, ukoliko se moment torzije mijenja po dužini štapa (na primjer, štap opterećen kontinuirano raspoređenim momentom torzije), ili ako je štap promjenljivog poprečnog presjeka, javlja se promjenljiva deplanacija poprečnih presjeka i ograničena torzija. Efekti ograničene torzije (na primjer, prisustvo normalnog napona) za štapove punog presjeka, kao što su kružni, kvadratni i sl., po pravilu su zanemarljivi. Međutim, jako su izraženi i moraju se uzeti u obzir kod tankozidnih štapova otvorenog profila, jer oni pri torziji imaju, usljed male torziona krutosti, znatno veću deplanaciju poprečnih presjeka nego zatvoreni tankozidni i drugi, puni poprečni presjeci.

S druge strane, aksijalna sila i moment savijanja, primijenjeni na tankozidni štap na određen način, mogu pored istežanja, odnosno savijanja, da izazovu i (ograničenu) torziju, tj. obrtanje i deplanaciju poprečnih presjeka koji su promjenljivi duž ose štapa. Ovo je, na primjer, za aksijalnu silu ilustrovano na sl. 15:2. Na sl. 15:3 prikazan je moment savijanja (intenziteta Ph) koji djeluje u ravni paralelnoj glavnoj ravni I profila (na udaljenju $b/2$ od nje), i koji pored savijanja izaziva i torziju štapa (slično situaciji na sl. 15:2). Očigledno, dakle, da za razliku od punih štapova, za tankozidne štapove Saint-Venantov princip (str. 114) u opštem slučaju ne važi.

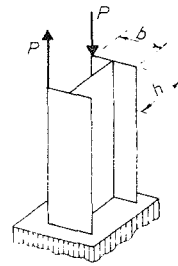
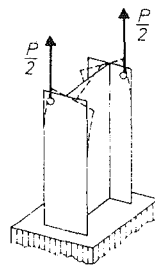
Zbog svih navedenih i drugih specifičnosti u ponašanju tankozidnih štapova ovu glavu posvećujemo analizi deformacije i naprezanja prizmatičnih proizvoljno opterećenih tankozidnih štapova otvorenog profila.



Sl. 15:1.



Sl. 15:2.



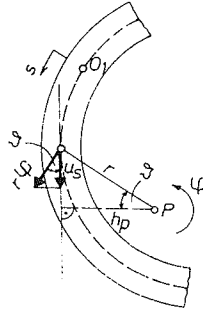
Sl. 15:3.

15.2. Vitoperenje (krivljenje) poprečnog presjeka

Posmatrajmo prvo slobodnu torziju tankozidnog štapa otvorenog profila. U poglavlju 10.1. vidjeli smo da pomjeranje tačaka poprečnog presjeka uvijenog štapa odgovara čistoj rotaciji u ravni poprečnog presjeka i vitoperenju koje je konstantno za sve poprečne presjeke, a promjenljivo unutar poprečnog presjeka. Zbog male debljine tankozidnog štapa posmatraćemo promjenu vitoperenja samo duž srednje linije profila, tj. posmatraćemo funkciju $u_z = u_z(s)$, gdje je s lučna koordinata duž srednje linije mjerena od proizvoljne nulte tačke O_1 . Pomjeranje u ravni profila odgovara čistoj rotaciji oko proizvoljne tačke (pola) P . Ako sa r označimo udaljenje uočene tačke srednje linije profila od pola P , a sa φ ugao rotacije profila, tada je pomjeranje uočene tačke u ravni profila upravno na r i jednako $r\varphi$ (sl. 15:4). Ako komponentu ovog pomjeranja u pravcu tangente na srednju liniju označimo sa u_s , tada je očigledno

$$u_s = r\varphi \cos \vartheta = h_p \varphi, \quad (1)$$

gdje je h normalno udaljenje pola P od tangente na srednju liniju profila u uočenoj tački. S druge strane, vidjeli smo da je, izuzev u okolini krajeva profila, smičući napon u pravcu tangente na srednju liniju profila, jednak nuli u tačkama



Sl. 15:4.

$$\tau_{zs} = 2 G \varepsilon_{zs} = G \left(\frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) = 0,$$

gdje je G modul smicanja. Odavde imamo

$$\frac{\partial u_z}{\partial s} = - \frac{\partial u_s}{\partial z}, \quad (2)$$

tj. nakon korišćenja (1) i integracije

$$u_z = - \frac{d\varphi}{dz} \int_0^s h_p ds + u_z^o, \quad (3)$$

gdje je $u_z^o = \text{const.}$ uzdužno pomjeranje nulte tačke $s = 0$. No, integral na desnoj strani (3) predstavlja sektorsku koordinatu u odnosu na pol P i nultu tačku O_1 (vidi odjeljak A.7.1. u dodatku A knjige), tj.

$$\omega_p(s) = \int_0^s h_p ds, \quad (4)$$

pa izraz za vitoperenje postaje

$$u_z = - \frac{d\varphi}{dz} \omega_p(s) + u_z^o. \quad (5)$$

Kod slobodne torzije ugao rotacije φ se linearno mijenja duž ose štapa (vidi poglavlje 10.1., str 205), pa je $d\varphi/dz = \text{const.}$ i vitoperenje (5) je nezavisno od z . Konsekventno, uzdužna dilatacija $\varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z$ je identički jednaka nuli, pa pošto su i dilatacije u ravni profila jednake nuli (jer profil u svojoj ravni samo rotira), normalni napon je takođe nula, $\sigma_{zz} = 0$. Iz (5) dalje vidimo da je promjena vitoperenja duž srednje linije definisana promjenom sektorske koordinate, dok je intenzitet vitoperenja proporcionalan izvodu ugla rotacije, tj. uglu torzije $(\cdot) = d(\cdot)/dz$. Kako je kod tankozidnih štapova otvorenog profila, zbog male torzionalne krutosti, ugao torzije veliki (vidi primjer 10.9, str. 242), kod ovakvih štapova je i vitoperenje naročito izraženo.

Izraz (5) možemo približno koristiti i za vitoperenje otvorenih profila pri ograničenoj torziji, pretpostavljajući da je φ proizvoljna (nelinearna) funkcija

od z , tako da je $d\varphi/dz \neq \text{const}$. Tada iz (5) očigledno slijedi $u_z = u_z(s, z)$, pa je $\varepsilon_{zz} \neq 0$ i $\sigma_{zz} \neq 0$, tj. efekti koji odgovaraju ograničenoj torziji, kao što je diskutovano u prethodnom poglavlju.

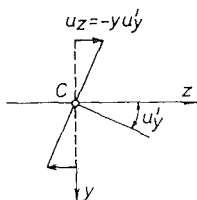
Vraćajući se na slučaj slobodne torzije, pokazaćemo sada da je razlika u izrazu za vitoperenje koja se dobija različitim izborom pola (P, odnosno druge proizvoljne tačke Q) jednaka linearnoj funkciji koordinata x i y u ravni profila, te je prema tome, razlika u rješenju slobodne torzije pri različitom izboru pola (centra rotacije profila) jednaka translaciji i rotaciji cijelog štapa kao krutog tijela, bez dodatnih napona i deformacija. Zaista, unoseći u (5) izraz (A.1:4) za vezu između sektorskih koordinata u odnosu na dva različita pola P i Q, dobijamo

$$u_z = -\frac{d\varphi}{dz} \omega_q(s) + u_z^0 - \frac{d\varphi}{dz} (A + Bx + Cy),$$

gdje su $A = y_0(x_p - x_q) - x_0(y_p - y_q)$, $B = (y_p - y_q)$ i $C = -(x_p - x_q)$, pri čemu su x_0 i y_0 koordinate nulte tačke $s = 0$ profila u odnosu na izabrani koordinatni sistem (x, y) .

15.3. Izraz za uzdužno pomjeranje pri proizvoljnom naprezanju tankozidnog štapa

Ukoliko je štap opterećen ravnomjerno raspoređenim aksijalnim opterećenjem po bazisima, poprečni presjeci se translatorno pomjeraju u pravcu z ose, ostajući ravni i paralelni sami sebi. Rotaciju poprečnog presjeka oko glavnih centralnih osa inercije izazivaju momenti savijanja oko tih osa. Na primjer, uzdužno pomjeranje tačke na udaljenju y od z ose, usljed rotacije poprečnog presjeka izazvane momentom M_x , je $u_z = -yu'_y$ (sl.15:5), gdje je u_y pomjeranje u y pravcu težišta poprečnog presjeka, a $u'_y = du_y/dz$ nagib, tj. ugao rotacije



Sl. 15:5.

poprečnog presjeka oko x ose. Slično je uzdužno pomjeranje usljed rotacije poprečnog presjeka oko y ose jednako $(-xu'_x)$. Rukovodeći se ovim i izrazom za vitoperenje poprečnog presjeka usljed ograničene torzije, datim u prethodnom poglavlju, pretpostavićemo da je u opštem slučaju naprezanja tankozidnog štapa uzdužno pomjeranje tačaka srednje linije profila dato sa

$$w(s, z) = w^0(z) - u'_c(z)x - v'_c(z)y - \varphi'(z)\omega_c(s), \quad (1)$$

gdje $w^0(z)$ predstavlja dio pomjeranja u z pravcu usljed translacije profila, $-u'_c(z)x$ i $-v'_c(z)y$ dio uzdužnog pomjeranja usljed rotacije profila oko njegovih glavnih centralnih osa inercije (sa u_c i v_c označene su u_x i u_y komponenten-

ta pomjeranja težišta C profila), dok $-\varphi'(z)\omega_c(s)$ predstavlja dio uzdužnog pomjeranja od vitoperanja (krivljenja) profila usljed ograničene torzije. Dakle, izrazom (1) pretpostavljeno je da nema promjene oblika (konture) profila u svojoj ravni, tj. da profil samo translira i rotira u njoj. (U realnosti su deformacije tankozidnih štapova u opštem slučaju praćene promjenom oblika profila, ali se ugradnjom poprečnih ukrućenja — dijafragmi ovo u velikoj mjeri može eliminisati). U izrazu (1) je takođe zanemaren dio uzdužnog pomjeranja, tj. krivljenja koje odgovara prisustvu transferzalne sile u poprečnom presjeku, što je opravdano s obzirom da je za tankozidne štapove otvorenog profila ovaj dio krivljenja znatno manji od krivljenja usljed ograničene torzije.

Koristeći kinematičke relacije ravnog kretanja za vezu komponentalnih pomjeranja dviju tačaka u ravni profila, pomjeranja u_c i v_c težišta profila možemo izraziti preko pomjeranja proizvoljne tačke (pola) P (x_p, y_p) u ravni profila i ugla obrtanja profila φ :

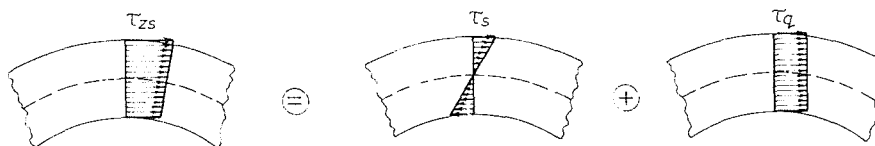
$$\begin{aligned} u_c &= u_p + y_p \varphi \\ v_c &= v_p - x_p \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Zamjenom ovih izraza i izraza (A.7.1:3) koji daje vezu između sektorskih koordinata u odnosu na težište C i proizvoljan pol P, u izraz (1) dobijamo alternativni izraz za uzdužno pomjeranje tačaka srednje linije profila

$$w(s, z) = w_0(z) - u'_p(z)x - v'_p(z)y - \varphi'(z)\omega_p(s). \quad (3)$$

15.4. Pretpostavke o komponentalnim naponima i presječne sile

Pri naprezanju tankozidnog štapa otvorenog profila dominantni po svojoj veličini su normalni napon σ_{zz} i smičući napon τ_{zs} koji djeluju u ravni poprečnog presjeka. Zbog male debljine zida profila komponentu smicanja τ_{zn} u ravni poprečnog presjeka u pravcu normale na srednju liniju profila možemo zanemariti. Isto tako zanemarimo međusobno normalno djejestvo uzdužnih vlakana štapa, tj. normalne napone σ_{ss} i σ_{nn} , kao i smičući napon τ_{ns} . Normalni napon σ_{zz} pretpostavićemo konstantnim po (maloj) debljini zida (a promjenljivim duž srednje linije profila), dok ćemo za smičući napon τ_{zs} pretpostaviti da se sastoji iz dva dijela: napona τ_s raspoređeno linearno po debljini zida, na isti način kao i kod slobodne torzije, i napona τ_q koji je konstantan po debljini zida (sl.15:6) i koji je neophodan da bi se obiježbedila podužna (u z pravcu) ravnoteža, s obzirom na prisustvo duž z ose promjenljivog normalnog napona σ_{zz} .



Sl. 15.6.

Transferzalne sile u x i y pravcu u poprečnom presjeku (ukoliko postoje) su rezultante unutrašnjih sila ($\tau_q t ds$) u x i y pravcu, tj:

$$T_x = - \int \tau_q \sin \alpha t ds = \int t \tau_q dx = \int q dx \quad (1)$$

$$T_y = \int \tau_q \cos \alpha t ds = \int t \tau_q dy = \int q dy,$$

gdje je integral uzet po cijeloj dužini srednje linije profila, t je debljina zida profila, a α ugao koji normala na srednju liniju gradi sa $+x$ osom (sl.15:7). Veličina $q = t\tau_q$ naziva se tok smicanja.

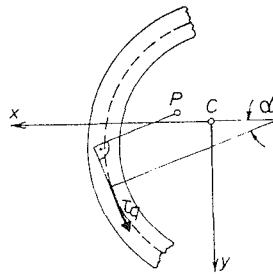
Moment smičućih sila u poprečnom presjeku za proizvoljnu tačku (pol) P u ravni profila (sl.15:7) je

$$M_p = M_s + \int h_p \tau_q t ds = M_s + M_{\omega_p}. \quad (2)$$

gdje je M_s dio momenta usljed napona slobodne torzije τ_s (Saint-Venantov dio momenta torzije), a

$$M_{\omega_p} = \int h_p \tau_q t ds = \int q d\omega_p \quad (3)$$

dio momenta usljed napona τ_q (tzv. torzioni moment krivljenja ili savojno-ujojni moment). U (3) je $d\omega_p = h_p ds$ priraštaj sektorske koordinate u odnosu na pol P i izabranu nultu tačku srednje linije profila.



Sl. 15:7.

Rezultujuća aksijalna sila i momenti savijanja u poprečnom presjeku oko glavnih centralnih osa inercije poprečnog presjeka su dati preko normalnog napona σ_{zz} :

$$N_z = \int_A \sigma_{zz} dA \quad (4)$$

$$M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA \quad (5)$$

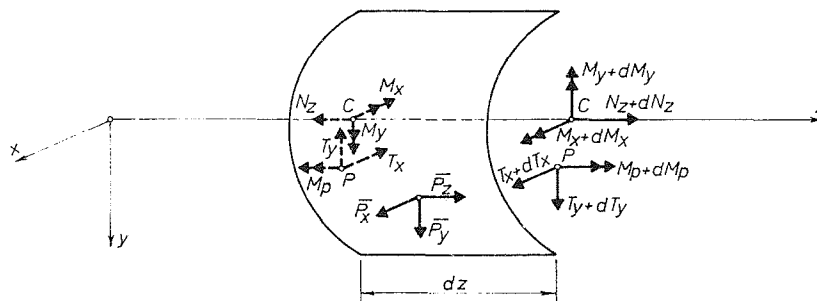
$$M_y = \int_A x \sigma_{zz} dA, \quad (6)$$

gdje je A površina profila ($dA = t ds$).

15.5. Veza između presječnih sila i spoljašnjeg opterećenja

U cilju uspostavljanja veze između presječnih sila i spoljašnjeg opterećenja izdvojimo iz napregnutog štapa element dužine dz . Na lijevoj strani djeluju presječne sile T_x , T_y , N_z , M_x , M_y i M_p , a na desnoj te iste promijenjene

za odgovarajući priraštaj duž z ose (sl.15:8). Po bočnoj površini štapa pretpostavimo da djeluje specifično opterećenje \bar{p} (po jedinici površine srednje površi štapa definisane uzdužnom linijom i srednjom linijom profila), čije su komponente u pravcima koordinatnih osa \bar{p}_x , \bar{p}_y i \bar{p}_z . Postavljanjem šest uslova ravnoteže elementa na siici



Sl. 15:8.

i zanemarivanjem malih veličina višeg reda, dobijamo:

$$\begin{aligned}dT_x + dz \int \bar{p}_x ds &= 0 \\d T_y + dz \int \bar{p}_y ds &= 0 \\d N_z + dz \int \bar{p}_z ds &= 0 \\d M_x - T_y dz + dz \int y \bar{p}_z ds &= 0 \\d M_y - T_x dz + dz \int x \bar{p}_z ds &= 0 \\d M_p - dz \int \left[(y - y_p) \bar{p}_x - (x - x_p) \bar{p}_y \right] ds &= 0,\end{aligned}$$

gdje su, kao i prije, integrali uzeti po cijeloj dužini srednje linije profila. Ako sa:

$$p_x = \int \bar{p}_x ds, \quad p_y = \int \bar{p}_y ds, \quad p_z = \int \bar{p}_z ds \quad (1)$$

označimo rezultante površinskog opterećenja po jedinici dužine štapa (linijsko opterećenje), a sa:

$$m_x = \int y \bar{p}_z ds, \quad m_y = \int x \bar{p}_z ds, \quad m_p = \int \left[(x - x_p) \bar{p}_y - (y - y_p) \bar{p}_x \right] ds \quad (2)$$

njihove rezultante oko odgovarajućih osa (spoljni podijeljeni momenti savijanja, odnosno torzije), tada uslovi ravnoteže postaju:

$$T'_x = -p_x \quad (3)$$

$$T'_y = -p_y \quad (4)$$

$$N'_z = -p_z \quad (5)$$

$$M_x = T_y - m_x \quad (6)$$

$$M_y = T_x - m_y \quad (7)$$

$$M_p = -m_p \quad (8)$$

S obzirom da je moment torzije M_p jednak zbiru Saint-Venantovog dijela i torzionog momenta krivljenja ($M_p = M_s + M_{\omega_p}$), (8) možemo prepisati i u obliku

$$M_s + M_{\omega_p} = -m_p \quad (9)$$

15.6. Izraz za normalni napon

Iz Hookeovog zakona, imajući u vidu pretpostavke $\sigma_{ss} = \sigma_{nn} = 0$, slijedi da je normalni napon

$$\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} \quad (1)$$

gdje je E modul elastičnosti materijala, a ε_{zz} uzdužna dilatacija koja je, koristeći izraz za pomjeranje (15.3:3), data sa

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = w'(z) - u_p''(z)x - v_p''(z)y - \varphi''(z)\omega_p(s) \quad (2)$$

S obzirom da smo zanemarili promjenu vitoperenja duž debljine zida, ε_{zz} je konstantno po debljini zida, pa, prema tome, iz (1) i normalni napon se ne mijenja po debljini (što smo i pretpostavili u poglavlju 15.4). Zamjenom (1) i (2) u izraze za presječne sile (15.4:4) — (15.4:6), imamo:

$$N_z = E (w' A - \varphi'' S_{\omega_p}) \quad (3)$$

$$M_x = -E (v_p'' I_x + \varphi'' I_{y\omega_p}) \quad (4)$$

$$M_y = -E (u_p'' I_y + \varphi'' I_{x\omega_p}), \quad (5)$$

gdje su I_x i I_y momenti inercije profila za x i y ose, S_{ω_p} sektorski statički moment, a $I_{x\omega_p}$ i $I_{y\omega_p}$ sektorski centrifugalni moment profila u odnosu na izabrani pol P . Kao što je pokazano u dodatku A knjige (vidi odjeljak A.7.2) tačka (pol) D za koju su sektorski centrifugalni momenti jednaki nuli naziva se glavni pol ili centar smicanja (savijanja) profila. Koristeći glavni pol, dakle, izrazi (4) i (5) postaju:

$$M_x = -EI_x v_D'' \quad (6)$$

$$M_y = -EI_y u_D'' \quad (7)$$

S druge strane glavna nulta tačka na srednjoj liniji profila je nulta tačka za koju je sektorski statički moment profila jednak nuli (vidi, takođe, A.7.2.). Mjereći, dakle, sektorsku koordinatu počev od glavne nulte tačke, izraz (3) se svodi na:

$$N_z = EA w'_0. \quad (8)$$

Sektorska koordinata definisana u odnosu na glavni pol i glavnu nultu tačku naziva se normirana sektorska koordinata i označava sa Ω . Prema tome, uvođenjem normirane sektorske koordinate dobili smo uobičajene izraze iz standardne teorije grede za vezu između momenta savijanja i deformacije, odnosno aksijalne sile i deformacije, s tim što su u (6) i (7) u_D i v_D (koje ćemo ubuduće označavati prosto sa u i v) pomjerenja u x i y pravcu centra smicanja, a ne težišta profila. Na primjer, ukoliko imamo slučaj ograničene torzije izazvane samo spoljnim momentom torzije, recimo na desnom kraju ukliještene konzole, tada je $M_x = M_y = N_z = 0$ u svakom poprečnom presjeku, tj. normalni naponi σ_{zz} u svakom poprečnom presjeku sami sebe uravnotežuju, a iz (6) i (7) (zajedno sa graničnim uslovima) slijedi da se centar smicanja ne pomjera u svojoj ravni, tj. poprečni presjek pri ograničenoj torziji rotira u svojoj ravni oko centra smicanja profila.

Zamjenom (6)–(8) u (2) dobijamo izraz za napon

$$\sigma_{zz} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x - E\varphi'' \Omega, \quad (9)$$

koji se od poznatog izraza za gredu napregnutu kombinovano, aksijalnim opterećenjem i savijanjem, razlikuje za dio proporcionalan normiranoj sektorskoj S obzirom da je $S_\Omega = I_{x\Omega} = I_{y\Omega} = 0$, očigledno da je dio normalnog napona ($-E\varphi''\Omega$) u svakom poprečnom presjeku daje uravnotežen sistem sila.

Množenjem (9) sa normiranom sektorskom koordinatom i integraljenjem po površini profila, dobijamo

$$B_\Omega = EI_\Omega \varphi''', \quad (10)$$

gdje je

$$B_\Omega = \int_A \Omega \sigma_{zz} dA \quad (11)$$

izv. bimoment, veličina sa dimenzijom sila x (dužina)², a

$$I_\Omega = \int_A \Omega^2 dA$$

sektorski moment inercije, geometrijska karakteristika profila sa dimenzijom (dužina)⁶. Zamjenom (10) u (9) dobijamo konačno

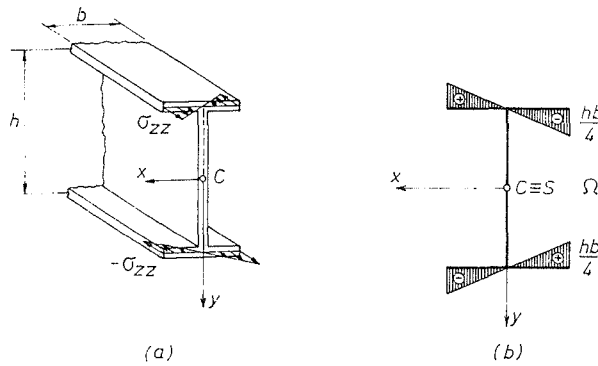
$$\sigma_{zz} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B_\Omega}{I_\Omega} \Omega. \quad (12)$$

Treba, međutim, istaći da za razliku od aksijalne sile N_z i momenata savijanja M_x i M_y , koji se mogu uvijek odrediti iz uslova ravnoteže, ukoliko su poznate spoljašnje sile i reakcije, bimoment B_Ω (kao posljedica uravnoteženog dijela raspodjele normalnog napona u poprečnom presjeku, nastalog usljed krivljenja karakterističnog za ograničenu torziju) ne može se odrediti iz uslova ravnoteže, već jedino preko ugla obrtanja profila φ , saglasno sa (10). Da bismo dali više fizičku interpretaciju bimomenta kao veličine, posmatrajmo štap I profila

na čijim krajevima djeluju normalni naponi raspoređeni linearno po širini horizontalnih djelova (pojaseva) profila, sa suprotnim znakom u jednom u odnosu na drugi pojas, dok u vertikalnom dijelu (rebru) ne djeluju nikakvi naponi (sl. 15:9 (a)). Očigledno, takva raspodjela napona sama sebe uravnotežuje. Moment (suprotnih) spregova u pojasevima je

$$M_p = \int_{A_p} x \sigma_{zz} dA,$$

gdje je sa A_p označena površina pojasa ($A_p = bt$, b -širina, a t -debljina pojasa). Na sl. 15:9 (b) prikazan je dijagram normirane sektorske koordinate I profila (vidi primjer A.17 (a) u dodatku A knjige). U tačkama srednje linije

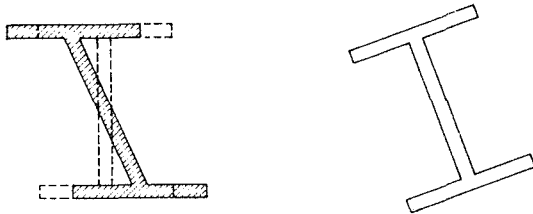


Sl. 15:9

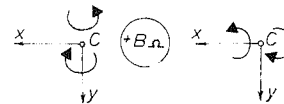
rebra je $\Omega = 0$, dok je u donjem, odnosno gornjem pojasu promjena Ω definisana sa $\Omega = hx/2$, odnosno $\Omega = -hx/2$, pa izraz za bimoment raspodjele napona na sl. 15:9 (a) postaje

$$B_{\Omega} = \int_A \Omega \sigma_{zz} dA = \int_{A_p} \frac{h}{2} x \sigma_{zz} dA + \int_{A_p} \left(-\frac{h}{2} x\right) (-\sigma_{zz}) dA = h \int_{A_p} x \sigma_{zz} dA = h M_p,$$

tj. bimoment je jednak proizvodu veličine momenta dvaju jednakih i suprotnih spregova (tzv. bispreg) i odstojanja između ravni dještva tih spregova. Prisustvo bimomenta (odnosno bisprega) u poprečnom presjeku tankozidnog profila izaziva obrtanje profila, tj. povezano je sa uvijanjem štapa. Zaista, na pri-



Sl. 15:10.



Sl. 15:11.

mjer kod posmatranog štapa I profila trebalo bi da usljed djejtva spregova dođe do savijanja pojaseva u njihovoj ravni tako da bi nakon deformacije štapa poprečni presjek izgledao kao što je prikazano osijenčeno na sl. 15:10 (a). Međutim, ovakav oblik narušava uvedenu pretpostavku da se poprečni presjek ne deformiše u svojoj ravni (jer rebro nije ostalo upravno na pojaseve), pa zaključujemo da se profil mora zaokrenuti za određeni ugao (sl. 15:10 (b)), tj. usljed bimomenta dolazi do (ograničene) torzije štapa. Na kraju napominjemo da se iz analize I profila može zaključiti da pozitivne vrijednosti bimomenta odgovaraju paru spregova sa smjerom kao na sl. 15:11.

15.7. Izraz za smičući napon

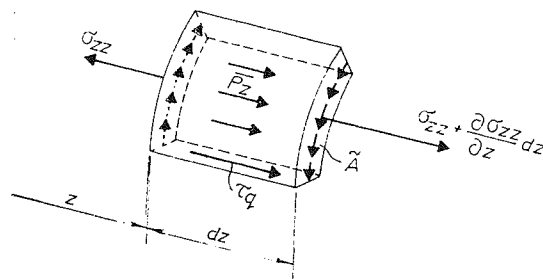
Smičući napon τ_s , koji se linearno mijenja po debljini zida profila, računamo kao smičući napon od slobodne (Saint-Venantove) torzije, tj. prema obrascu (vidi poglavlje 10.8)

$$\tau_s = 2G\Theta n,$$

gdje je n ($-\frac{t}{2} \leq n \leq \frac{t}{2}$) udaljenje od srednje linije profila u pravcu normale na nju, $\Theta = \varphi'$ ugao torzije, a G modul smicanja. Smičući napon τ_s , koji je posljedica savijanja ili ograničene torzije, javlja se da bi se obezbijedila ravnoteža u z pravcu, s obzirom na promjenljivost normalnog napona σ_{zz} u tom pravcu. Zaista, posmatrajmo element štapa isiječen sa dvije ravni upravne na uzdužnu z osu štapa na rastojanju dz , i sa jednom ravni koja je upravna na srednju liniju profila, a nalazi se na udaljenju \tilde{s} duž srednje linije od kraja profila. Neka je podužna spoljašnja površinska sila (po jedinici površine srednje površine štapa) \bar{p}_z , tada iz uslova ravnoteže u z pravcu (sl. 15:12) slijedi

$$\tau_s t dz + \int_{\tilde{A}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz dA + \int_{\tilde{s}} \bar{p}_z dz ds = 0, \quad (1)$$

gdje je \tilde{A} površina odsiječenog dijela profila, a τ_s smičući napon na mjestu gdje smo uzdužno presjekli štap. Koristeći izraz



Sl. 15:12.

za normalni napon u zavisnosti od deformacije, imamo

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = E (w'' - u''' x - v''' y - \varphi''' \Omega),$$

što nakon zamjene u (1) daje

$$\tau_q = \frac{1}{t} \left(\frac{\bar{A}}{A} p_z - \int_S \bar{p}_z ds \right) + \frac{E}{t} (\bar{S}_y u''' + \bar{S}_x v''' + \bar{S}_\Omega \varphi'''), \quad (2)$$

gdje su \bar{S}_x i \bar{S}_y statički moment inercije, a \bar{S}_Ω sektorski statički moment odsiječenog dijela površine profila \bar{A} :

$$\bar{S}_x = \int_A y dA, \quad \bar{S}_y = \int_A x dA, \quad \bar{S}_\Omega = \int_A \Omega dA,$$

a $p_z = -N'_z = -EA w'_0$ (vidi (15.5:5) i (15.6:8)) uzdužna spoljašnja sila po jedinici dužine štapa (linijsko opterećenje (15.5:1)₃).

Izraz (2) daje smičući napon u zavisnosti od spoljašnjeg (podužnog) opterećenja i deformacijskih veličina (u , v i φ). Da bismo izveli izraz za smičući napon u zavisnosti od odgovarajućih presječnih sila, iskoristimo prvo uslove ravnoteže (15.5:6) i (15.5:7) koji, koristeći veze (15.6:6) i (15.6:7), daju sljedeće izraze za vezu transferzalnih sila i deformacija:

$$T_x - m_y = -EI_y u''' \quad (3)$$

$$T_y - m_x = -EI_x v''' \quad (4)$$

S druge strane, zamjenom (2) u (3) (pri čemu je $\omega_p = \Omega$), dobijamo

$$M_\Omega - m_\Omega = -EI_\Omega \varphi''', \quad (5)$$

gdje je

$$m_\Omega = \int \Omega \bar{p}_z ds \quad (6)$$

spoljni bimoment po jedinici dužine štapa (spoljni podijeljeni bimoment m_Ω) Pri ovome su korištene jednakosti:

$$\int \left(\frac{\bar{A}}{A} p_z - \int_S \bar{p}_z ds \right) d\Omega = \int \Omega \bar{p}_z ds$$

$$\int \bar{S}_x d\Omega = 0, \quad \int \bar{S}_y d\Omega = 0, \quad \int \bar{S}_\Omega d\Omega = -I_\Omega,$$

koje se lako dokazuju korišćenjem parcijalne integracije. Zamjenom (3), (4) i (5) u (2) dobijamo za smičući napon τ_q preko presječnih sila

$$\tau_q = \frac{1}{t} \left(\frac{\bar{A}}{A} p_z - \int_S \bar{p}_z ds \right) - \frac{(T_x - m_y) \bar{S}_y}{I_y t} - \frac{(T_y - m_x) \bar{S}_x}{I_x t} - \frac{(M_\Omega - m_\Omega) \bar{S}_\Omega}{I_\Omega t} \quad (7)$$

U slučaju da po bočnoj površini štapa ne postoji podužno površinsko opterećenje ($\bar{p}_z = 0$), (7) se svodi na

$$\tau_q = -\frac{T_x \bar{S}_y}{I_y t} - \frac{T_y \bar{S}_x}{I_x t} - \frac{M_\Omega \bar{S}_\Omega}{I_\Omega t}. \quad (8)$$

Prva dva člana na desnoj strani (8) su doprinos smičućem naponu τ_q od transferzalnih sila u presjeku (T_x i T_y), dok treći član predstavlja dio smičućeg napona τ_q usljed ograničene torzije, tj. torzionog momenta krivljenja M_Ω . Promjena ovog dijela smičućeg napona duž srednje linije profila je očigledno definisana promjenom sektora statičkog momenta \bar{S}_Ω . U slučaju slobodne torzije $M_\Omega = 0$ i τ_q je posljedica samo savijanja silama, što smo već analizirali u poglavlju 11.8. Uslov $M_\Omega = 0$ odgovara slučaju da rezultanta unutrašnjih smičućih sila u poprečnom presjeku prolazi kroz centar smicanja. Ukoliko je i $M_s = 0$, tada je štap opterećen samo na savijanje.

Konačno, vezu između ukupnog momenta torzije $M_D = M_s + M_\Omega$ u poprečnom presjeku i deformacije dobijamo koristeći (5) i poznati izraz za Saint-Venantov moment torzije (vidi (10.8:13))

$$M_s = GI_t \varphi', \quad (9)$$

gdje je I_t moment inercije pri torziji tankozidnog profila, dakle

$$M_D = GI_t \varphi' + EI_\Omega \varphi'' = m_D, \quad (10)$$

Slično kao što se bimoment ne može odrediti direktno iz uslova ravnoteže, ni momenti M_s i M_Ω se pojedinačno ne mogu odrediti bez određivanja ugla rotacije φ . Primijeti takođe i vezu

$$M_\Omega = B'_\Omega + m_\Omega, \quad (11)$$

koja očigledno slijedi iz (15.6:10) i (15.7:5).

15.8. Diferencijalne jednačine tankozidnog štapa

Iz prethodnih razmatranja smo vidjeli da su sve veličine od interesa u analizi tankozidnog štapa otvorenog profila (vitoperenje w , normalni napon σ_{zz} , smičući naponi τ_s i τ_q , te presječne sile T_x , T_y , N_z , M_x , M_y , M_s , M_Ω , i B_Ω) date preko četiri nepoznate deformacijske veličine: $w_0(z)$, $u(z)$, $v(z)$ i $\varphi(z)$. Diferencijalne jednačine za ove veličine direktno slijede kombinacijom izvedenih izraza. Zaista, iz (15.5:5) i (15.6:8) slijedi

$$\text{iz (15.5:3) i (15.7:3)} \quad EA w_0'' = -p_z, \quad (1)$$

$$EI_y u^{IV} = p_x + m_y', \quad (2)$$

$$\text{iz (15.5:4) i (15.7:4)} \quad EI_x v^{IV} = p_y + m_x', \quad (3)$$

$$\text{a iz (15.5:8) i (15.7:10)} \quad EI_t \varphi'' = m_D + m_\Omega', \quad (4)$$

Jednačine (1) — (3) su poznati oblici jednačina iz standardne teorije grede. Na primjer, jednačina (3) je diferencijalna jednačina elastične linije savijene grede usljed kontinualnog opterećenja p_y i podijeljenog momenta savijanja m_x . Za date granične uslove i poznato spoljašnje opterećenje integracija jednačina (1) — (3) vrši se na uobičajeni način (vidi odjeljak 11.14.2, str. 335). Diferencijalna jednačina (4) je diferencijalna jednačina ograničene torzije, čije rješenje, za date granične uslove, daje promjenu ugla obrtanja poprečnih presjeka duž ose štapa. Opšte rješenje ove nehomogene diferencijalne jednačine četvrtog reda, koju ćemo prepisati u obliku

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \frac{m_D + m'_D}{EI_\Omega}, \quad k^2 = \frac{GI_t}{EI_\Omega} \quad (5)$$

je

$$\varphi = A_1 \operatorname{ch} kz + A_2 \operatorname{sh} kz + A_3 z + A_4 + \varphi_{\text{part}}, \quad (6)$$

gdje je φ_{part} partikularni dio rješenja koji za datu desnu stranu jednačine u (5) treba posebno odrediti, a $A_1 - A_4$ su integracione konstante koje se određuju iz zadatih graničnih uslova, tj. uslova na krajevima štapa. Pri tome, ako je oslanjanje kraja štapa takvo da je obrtanje poprečnog presjeka spriječeno, a krivljenje omogućeno (tzv. viljuškasto oslanjanje), tada je na tom kraju:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \\ B_\Omega &= -EI_\Omega \varphi'' = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Ako je krivljenje spriječeno, a obrtanje dopušteno, tada je:

$$\begin{aligned} \varphi' &= 0 \\ M_D &= GI_t \varphi' - EI_\Omega \varphi''' + m_{\perp} = -EI_\Omega \varphi''' + m_{\perp} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

a ako je i obrtanje i krivljenje spriječeno, tada je:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \\ \varphi' &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Najzad, na slobodnom kraju štapa je:

$$\begin{aligned} M_D &= 0 \\ B_\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Ukoliko je u poprečnom presjeku na kraju štapa zadato površinsko opterećenje $\overline{p_{zx}}, \overline{p_{zy}}, \overline{p_{zz}}$ (granični uslovi po silama), tada su rezultujući moment torzije i bimoment na tom kraju dati sa:

$$M_D^* = \int_A [(x - x_D) \overline{p_{zy}} - (y - y_D) \overline{p_{zx}}] dA$$

$$B_{\Omega}^* = \int_{\Omega} \overline{p_{zz}} dA, \quad (11)$$

pa su granični uslovi na tom kraju:

$$\begin{aligned} M_D &= M_D^* \\ B_{\Omega} &= B_{\Omega}^* \end{aligned} \quad (12)$$

(Egzaktni granični uslovi po silama bi zapravo bili $\sigma_{zx} = \overline{p_{zx}}$, $\sigma_{zy} = \overline{p_{zy}}$ i $\sigma_{zz} = \overline{p_{zz}}$ na kraju štapa. Međutim, po pravilu je sa inženjerskim konstrukcijama neizvodivo doslovno ispunjenje ovih uslova, pa se zadovoljavamo zahtjevom o jednakosti momenta torzije, odnosno bimomenta dobijenog rješenja i stvarnog opterećenja na krajevima).

Ukoliko se uzdužno opterećenje na kraju sastoji od koncentrisanih sila P_i , tada je spoljni bimoment u poprečnom presjeku

$$B_{\Omega}^* = \sum_i \Omega_i P_i, \quad (13)$$

gdje su Ω_i sektorske koordinate profila na mjestima dještva koncentrisanih sila.

15.9. Specijalni slučajevi opterećenja

Proizvoljno spoljašnje opterećenje po omotaču tankozidnog štapa možemo posmatrati kao superpoziciju poprečnog ($\overline{p_z} = 0$) i podužnog opterećenja ($\overline{p_x} = \overline{p_y} = 0$). Razmotrimo ove slučajeve posebno

15.9.1. Poprečno opterećenje

Za poprečno opterećenje, tj. opterećenje koje je upravno na osu štapa ($\overline{p_z} = 0$) imamo iz (15.5:1) i (15.5:2): $\overline{p_z} = 0$, $m_x = m_y = 0$, a iz (15.7:6) $m_{\Omega} = 0$, pa diferencijalne jednačine (15.8:1) — (15.8:4) postaju:

$$EA w_0'' = 0 \quad (1)$$

$$EI_y u^{IV} = p_x \quad (2)$$

$$EI_x v^{IV} = p_y \quad (3)$$

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \frac{m_D}{EI_{\Omega}} \quad (4)$$

Očigledno da u opštem slučaju poprečno opterećenje izaziva kombinovano natezanje, savijanje i (ograničenu) torziju. Pitanje se prirodno postavlja: kakvo treba da bude opterećenje pa da imamo samo savijanje bez torzije, i obrnuto? U slučaju da se u štapu ne javlja torzija, obrtanje poprečnih presjeka mora biti jednako nuli ($\varphi = 0$). Jednačina (4) imaće takvo (trivijalno) rješenje ako je $m_D = 0$, tj. ako rezultanta spoljašnjeg opterećenja u svakom poprečnom

presjeku prolazi kroz centar smicanja, i ako su reakcije štapa u ravni poprečnog presjeka i takođe prolaze kroz centar smicanja. U ovom slučaju, naravno, i bimoment i ukupni moment torzije u svakom poprečnom presjeku su identički jednaki nuli, tj. $B_{\Omega} = 0$ i $M_D = 0$. Poprečni presjeci rotiraju oko glavnih centralnih osa inercije, bez krivljenja ($\varphi' = 0$), normalni napon je dat sa

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x, \quad (5)$$

a smičući

$$\tau_{zs} = \tau_q = -\frac{T_x \tilde{S}_y}{I_y t} - \frac{T_y \tilde{S}_x}{I_x t}, \quad (6)$$

s obzirom da je $M_{\Omega} = 0$, jer rezultanta smičućih napona u poprečnom presjeku prolazi kroz centar smicanja.

S druge strane, torziju bez savijanja (bez savijanja u smislu da je svakom poprečnom presjeku $M_x = M_y = 0$) imamo ako je štap opterećen raspoređenim ili koncentrisanim momentom torzije. U ovom slučaju normalni napon je

$$\sigma_{zz} = \frac{B_{\Omega}}{I_{\Omega}} \Omega \quad (7)$$

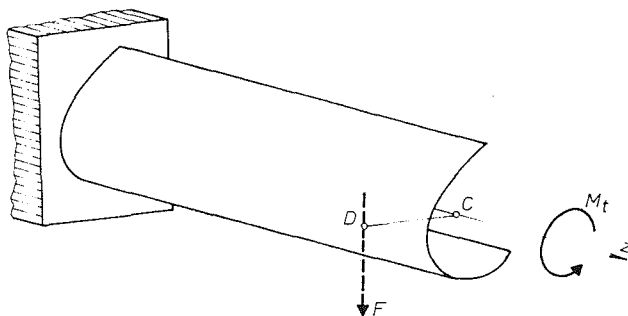
a smičući:

$$\tau_s = 2 \frac{M_s}{I_t} n \quad (8)$$

$$\tau_q = -\frac{M_{\Omega} \tilde{S}_{\Omega}}{I_{\Omega} t}, \quad (9)$$

gdje, naravno, $B_{\Omega} = -EI_{\Omega} \varphi''$, $M_s = GI_t \varphi'$ i $M_{\Omega} = -EI_{\Omega} \varphi'''$ možemo odrediti tek nakon rješavanja diferencijalne jednačine ograničene torzije (4), uz odgovarajuće granične uslove.

U slučaju torzije bez savijanja poprečni presjeci rotiraju oko centra smicanja. Zaista, posmatrajmo tankozidni nosač na sl. 15:13 pod dejstvom momenta torzije M_t . Na osnovu Bettieovog stava (poglavlje 5.5) rad momenta M_t na po-



Sl. 15:13.

mjeranju izazvanom silom F koja prolazi kroz centar smicanja D , jednak je radu sile F na pomjeranju od momenta M_t . No, sila F kroz centar smicanja D samo savija nosač ($\varphi = 0$), pa je rad momenta M_t na tom pomjeranju jednak nuli. Prema tome, i rad sile F na pomjeranju od M_t mora biti nula, što znači da se centar smicanja ne pomjera, tj. poprečni presjek pri torziji rotira oko njega. Dakle, centar smicanja ima dvostruko značenje: s jedne strane to je tačka kroz koju treba da prolazi rezultanta unutrašnjih sila koje teže u ravni poprečnog presjeka da bi nastupilo savijanje bez torzije, a s druge strane to je tačka oko koje se obrće poprečni presjek pri torziji bez savijanja.

Kao što je u odjeljku A.7.3. dodatka A pokazano, ako profil ima osu simetrije, centar smicanja je na njoj. Za profile sa dvije ili više osa simetrije, centar smicanja je u presjeku tih osa, tj. u težištu profila. Za profile sa centrom simetrije, centar smicanja je u centru simetrije, tj. težištu profila. Za profile sastavljene od pravih djelova koji se svi susjedu u jednom čvoru (na primjer, L, T, V, X, Y i slični profili), centar smicanja je u čvoru susjedanja. Kako je za ove profile normirana sektorska koordinata identički jednaka nuli duž cijelog profila, krivljenje presjeka je nula, tj. ovi profili ostaju ravni i poslije deformacije, a s obzirom da je $I_\Omega = 0$, naprezanje ne može imati karakter ograničene torzije (tj. neophodno: $B_\Omega = 0$ i $M_\Omega = 0$).

Na kraju napominjemo da spoljni koncentrisani moment savijanja M^* izazvan poprečnim silama koje djeluju u ravni paralelnoj ravni koja sadrži osu smicanja (na rastojanju e) izaziva savijanje i torziju, jer ga možemo predstaviti kao moment savijanja u ravni koja sadrži osu smicanja i bimoment veličine $M^* e$. Prvi izaziva savijanje, drugi torziju.

15.9.2. Podužno opterećenje

U slučaju podužnog opterećenja, tj. opterećenja u pravcu ose štapa ($\bar{p}_x = \bar{p}_y = 0$), diferencijalne jednačine (15.8:1) — (15.8:4) se svode na:

$$EAw'' = -p_z \quad (1)$$

$$EI_y u^{IV} = m_y' \quad (2)$$

$$EI_x v^{IV} = m_x' \quad (3)$$

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \frac{m_\Omega}{EI_\Omega}, \quad (4)$$

gdje je p_z uzdužno opterećenje po jedinici dužine, a

$$m_x = \int y \bar{p}_z ds, \quad m_y = \int x \bar{p}_z ds, \quad m_\Omega = \int \Omega \bar{p}_z ds \quad (5)$$

respektivno, podijeljeni spoljašnji momenti savijanja oko x i y ose (momenti savijanja po jedinici dužine), i spoljašnji podijeljen bimoment (bimoment po jedinici dužine). Iz jednačina (1) — (4), dakle, slijedi da u opštem slučaju podužno opterećenje izaziva složeno naprezanje, tj. kombinovano aksijalno naprezanje, savijanje i (ograničenu) torziju. S obzirom da je $\bar{p}_x = \bar{p}_y = 0$, iz jednačina (15.5:3) i (15.5:4) slijedi da je $T_x = 0$ i $T_y = 0$, pa ako na jednom kraju

štapa nemamo transferzalne sile, tada je $T_x = T_y = 0$ u cijelom štapu, a uslovi ravnoteže (15.5:6) i (15.5:7) postaju $M'_x = -m_x$ i $M'_y = -m_y$. S obzirom da je $m_D = 0$, uslov ravnoteže (15.5:8), odnosno (15.5:9) daje

$$M_D = M_s + M_\Omega = \text{const},$$

pa ako su na jednom kraju štapa samo aksijalne sile, tj. ako je spoljni moment torzije na tom kraju jednak nuli ($M_D = 0$), tada je u svakom poprečnom presjeku $M_D = 0$, tj. $M_s = -M_\Omega$, odnosno s obzirom na (15.7:5) i (15.7:9)

$$\varphi''' - k^2 \varphi' = \frac{m_\Omega}{EI_\Omega}, \quad (6)$$

što je, zaista, prvi integral od (4). Rješenje jednačine (4), odnosno (6) daje promjenu ugla obrtanja poprečnog presjeka usljed djejtva podužnog opterećenja. Granični uslovi za jednačinu (6), pored geometrijskih uslova o obrtanju i krivljenju krajnjih presjeka (φ i φ' propisano), mogu biti zadati i preko bimomenta u krajnjem presjeku koji je posljedica poznatih aksijalnih sila u tom presjeku, tj.

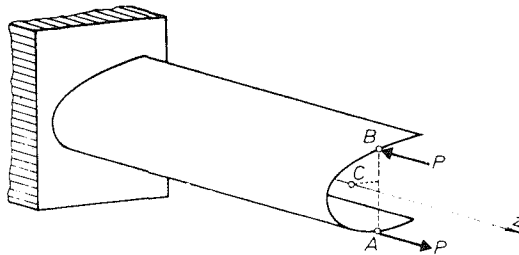
$$B_\Omega = -EI_\Omega \varphi'' = B_\Omega^*$$

gdje B_Ω^* računamo po obrascu (15.8:11), odnosno (15.8:13), zavisno da li su u pitanju površinske ili koncentrisane sile u krajnjem presjeku.

Opšte rješenje jednačine (6) je

$$\varphi = A_1 \text{ch} kz + A_2 \text{sh} kz + A_4 + \varphi_{\text{part}}, \quad k^2 = \frac{GI_t}{EI_\Omega} \quad (7)$$

što ne sadrži linearan član po z jer same aksijalne sile, naravno, ne mogu izazvati samo slobodnu torziju, tj. usljed samo aksijalnih sila torzije ili uopšte nema ili je ograničena. Na primjer, torzije uopšte nema ako je štap viljuškasto oslonjen na krajevima ($\varphi = \varphi'' = 0$ za $z = 0$ iz $z = L$) i ako je $m_\Omega = \text{const.}$ (tj. $\overline{p_z} = \text{const.}$) duž ose štapa, jer se u tom slučaju (7) svodi na trivijalno rješenje $\varphi = 0$. Isto tako, na primjer, konzola ukliještena na lijevom kraju a opterećena spregom aksijalnih sila na desnom kraju (sl. 15:14) biće napregnuta samo na savijanje ako je $\Omega(A) = \Omega(B)$ jer tada spoljni bimoment (koji izaziva torziju) $B^* = 0$, pa opet dobijamo $\varphi = 0$.



Sl. 15:14.

Primijeti suštinsku razliku između sprega nanesenog na štap podužnim i poprečnim silama. Spreg od podužnih sila nanesen i u ravni koja sadrži osu

smicanja izaziva savijanje i torziju (izuzev ako je $\Omega(A) = \Omega(B)$), dok spreg od poprečnih sila koje djeluju u ravni koja sadrži osu smicanja ne izaziva smicanje. Očigledno je, dakle, da za tankozidne štapove važi Varignonov princip u opštem slučaju ne važi.

Ukoliko podužna sila ne djeluje u tački srednje linije profila, već se iz neke druge tačke B preko krute veze prenosi na štap, tada se pokazuje da je njen bimoment $B_{\Omega}^* = P\Omega(B)$, gdje je $\Omega(B)$ normirana sektorska koordinata tačke B.

Vraćajući se na izraze za napone usljed podužnih sila, u opštem slučaju imamo:

$$\sigma_{zz} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B_{\Omega}}{I_{\Omega}} \Omega \quad (8)$$

$$\tau_q = \frac{1}{t} \left(\frac{\bar{A}}{A} p_z - \overline{p_z} ds \right) + \frac{m_y \bar{S}_y}{I_y t} + \frac{m_x \bar{S}_x}{I_x t} - \frac{(M_{\Omega} - m_{\Omega}) \bar{S}_{\Omega}}{I_{\Omega} t} \quad (9)$$

U slučaju da nemamo savijanje (na primjer, štap Z profila pritisnut sa dvije centrične podužne sile), $M_x = M_y = 0$ i gornji izrazi se svode na:

$$\sigma_{zz} = \frac{N_z}{A} + \frac{B_{\Omega}}{I_{\Omega}} \Omega \quad (10)$$

$$\tau_q = - \frac{M_{\Omega} \bar{S}_{\Omega}}{I_{\Omega} t} \quad (11)$$

Ako nemamo rezultujuću aksijalnu silu ($N_z = 0$), tada iz uslova ravnoteže (15.5:5) slijedi da je $p_z = 0$, a onda je i $m_x = m_y = m_{\Omega} = 0$ (zbog Varignonove teoreme, s obzirom da je $p_z = 0$), pa izrazi za napon postaju:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B_{\Omega}}{I_{\Omega}} \Omega \quad (12)$$

$$\tau_q = \frac{1}{t} \int_{\bar{s}} \overline{p_z} ds - \frac{M_{\Omega} \bar{S}_{\Omega}}{I_{\Omega} t} \quad (13)$$

U svim gornjim slučajevima je, naravno,

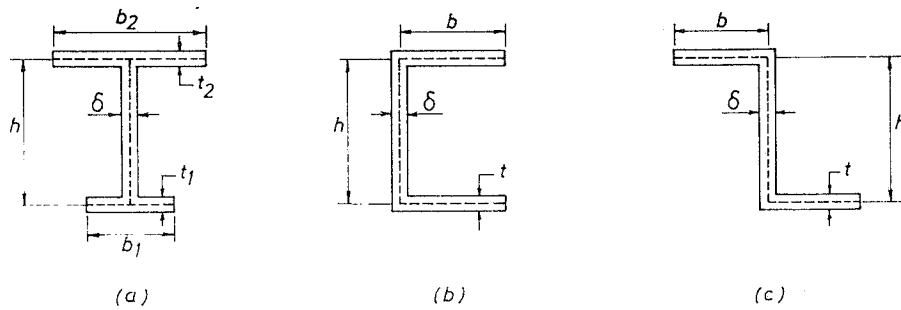
$$\tau_s = 2 \frac{M_s}{I_t} n \quad (14)$$

15.10. Primjeri

U primjerima koji slijede ilustrovaćemo primjenu izložene teorije sa akcentom na određivanju normalnog i smičućeg napona usljed ograničene torzije.

Primjer 15.1.

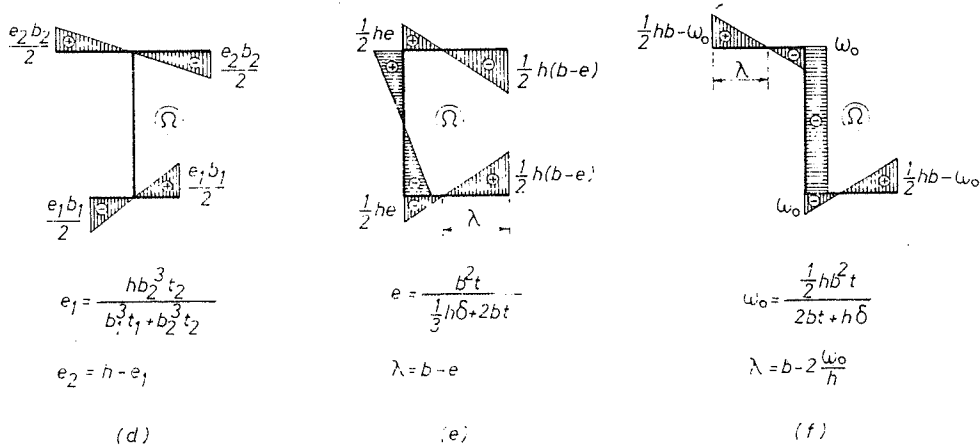
Za I, [i Z profil na sl. P 15.1 (a) — (c) odrediti dijagram sektorskog statičkog momenta \bar{S}_{Ω} .



Sl. P 15.1 (a) — (c).

Rješenje:

U primjeru A.17 (dodatak A knjige) odredili smo dijagrame normirane sektorske koordinate Ω za ove profile, koji su ovdje ponovljeni na sl. P 15.1 (d) — (f).



Sl. P 15.1 (d) — (f).

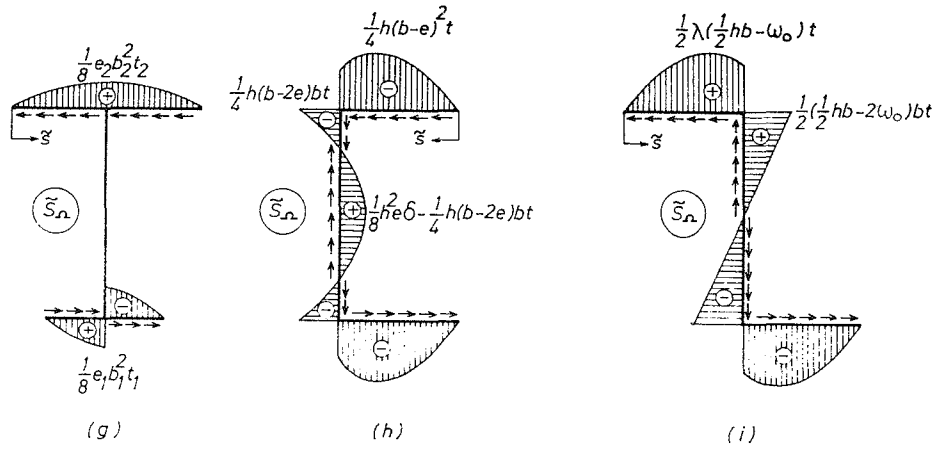
Sektorski statički moment \tilde{S}_Ω određujemo integracijom

$$\tilde{S}_\Omega = \int_A \Omega \, dA = \int_s \Omega \, t \, ds$$

počev od proizvoljnog slobodnog kraja profila u smjeru stalnog rasta \tilde{s} . (Često je pogodno računati \tilde{S}_Ω duž profila startujući sa raznih krajeva profila. Pri tome samo treba voditi računa o znaku za \tilde{S}_Ω i njegovoj pravilnoj vezi sa smjerom korespondentnog smičućeg napona τ_q). Da bismo nacrtali dijagram za \tilde{S}_Ω obično računamo vrijednost za \tilde{S}_Ω u nekoliko tačaka duž svakog pravog dijela profila (recimo na krajevima i u sredini svakog dijela). Na taj način dobijamo dijagrame prikazane na sl. P 15.1 (g) - (i). Na slikama je takođe prikazan smjer korespondentnog smičućeg napona

$$\tau_q = - \frac{M_\Omega \tilde{S}_\Omega}{I_\Omega t}$$

duž srednje linije profila, za slučaj da je $M_{\Omega} > 0$.



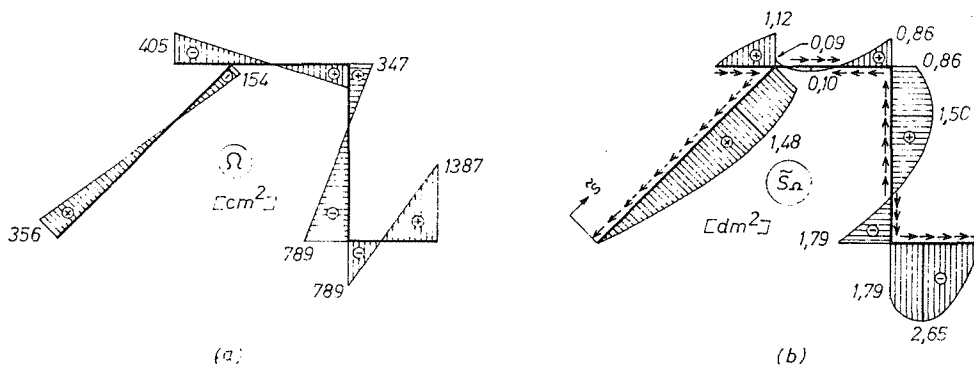
Sl. P 15.1 (g) — (i).

Primjer 15.2.

Odrediti dijagram sektorskog statičkog momenta \tilde{S}_{Ω} duž srednje linije profila u primjeru A.18 iz dodatka A knjige.

Rješenje:

U primjeru A.18 određen je dijagram normirane sektorske koordinate Ω , koji je ovdje prikazan na sl. P15.2 (a). Startujući od lijevog donjeg kraja profila u smjeru stalnog rasta \tilde{s} , dobijamo dijagram sektorskog statičkog momenta \tilde{S}_{Ω}



Sl. P 15.2.

kao što je prikazano na sl. P15.2 (b). Na slici je takođe prikazan i smjer korespondentnog smičućeg napona τ_q , za slučaj $M_\Omega > 0$.

Primijeti da se vrijednost $\tilde{S}_\Omega = 1,12 \text{ dm}^4$ jednostavno određuje preko površine trapeza kao

$$\frac{405 + 154}{2} \cdot 20 \cdot 2 = 11180 \text{ cm}^4.$$

Ovo je vrijednost sektorskog statičkog momenta desnog dijela profila u tački neposredno lijevo od čvora profila u kom je $\Omega = -154 \text{ cm}^2$. Vrijednost sektorskog statičkog momenta u toj tački lijevog dijela profila, tj. trapeza sa osnovicama (-405) i (-154) cm^2 je, naravno, (-11180 cm^4), s obzirom da je sektorski statički moment cijelog profila $S_\Omega = 0$. Primijeti, takođe, da smo računali \tilde{S}_Ω startujući sa \tilde{s} od donjeg desnog kraja profila, dobili bismo isti dijagram kao na sl. P15.2 (b), samo sa suprotnim znakom, ali bi smjer za τ_q ostao isti, tj. nezavisan od izbora kraja profila od kog mjerimo \tilde{s} i računamo \tilde{S}_Ω .

Primjer 15.3.

Štap tankozidnog otvorenog profila ukljiješten je na lijevom kraju, a opterećen momentom torzije π_t na desnom (slobodnom) kraju. Odrediti:

- dijagrame φ , M_s , M_Ω i B_Ω duž ose štapa,
- dijagrame komponentalnih napona u presjeku kod uklještenja, ako je $\pi_t = 10 \text{ kNm}$, dužina štapa $L = 4 \text{ m}$, materijal čelik ($G = 0,4E$) i poprečni presjek Z profila ($h = 40 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$, $t = 3 \text{ cm}$ i $\delta = 2 \text{ cm}$ — vidi sl. P15.1 (c)),
- ugao obrtanja desnog kraja štapa.

Rješenje:

- Diferencijalna jednačine ograničene torzije u ovom slučaju je

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = 0, \quad k^2 = \frac{GI_t}{EI_\Omega},$$

a njeno rješenje

$$\varphi = A_1 \text{ch } kz + A_2 \text{sh } kz + A_3 Z + A_4.$$

Granični uslovi su:

$$z = 0: \varphi = 0, \quad \varphi' = 0$$

$$z = L: M_D = GI_t \varphi' - EI_\Omega \varphi''' = \pi_t, \quad B_\Omega = -EI_\Omega \varphi'' = 0,$$

što daje:

$$A_1 = \frac{\pi_t}{GI_t} \frac{\text{th } kL}{kL}, \quad A_2 = -\frac{\pi_t}{GI_t} \frac{1}{k}, \quad A_3 = \frac{\pi_t}{GI_t}, \quad A_4 = -A_1.$$

Ugao obrtanja poprečnih presjeka, prema tome, dat je sa

$$\varphi = \frac{\pi t_1}{GI_t} \left[\frac{1}{k} \frac{\operatorname{sh} k(L-z)}{\operatorname{ch} kL} + z - \frac{\operatorname{th} kL}{k} \right].$$

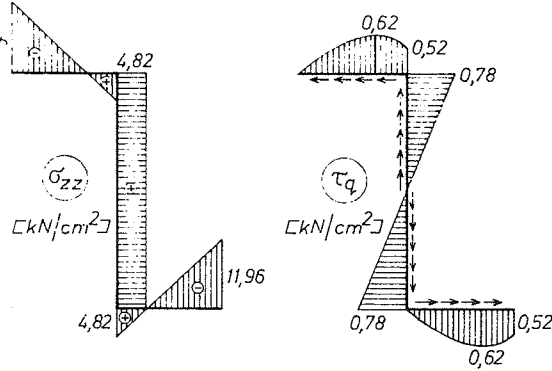
Veličine M_s , B_Ω i M_Ω su sada redom:

$$M_s = GI_t \varphi' = \pi t_1 \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k(L-z)}{\operatorname{ch} kL} \right]$$

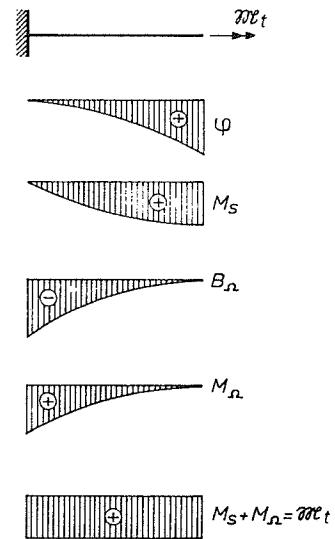
$$B_\Omega = -EI_\Omega \varphi'' = -\pi t_1 \frac{1}{k} \frac{\operatorname{sh} k(L-z)}{\operatorname{ch} kL}$$

$$M_\Omega = B'_\Omega = \pi t_1 \frac{\operatorname{ch} k(L-z)}{\operatorname{ch} kL}.$$

Dijagrami ovih veličina prikazani su na sl. P15.3 (a)



Sl. P 15.3 (b)



Sl. P 15.3 (a).

b) Potrebne geometrijske karakteristike Z profila sa datim dimenzijama su (vidi primjer A. 17(c) u dodatku A knjige):

$$I_\Omega = 2655421 \text{ cm}^6, \quad \omega_o = 256,6 \text{ cm}^2, \quad \lambda = 12,8 \text{ cm}$$

$$I_t = 430,7 \text{ cm}^4, \quad I_t/I_\Omega = 1,621 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-2},$$

pa je $kL = 3,22$, a karakteristične (ekstremne) vrijednosti za \bar{S}_Ω su:

$$\frac{1}{2} \lambda \left(\frac{1}{2} hb - \omega_o \right) t = \dots = 4938 \text{ cm}^4$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} hb - 2\omega_o \right) bt = \dots = 4136 \text{ cm}^4.$$

U presjeku kod uklještenja je $M_s = 0$, $M_\Omega = \pi t = 10 \text{ kNm}$ i

$$B_\Omega = -\pi t L \frac{th \text{ kL}}{kL} = \dots = -123828 \text{ kN cm}^2.$$

Korespondentni komponentalni naponi su definisani sa:

$$\sigma_{zz} = \frac{B_\Omega}{I_\Omega} \Omega = -\frac{123828}{2655421} \Omega$$

$$\tau_q = -\frac{M_\Omega \bar{S}_\Omega}{I_\Omega t} = -\frac{1000}{2655421} \frac{\bar{S}_\Omega}{t},$$

pa koristeći dijagrame za Ω i \bar{S}_Ω iz primjera 15.1 (c), dobijamo dijagrame napona prikazane na sl. P15.3 (b).

c) Ugao obrtanja desnog kraja štapa je

$$\varphi(z=L) = \frac{\pi t L}{GI_t} \left(1 - \frac{th \text{ kL}}{kL}\right) = 0,69 \frac{\pi t L}{GI_t},$$

tj. manji za 31% nego kod slobodne torzije. Primijeti takođe da je kod slobodne

torzije $\tau_s^{\max} = 2 \frac{\pi t}{I_t} \frac{t^{\max}}{2} = 6,8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ što je oko devet puta veće od τ_q^{\max}

u uklještenju kod ovdje analiziranog korespondentnog slučaja ograničene torzije.

Primjer 15.4.

Čelični štap I profila ($h = 30 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, $\delta = 1 \text{ cm}$, $t = 2 \text{ cm}$) opterećen je po cijeloj dužini ($L = 3 \text{ m}$) ravnomjerno raspoređenim vertikalnim teretom (po jedinici dužine) $p_y = 1/3 \text{ kN/cm}$ na udaljenju $a = 3 \text{ cm}$ desno od sredine vertikalnog rebra. Ako je obrtanje krajeva štapa spriječeno, odrediti dijagrame komponentalnih napona u presjeku na udaljenju $z = L/3$ od lijevog kraja štapa.

Rješenje:

U ovom primjeru imamo slučaj kombinovanog (složenog) naprezanja štapa. U proizvoljnom poprečnom presjeku štapa imamo presječne sile:

$$M_x(z) = \frac{p_y L}{2} z - \frac{p_y z^2}{2}$$

$$T_y(z) = \frac{p_y L}{2} - p_y z,$$

koje jednostavno dobijamo iz statičkih uslova ravnoteže, dok naprezanje od ograničene torzije, tj. „presječne sile” M_s , M_Ω i B_Ω slijede nakon rješavanja diferencijalne jednačine

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \frac{p_y a}{EI_\Omega},$$

s obzirom da je u ovom primjeru $m_D = p_y a$ (vidi jednačinu (15.9.1:4)).

Rješenje ove jednačine je

$$\varphi = A_1 \operatorname{ch} kz + A_2 \operatorname{sh} kz + A_3 z + A_4 - \frac{p_y a}{2 GI_t} z^2,$$

pa, s obzirom na granične uslove da je za $z = 0$ i $z = L$: $\varphi = 0$ i $B_\Omega = 0$, imamo

$$\varphi = \frac{1}{k^2} \frac{p_y a}{GI_t} \left[\frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} + \frac{k^2}{2} z (L - z) - 1 \right]$$

Odatve nalazimo veličine koje definišu naprezanje od ograničene torzije:

$$M_s = GI_t \varphi' = \frac{1}{k} p_y a \left[\frac{k}{2} (L - 2z) - \frac{\operatorname{sh} k \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} \right]$$

$$M_\Omega = -EI_\Omega \varphi''' = \frac{1}{k} p_y a \frac{\operatorname{sh} k \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}}$$

$$M_t = M_s + M_\Omega = p_y a \left(\frac{L}{2} - z \right)$$

$$B_\Omega = -EI_\Omega \varphi'' = \frac{1}{k^2} p_y a \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} \right].$$

Korespondentne komponentalne napone određujemo iz:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{B_\Omega}{I_\Omega} \Omega$$

$$\tau_s = 2 \frac{M_s}{I_t} n, \quad \tau_t = - \frac{T_y \tilde{S}_x}{I_x t} - \frac{M_\Omega \tilde{S}_\Omega}{I_\Omega t}$$

Za dati I profil imamo (vidi primjer A. 17 (a)):

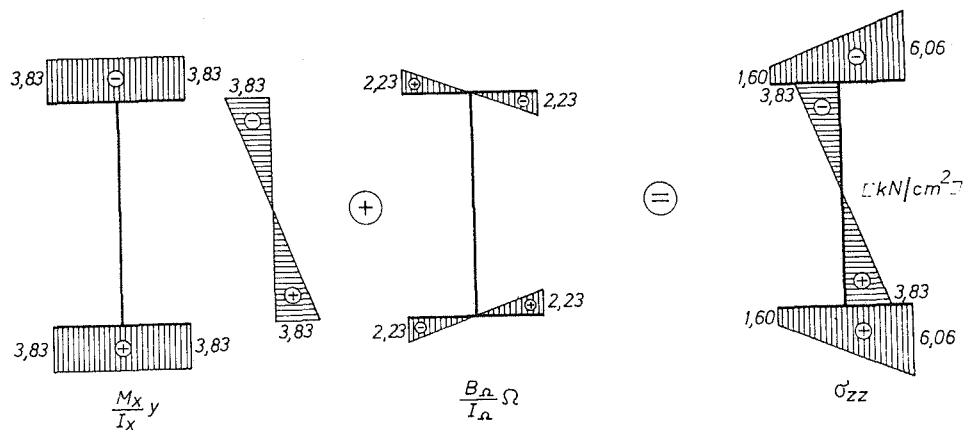
$$I_x = 13050 \text{ cm}^4, \quad I_\Omega = 129600 \text{ cm}^6, \quad I_t = 74 \text{ cm}^4, \quad kL = 4,533.$$

U presjeku $z = L/3 = 1 \text{ m}$ je:

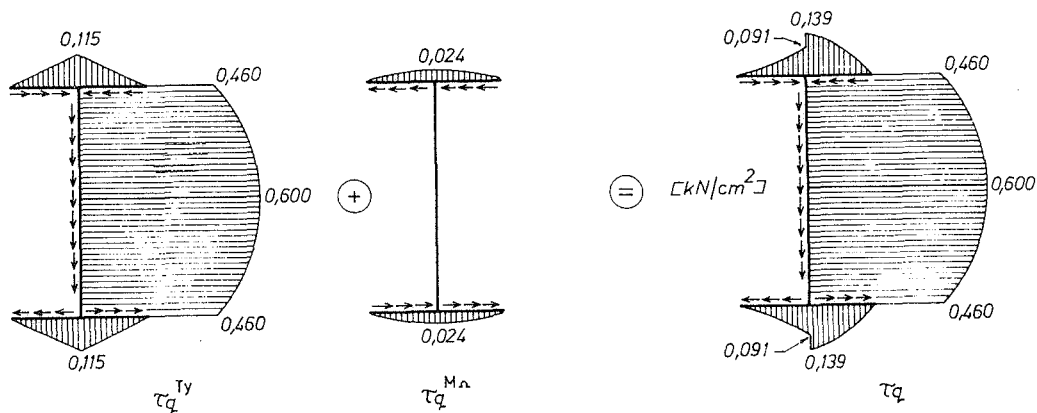
$$M_s = 38,75 \text{ kN cm}, \quad M_\Omega = 11,29 \text{ kN cm}, \quad B_\Omega = 3216 \text{ kN cm}^2$$

$$M_x = 3333,3 \text{ kN cm}, \quad T_y = 16,67 \text{ kN},$$

a dijagrami komponentalnih napona σ_{zz} i τ_q su prikazani na sl. P 15.4 (a) i (b). pri tome su korišteni dijagrami za normiranu sektorsku koordinatu Ω i sektorski statički moment \bar{S}_Ω dati za I profil u promjeru 15.1 (a). Dijagram statičkog momenta \bar{S}_x I profila dat je u poglavlju 11.8, sl. 11:24.



Sl. P 15.4(a).



Sl. P 15.4(b).

Primjer 15.5.

Čelični štap I profila ($h = 12$ cm, $b = 6$ cm, $\delta = 0,6$ cm i $t = 0,8$ cm) dužine $L = 3$ m opterećen je sa dvije zatezne podužne sile intenziteta $P = 30$ kN koje djeluju u tački A na sredini donjeg pojasa slobodnih krajeva štapa. Odrediti promjenu veličina M_s , M_Ω i B_Ω duž ose štapa. Izračunati veličinu bimomenta u presjecima $z = 0$, $z = L/4$ i $z = L/2$. U presjeku $z = L/8$ nacrtati dijagram normalnog napona.

Rješenje:

U ovom slučaju imamo $\bar{p}_z = 0$, $p_z = 0$, $m_x = m_y = m_\Omega = 0$, $N_z = P$, $M_x = Ph/2$, $M_y = -P(\frac{b}{2} - \Delta)$, gdje je Δ udaljenje težišta profila od sredine vertikalnog rebra. Jednačina (15.9.2:6) se svodi na

$$\varphi''' - k^2 \varphi' = 0$$

čije je rješenje

$$\varphi = A_1 \operatorname{ch} kz + A_2 \operatorname{sh} kz + A_4.$$

Granični uslovi su da je za $z = 0$ i $z = L$ bimoment $B_\Omega = p\Omega_A$, gdje je (vidi primjer A. 17 (b)) $\Omega_A = -\frac{1}{2}he + \frac{1}{4}hb$, pa je

$$\varphi = -\frac{P\Omega_A}{GI_t} \frac{\operatorname{ch} k(\frac{L}{2} - z)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} + A_4.$$

Zbog simetrije u odnosu na ravan $z = L/2$ slijedi da je obrtanje srednjeg poprečnog presjeka $\varphi(z = L/2) = 0$ odakle je

$$A_4 = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} \frac{P\Omega_A}{GI_t}.$$

tj.

$$\varphi = \frac{P\Omega_A}{GI_t} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} \left[1 - \operatorname{ch} k\left(\frac{L}{2} - z\right) \right].$$

Odavde sada imamo:

$$M_s = P\Omega_A k \frac{\operatorname{sh} k\left(\frac{L}{2} - z\right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}}$$

$$M_\Omega = -M_s$$

$$B_\Omega = P\Omega_A \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{L}{2} - z\right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}}.$$

Izraz za normalni napon u štapu je

$$\sigma_{zz} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B_\Omega}{I_\Omega} \Omega$$

Za profil datih dimenzija imamo (vidi primjer A.17 (b)):

$$A = 16,8 \text{ cm}^2, I_x = 432 \text{ cm}^4, I_y = 70,7 \text{ cm}^4, I_t = 10,7 \text{ cm}^4, \\ \Delta = 1,7 \text{ cm}, e = 2,4 \text{ cm}, \Omega_A = 3,6 \text{ cm}^2, I_\Omega = 1659 \text{ cm}^6,$$

pa je $kL = 15,23$, a vrijednost bimomenta u traženim presjecima:

$$B_\Omega(z=0) = P\Omega_A = 108 \text{ kN cm}^2$$

$$B_\Omega(z = \frac{L}{6}) = P\Omega_A \frac{ch \frac{kL}{3}}{ch \frac{kL}{2}} = 8,78 \text{ kNcm}^2$$

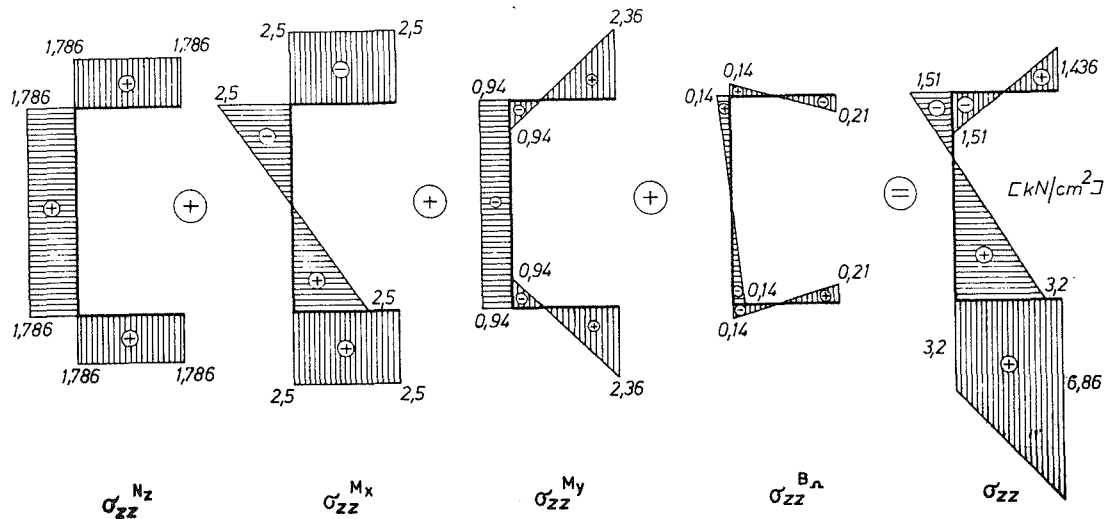
$$B_\Omega(z = \frac{L}{4}) = P\Omega_A \frac{ch \frac{kL}{4}}{ch \frac{kL}{2}} = 2,4 \text{ kNcm}^2$$

$$B_\Omega(z = \frac{L}{2}) = P\Omega_A \frac{1}{ch \frac{kL}{2}} = 0,11 \text{ kN cm}^2,$$

odakle vidimo naglo opadanje vrijednosti bimomenta sa udaljenjem od kraja štapa.

U presjeku $z = L/8$ imamo:

$$N_z = 30 \text{ kN}, M_x = 180 \text{ kN cm}, M_y = -39 \text{ kN cm}, B_\Omega = 16,18 \text{ kN cm}^2,$$



Sl. P 15.5.

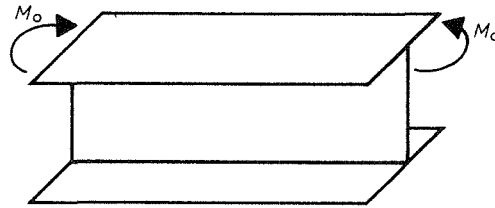
pa je normalni napon

$$\delta_{zz} = \frac{30}{16,8} + \frac{180}{432} y - \frac{39}{70,7} x + \frac{16,18}{1659} \Omega = 1,786 + 0,417 y - 0,55 x + 0,0098 \Omega.$$

Dijagram za svaki od uticaja posebno, kao i dijagram ukupnog normalnog napona, prikazan je na sl. P 15.5.

Primjer 15.6.

Čelični štap I profila na slici opterećen je na lijevom i desnom kraju momentom savijanja M_0 koji djeluje u ravni gornjeg pojasa. Krajevi štapa se ne mogu obrtati, ali mogu deplahirati. Odrediti izraze za ugao obrtanja φ i veličine M_s , M_Ω i B_Ω .



Sl. P 15.6.

Rješenje:

Očigledno, u štapu je: $M_x(z) = 0$, $M_y(z) = M_0$, $N_z(z) = 0$, $T_x = T_y = 0$, $M_t = M_s = M_\Omega = 0$. Granični uslovi na krajevima $z = 0$ i $z = L$ su: $\varphi = 0$ i $B_\Omega = M_0 h/2$, gdje je h visina rebra profila. Prema tome, iz jednačine ograničene torzije

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = 0$$

dobijamo za date granične uslove:

$$\varphi = \frac{M_0 h}{2 G I_t} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} \right]$$

$$M_s = M_0 \frac{h}{2} k \frac{\operatorname{sh} k \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} = -M_\Omega$$

$$B_\Omega = M_0 \frac{h}{2} \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{L}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}}$$

(Primijeti da se ovi izrazi podudaraju sa izrazima iz prethodnog primjera ako se umjesto $M_0 h/2$ staviti $P\Omega_A$). Naponi u štapu su:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B_\Omega}{I_\Omega} \Omega$$

$$\tau_s = 2 \frac{M_s}{I_t} n$$

$$\tau_q = -\frac{M_\Omega \bar{S}_\Omega}{I_\Omega t}$$

DODATAK A: GEOMETRIJSKE OSOBINE RAVNIH POVRŠINA

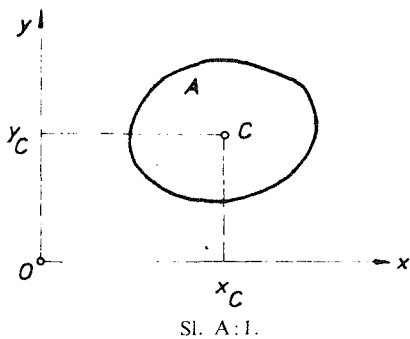
A.1. Težište ravne površine

Težište ravne površine (sl. A:1) je tačka C čije su koordinate:

$$x_C = \frac{\int x dA}{A}, \quad y_C = \frac{\int y dA}{A}, \quad (1)$$

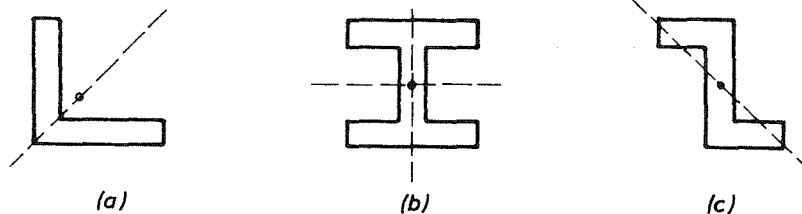
pri čemu je $A = \int_A dA$ površina ravne površine. Integrali:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA \quad (2)$$



nazivaju se statički momenti površine A za x , odnosno y osu, respektivno. Očigledno je iz (2) ako je težište površine na jednoj od koordinatnih osa, statički moment površine za tu osu jednak je nuli. Ako površina A ima osu simetrije, težište površine leži na toj osi (sl. A:2 (a)), ako površina ima dvije ose simetrije, težište je u presjeku tih osa (sl. A:2 (b)). Ako površina ima centar simetrije, težište je u centru simetrije (sl. A:2 (c)). Ako je površina A sastavljena iz više dijelova A_1, A_2, \dots čija su težišta C_1, C_2, \dots , tada se koordinate težišta površine A mogu odrediti iz:

$$x_C = \frac{x_{C_1} A_1 + x_{C_2} A_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}, \quad y_C = \frac{y_{C_1} A_1 + y_{C_2} A_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots} \quad (3)$$



Sl. A:2.

Primjer A.1.

Odrediti koordinate težišta pravougaonika dimenzija $b \times h$ na sl. P A.1.

Rješenje:

Površina pravougaonika je

$$A = \int_A dA = \int_0^b dx \int_0^h dy = bh.$$

Statički momenti površine pravougaonika su:

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^b dx \int_0^h y dy = \frac{bh^2}{2} \quad S_y = \int_A x dA = \int_0^b x dx \int_0^h dy = \frac{b^2h}{2},$$

a koordinate težišta pravougaonika:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{b^2h}{2}}{bh} = \frac{b}{2}, \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{bh^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}.$$

Primjer A.2.

Odrediti koordinate težišta trougla na sl. P A.2.

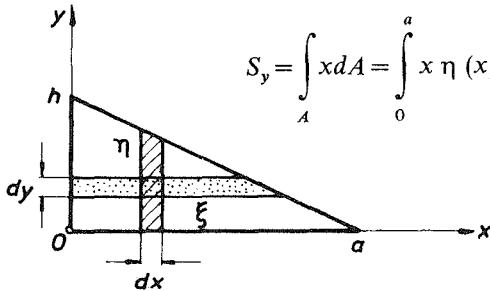
Rješenje:

Sa sl. P A.2., je očigledno:

$$A = \int_A dA = \int_0^a \eta(x) dx = \int_0^a \frac{h}{a}(a-x) dx = \frac{ah}{2}$$

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^h y \xi(y) dy = \int_0^h y \frac{a}{h}(h-y) dy = \frac{ah^2}{6}$$

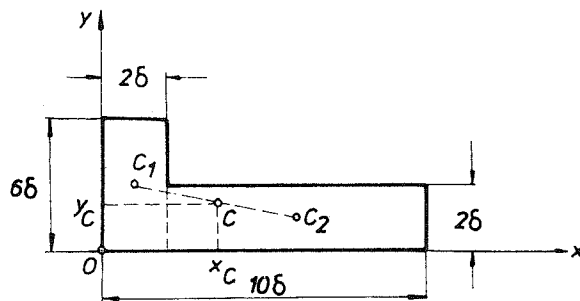
$$S_y = \int_A x dA = \int_0^a x \eta(x) dx = \int_0^a x \frac{h}{a}(a-x) dx = \frac{a^2h}{6}.$$



Sl. P A.2.

Prema tome, koordinate težišta su:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{a^2h}{6}}{\frac{ah}{2}} = \frac{a}{3}, \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{ah^2}{6}}{\frac{ah}{2}} = \frac{h}{3}.$$



Sl. P A.3.

Primjer A.3.

Odrediti koordinate težišta površine na sl. P A.3.

Rješenje:

Površinu na sl. P A.3. možemo smatrati sastavljenu iz dva dijela, tako da je:

$$A_1 = 2\delta \cdot 6\delta = 12\delta^2,$$

$$A_2 = 8\delta \cdot 2\delta = 16\delta^2$$

$$x_{C_1} = \delta, \quad y_{C_1} = 3\delta, \quad x_{C_2} = 6\delta, \quad y_{C_2} = \delta.$$

Prema tome, koordinate težišta su:

$$x_C = \frac{x_{C_1}A_1 + x_{C_2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\delta \cdot 12\delta^2 + 6\delta \cdot 16\delta^2}{12\delta^2 + 16\delta^2} = 3,85\delta$$

$$y_C = \frac{y_{C_1}A_1 + y_{C_2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{3\delta \cdot 12\delta^2 + \delta \cdot 16\delta^2}{12\delta^2 + 16\delta^2} = 1,86\delta.$$

A.2. Momenti inercije ravne površine

Moment inercije ravne površine A u odnosu na x osu definiše se sa

$$I_x = \int_A y^2 dA. \quad (1)$$

Analogno se definiše moment inercije površine A u odnosu na y osu

$$I_y = \int_A x^2 dA. \quad (2)$$

Moment inercije u odnosu na osu naziva se još i aksijalni moment inercije za tu osu.

Polarni moment inercije površine A definiše se sa

$$I_0 = \int_A r^2 dA, \quad (3)$$

tj. predstavlja moment inercije površine A u odnosu na osu z , koja je upravna na površinu A u tački O (sl. A:3.). Najzad, centrifugalni moment inercije površine A u odnosu na ose x i y definiše se sa

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (4)$$

Momenti inercije (1)–(4) predstavljaju geometrijske karakteristike površine A , a u analizi grednog nosača javljaju se kao karakteristike oblika poprečnog presjeka grednog nosača. Očigledno je da je dimenzija momenata inercije $[I] = L^4$. Takođe, iz

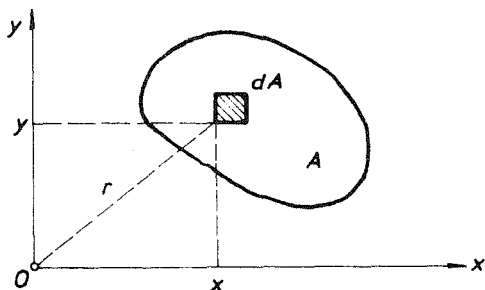
(1)–(3) vidimo da su aksijalni momenti i polarni moment inercije uvijek pozitivni, dok centrifugalni moment inercije može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli, zavisno od oblika površine A . Na primjer, ako je površina A simetrična u odnosu na x ili y osu, tada je $I_{xy}=0$.

Kako je $r^2 = x^2 + y^2$, iz (1)–(3) slijedi

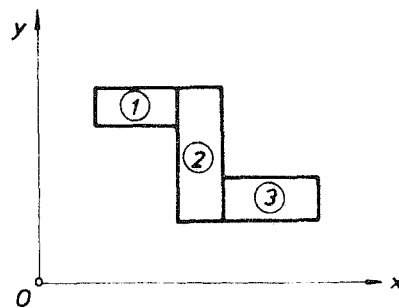
$$I_0 = I_x + I_y. \quad (5)$$

Ako je površina A sastavljena iz više dijelova, tada su momenti inercije cijele površine jednaki zbiru momenata inercije za pojedine dijelove. Na primjer, moment inercije (I_x , I_y , I_0 ili I_{xy}) površine na sl. A:4 je

$$I = I^{\text{I}} + I^{\text{II}} + I^{\text{III}}.$$



Sl. A:3.



Sl. A:4.

Primjer A.4.

Odrediti momente inercije u odnosu na ose x i y pravougaonika na sl. P A.4.

Rješenje:

Aksijalni momenti inercije su:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^b dx \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3}$$

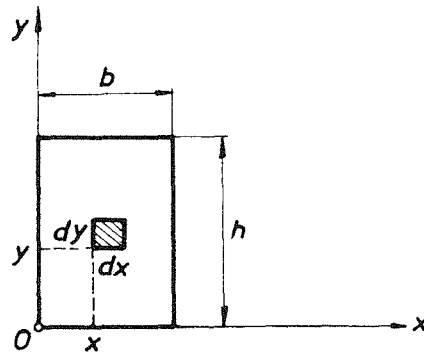
$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 dx \int_0^h dy = \frac{b^3h}{3}.$$

Polarni moment inercije je

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{bh}{3} (b^2 + h^2),$$

dok je centrifugalni moment inercije

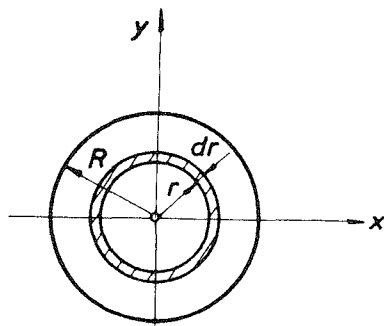
$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^b x dx \int_0^h y dy = \frac{b^2h^2}{4}.$$



Sl. P A.4.

Primjer A.5.

Odrediti momente inercije u odnosu na ose x i y kruga na sl. P.A.5.



Sl. P.A.5.

Rješenje:

Zbog simetrije je:

$$I_{xy} = 0, \quad I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0.$$

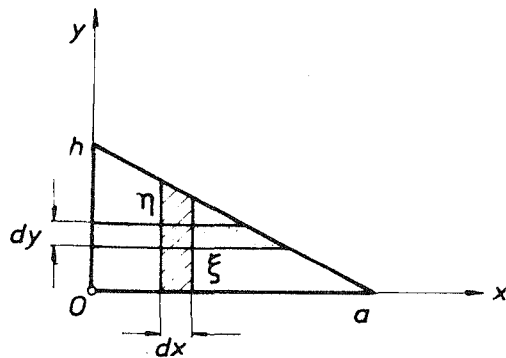
Polarni moment inercije je

$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{R^4 \pi}{2},$$

pa je $I_x = I_y = \frac{R^4 \pi}{4}.$

Primjer A.6.

Odrediti momente inercije u odnosu na x i y ose trougla na sl. P.A.6. Dato je $a = 20$ cm, $h = 10$ cm.



Sl. P.A.6.

Rješenje:

Aksijalni moment inercije za x osu je

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \xi(y) dy = \int_0^h y^2 \frac{a}{h} (h - y) dy = \frac{ah^3}{12} = 1666,7 \text{ cm}^4,$$

a za y osu

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^a x^2 \eta(x) dx = \int_0^a x^2 \frac{h}{a} (a - x) dx = \frac{ha^3}{12} = 6666,7 \text{ cm}^4,$$

gdje su veličine ξ i η naznačene na sl. PA.6. Centrifugalni moment inercije je

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^a x dx \int_0^{h\left(1-\frac{x}{a}\right)} y dy = \int_0^a x \frac{h^2}{2} \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{a^2 h^2}{24} = 1666,7 \text{ cm}^4.$$

Primjer A.7.

Odrediti momente inercije u odnosu na x i y osu kružnog prstena na sl. PA.7.

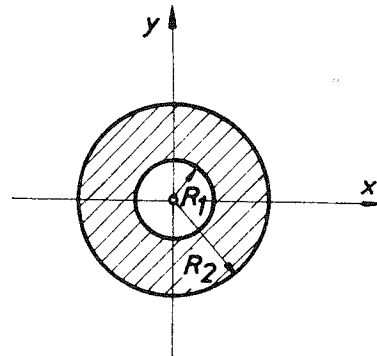
Rješenje:

Očigledno:

$$I_0 = \frac{R_2^4 \pi}{2} - \frac{R_1^4 \pi}{2} = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$I_{xy} = 0.$$



Sl. PA.7.

A.3. Promjena momenata inercije pri transformaciji koordinatnog sistema

Vrijednosti momenata inercije ravne površine zavise od koordinatnog sistema u odnosu na čije ose se računaju momenti inercije, pa se pri transformaciji koordinatnog sistema mijenjaju i momenti inercije. Kako se svaka transformacija koordinatnog sistema može ostvariti translacijom i rotacijom koordinatnog sistema, razmotrićemo posebno kako se mijenjaju momenti inercije pri translaciji, a kako pri rotaciji koordinatnog sistema.

A.3.1. Translacija koordinatnog sistema

Neka su na sl. A:5 (ξ, η) težišne ose površine A , a (x, y) njima paralelne ose kroz tačku O , tako da je veza između koordinata proizvoljne tačke površine A u ova dva koordinatna sistema data sa:

$$x = \xi + b, \quad y = \eta + a. \quad (1)$$

Moment inercije površine A u odnosu na x osu je

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (\eta + a)^2 dA = \int_A \eta^2 dA + 2a \int_A \eta dA + a^2 A. \quad (2)$$

Drugi integral na desnoj strani u (2) jednak je nuli, jer je η težišna osa površine A , pa je

$$I_x = I_\xi + a^2 A. \quad (3)$$

Ovo je veza između momenta inercije površine A za težišnu osu ξ i njoj paralelnu osu x na rastojanju a . Moment inercije površine za težišnu osu zove se sopstveni moment inercije, a proizvod površine i kvadrata rastojanja između osa zove se

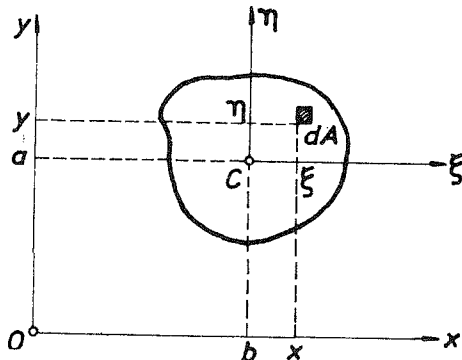
položajni moment inercije. Prema tome, moment inercije površine u odnosu na neku osu jednak je zbiru sopstvenog momenta inercije za paralelnu težišnu osu i položajnog momenta inercije (Steinerova teorema). Iz (3) je očigledno da je od svih momenata inercije za skup paralelnih osa najmanji onaj u odnosu na težišnu osu.

Na isti način se izvode preostale zavisnosti:

$$I_y = I_\eta + b^2 A \quad (4)$$

$$I_o = I_c + R^2 A, \quad R^2 = a^2 + b^2 \quad (5)$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + ab A. \quad (6)$$



Sl. A:5.

Primjer A.8.

Odrediti momente inercije pravougao- nika na sl. P A.8 za težišne ose (ξ , η).

Rješenje:

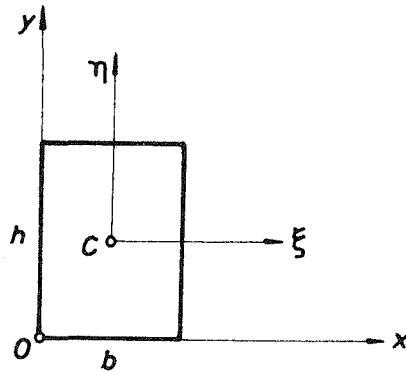
U primjeru A.4 našli smo da je: $I_x = \frac{bh^3}{3}$,

$I_y = \frac{b^3h}{3}$, $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$. Iz izraza (A.2.2:3) je

$$I_\xi = I_x - \left(\frac{h}{2}\right)^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}.$$

Analogno se dobija:

$$I_\eta = \frac{b^3h}{12}, \quad I_{\xi\eta} = 0, \quad I_c = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2).$$



Sl. P A.8.

Primjer A.9.

Odrediti moment inercije trougla na sl. P A.9 za osu u . Poznato je $I_x = \frac{ah^3}{12}$.

Rješenje:

U primjeru A.2 našli smo da su koordinate težišta trougla na sl. PA.9 $x_c = \frac{a}{3}$, $y_c = \frac{h}{3}$.

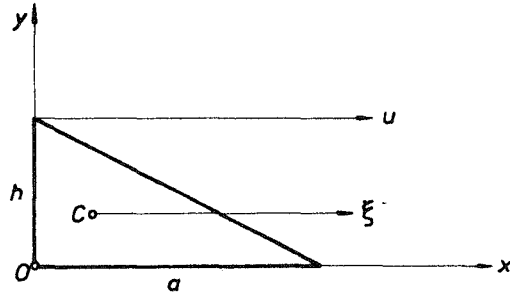
Moment inercije trougla za osu u dobićemo koristeći Steinerovu teoremu dva puta.

Prvo nalazimo da je moment inercije trougla za težišnu osu ξ

$$I_{\xi} = I_x - y_c^2 A = \frac{ah^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{ah}{2} = \frac{ah^3}{36},$$

pa je moment inercije za osu u

$$I_u = I_{\xi} + (h - y_c)^2 A = \frac{ah^3}{36} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{ah}{2} = \frac{1}{4} ah^3.$$



Sl. P A.9.

A.3.2. Rotacija koordinatnog sistema

Potražimo sada vezu između momenata inercije površine A u odnosu na ose koordinatnog sistema (xOy) i ose koordinatnog sistema (uOv) dobijenog iz (xOy) sistema rotacijom za ugao φ (sl. A: 6). Jednačine transformacije koordinata u ovom slučaju su:

$$\begin{aligned} u &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ v &= y \cos \varphi - x \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Moment inercije površine A u odnosu na osu u je

$$\begin{aligned} I_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2 dA = \\ &= \cos^2 \varphi \int_A y^2 dA - \sin 2\varphi \int_A xy dA + \\ &+ \sin^2 \varphi \int_A x^2 dA, \end{aligned}$$

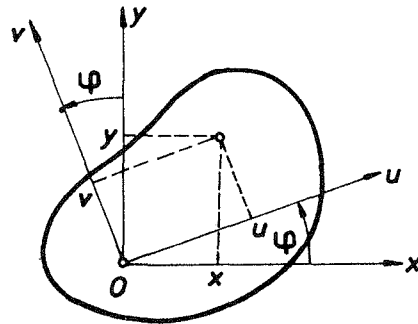
pa je

$$I_u = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - I_{xy} \sin 2\varphi. \quad (2)$$

Analogno se dobija:

$$I_v = I_x \sin^2 \varphi + I_y \cos^2 \varphi + I_{xy} \sin 2\varphi \quad (3)$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi. \quad (4)$$



Sl. A: 6.

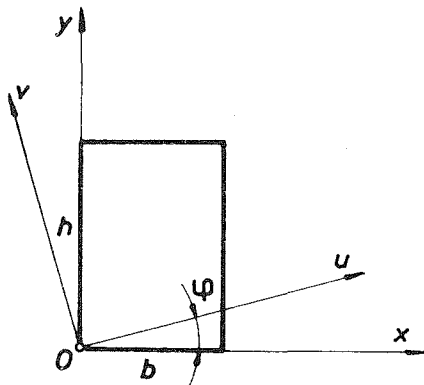
Izrazi (2)–(4) daju traženu vezu između momenata inercije u odnosu na ose zarotiranih koordinatnih sistema. Koristeći dvostruki ugao, (2) i (3) se mogu prepisati u obliku:

$$I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi \quad (5)$$

$$I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi. \quad (6)$$

Primjer A.10.

Za pravougaonik dimenzija $b \times h = 6 \times 8$ cm na sl. PA.10 odrediti momente inercije za ose u i v dobijene rotacijom iz osa x i y za ugao $\varphi = 30^\circ$.



Sl. PA.10.

Rješenje:

Kako je:

$$I_x = \frac{bh^3}{3} = 1024 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{b^3h}{3} = 576 \text{ cm}^4,$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} = 576 \text{ cm}^4,$$

zamjenom u (2)–(4) dobijamo:

$$I_u = 1024 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 576 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 576 \frac{\sqrt{3}}{2} = 413,2 \text{ cm}^4$$

$$I_v = 1024 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 576 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 576 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1186,8 \text{ cm}^4$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(1024 - 576) \frac{\sqrt{3}}{2} + 576 \frac{1}{2} = 482 \text{ cm}^4.$$

A.4. Glavni momenti inercije

Iz izraza (A.3.2:5) i (A.3.2:6) očigledno je da se momenti inercije I_u i I_v kontinualno mijenjaju sa promjenom ugla φ , pa se postavlja pitanje kojim vrijednostima ugla φ odgovaraju ekstremne vrijednosti aksijalnih momenata inercije. Odgovor ćemo dobiti iz uslova ekstremuma funkcija I_u i I_v :

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = -(I_x - I_y) \sin 2\varphi - 2I_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$\frac{dI_v}{d\varphi} = (I_x - I_y) \sin 2\varphi + 2I_{xy} \cos 2\varphi = 0. \quad (1)$$

$$\text{If } I_x = I_y \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Ovo daje ugao $\varphi = \alpha$ koji definiše pravce ekstremnih vrijednosti aksijalnih momenata inercije

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (2)$$

S obzirom da se drugi izvodi po uglu φ funkcija I_u i I_v razlikuju samo po znaku (jer se i prvi izvodi samo tako razlikuju, kao što vidimo u (1)), to će vrijednosti $\varphi = \alpha$ odgovarati maksimum jednog a minimum drugog momenta inercije.

Jednačina (2) ima beskonačno mnogo rješenja za α , koja se međusobno razlikuju za $n \frac{\pi}{2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), tj. jednačina (2) definiše dva međusobno upravna pravca, 1 i 2, kojima odgovaraju ekstremne vrijednosti aksijalnih momenata inercije. Ovi pravci nazivaju se glavne ose inercije površine za datu tačku, a korespondentni aksijalni momenti inercije zovu se glavni momenti inercije. Kako je:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{-2I_{xy}}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \\ \cos 2\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{I_x - I_y}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

zamjenom u (A.3.2:5) i (A.3.2:6) dobijamo izraze za glavne momente inercije:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = I_{\max} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = I_{\min}. \end{aligned} \quad (4)$$

Zamjenom (3) u (A.3.2:4) dobijamo da je centrifugalni moment inercije za glavne ose jednak nuli

$$I_{12} = 0. \quad (5)$$

Važi i obrnuto, ako je centrifugalni moment inercije za par upravnih osa jednak nuli, te ose su glavne ose inercije. Zato, ako površina ima osu simetrije, ta osa i njoj upravna osa su glavne ose inercije date površine.

Iz analize znaka drugog izvoda

$$\left(\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\alpha} = \frac{4I_{xy}}{\sin 2\alpha} \quad (6)$$

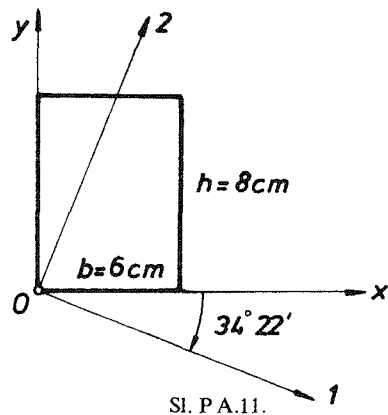
zaključujemo ako je $I_{xy} < 0$, glavna osa za koju površina ima maksimalni moment inercije prolazi kroz I i III kvadrant (x, y) koordinatnog sistema (jer je izraz u (6) negativan za $\alpha < \frac{\pi}{2}$). Ako je $I_{xy} > 0$, tada glavna osa za koju površina ima maksimalan moment inercije prolazi kroz II i IV kvadrant.

Iz (4) i (5) je takođe lako utvrditi da je:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_x + I_y = J_1 = \text{const.} \\ I_1 - I_2 &= I_x - I_y - I_{xy}^2 = J_2 = \text{const.}, \end{aligned} \quad (7)$$

što predstavlja prvu i drugu invarijantu momenata inercije ravne površine.

Ako se za koordinatni početak O uzme težište površine C , tada govorimo o glavnim centralnim osama inercije i njima korespondentnim glavnim centralnim momentima inercije.



Sl. P A.11.

Primjer A.11.

Za pravougaonik na sl. P A.11. odrediti glavne ose inercije i korespondentne glavne momente inercije u odnosu na tačku O .

Rješenje:

Kako je:

$$I_x = 1024 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 576 \text{ cm}^4,$$

$$I_{xy} = 576 \text{ cm}^4,$$

zamjenom u (A.4:2) dobijamo

$$\text{tg } 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \cdot 576}{1024 - 576} = -2,571,$$

odakle nalazimo $\alpha = -34^\circ 22'$ i $\alpha = 55^\circ 38'$. Kako je $I_{xy} = 576 \text{ cm}^4 > 0$, osa 1 prolazi kroz II i IV kvadrant (sl. P A.11). Glavne momente inercije dobijamo iz (A.4:4):

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2} (1024 + 576) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1024 - 576)^2 + 4 \cdot 576^2} = 800 \pm 618, \end{aligned}$$

pa je $I_1 = 1418 \text{ cm}^4$, $I_2 = 182 \text{ cm}^4$.

Primjer A.12.

Za trougao na sl. PA.12(a) odrediti:

- glavne ose inercije i glavne momente inercije za tačku O ,
- glavne centralne ose inercije i glavne centralne momente inercije.

Rješenje:

a) U primjeru A.6 našli smo da je: $I_x = 1667 \text{ cm}^4$, $I_y = 6667 \text{ cm}^4$, $I_{xy} = 1667 \text{ cm}^4$, pa je:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} (1667 + 6667) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1667 - 6667)^2 + 4 \cdot 1667^2} = 4167 \pm 3005$$

$$I_1 = 7172 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 1162 \text{ cm}^4$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot 1667}{1667 - 6667} = 0,6667, \quad \alpha = 16,8^\circ.$$

Kako je $I_{xy} = 1667 \text{ cm}^4 > 0$, osa 1 prolazi kroz II i IV kvadrant (sl. P A.12 (a)).

b) Koristeći Steinerovu teoremu prvo nalazimo:

$$I_{\xi} = I_x - y_c^2 A = \frac{1}{12} ah^3 - \left(\frac{1}{3}h\right)^2 \frac{1}{2}ah = \frac{1}{36} ah^3 \cong 556 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta} = I_y - x_c^2 A = \frac{1}{12} ha^3 - \left(\frac{1}{3}a\right)^2 \frac{1}{2}ah = \frac{1}{36} ha^3 \cong 2222 \text{ cm}^2$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - x_c y_c A = \frac{1}{24} a^2 h^2 - \frac{1}{3}a \frac{1}{3}h \frac{1}{2}ah = -\frac{1}{72} a^2 h^2 \cong -556 \text{ cm}^4,$$

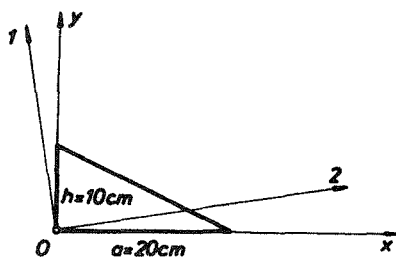
pa su glavne centralne ose i glavni centralni momenti inercije određeni sa:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} (556 + 2222) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(556 - 2222)^2 + 4 \cdot 556^2} = 1389 \pm 1001$$

$$I_1 = 2390 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 388 \text{ cm}^4$$

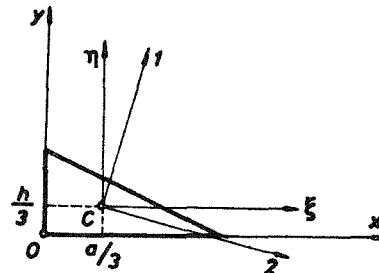
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot (-556)}{556 - 2222} = -0,667, \quad \alpha = -16,8^\circ.$$

Kako je $I_{\xi\eta} = -556 \text{ cm}^4 < 0$, osa 1 prolazi kroz I i III kvadrant (sl. P A.12 (b)).



(a)

Sl. P A.12.



(b)

Primjer A.13.

Naći položaj glavnih centralnih osa inercije i izračunati veličinu glavnih centralnih momenata inercije površine na sl. P A.13. (Dimenzije su date u [cm]).

Rješenje:

Težište površine je tačka C. Položaj glavnih centralnih osa inercije i veličinu glavnih centralnih momenata inercije dobićemo iz izraza:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{2I_{\xi\eta}}{I_{\xi}-I_{\eta}} \\ I_{1,2} &= \frac{1}{2}(I_{\xi}+I_{\eta}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{\xi}-I_{\eta})^2+4I_{\xi\eta}^2}, \end{aligned} \quad (\text{a})$$

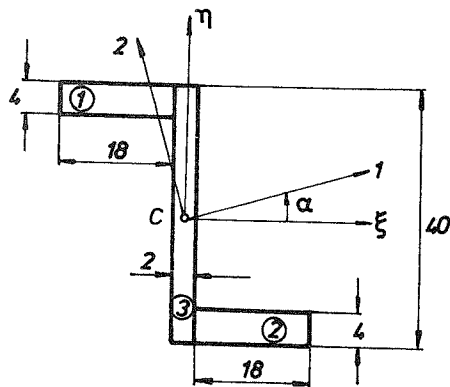
pri čemu je:

$$I_{\xi} = 2 \left(\frac{18 \cdot 4^3}{12} + 18^2 \cdot 18 \cdot 4 \right) + \frac{2 \cdot 40^3}{12} = 57\,500 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta} = 2 \left(\frac{4 \cdot 18^3}{12} + 10^2 \cdot 18 \cdot 4 \right) + \frac{2^3 \cdot 40}{12} = 18\,320 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi\eta} = -10 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 4 + 10 \cdot (-18) \cdot 18 \cdot 4 = -25\,900 \text{ cm}^4.$$

Zamjenom ovih vrijednosti u izraze (a) dobijamo:



Sl. P A.13.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot (-25\,900)}{57\,500 - 18\,320} = 1,322$$

$$\alpha = 26^{\circ} 25'$$

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \frac{1}{2}(57\,500 + 18\,320) \pm \\ &\pm \frac{1}{2}\sqrt{(57\,500 - 18\,320)^2 + 4 \cdot (-25\,900)^2} \end{aligned}$$

$$I_1 = 70\,400 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 5420 \text{ cm}^4.$$

Kako je $I_{\xi\eta} = -25\,900 \text{ cm}^4 < 0$, osa 1 prolazi kroz I i III kvadrant.

A.5. Mohrov krug inercije

Preglednu geometrijsku interpretaciju dobijenih rezultata u poglavljima A.3 i A.4 možemo dati pomoću tzv. Mohrovog kruga inercije. Naime, ako izraze (A.3.2:4) i (A.3.2:5) prepíšemo u obliku:

$$\begin{aligned} I_u - \frac{1}{2}(I_x + I_y) &= \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi \\ I_{uv} &= \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

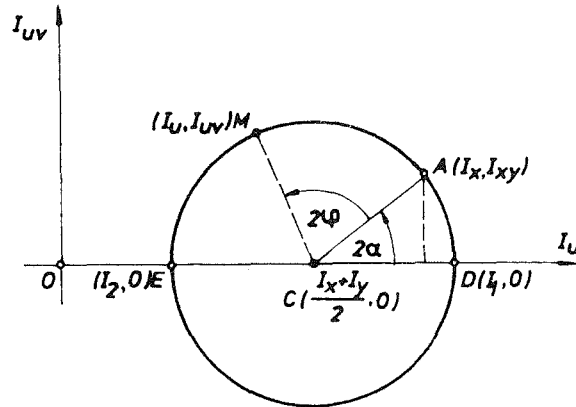
pa ih kvadriramo i saberemo, dobićemo

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2. \quad (2)$$

Prema tome, ako su poznati aksijalni i centrifugalni moment inercije date površine za ose x i y , aksijalni moment inercije I_u i centrifugalni moment inercije I_{uv} za ose u i v dobijene rotacijom iz osa x i y , zadovoljavaju uslov (2).

U koordinatnom sistemu (I_u, I_{uv}) jednačina (2) predstavlja jednačinu kruga sa centrom u tački $\left(\frac{I_x + I_y}{2}, 0\right)$ i poluprečnikom $\frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$.

Ovaj krug naziva se Mohrov krug inercije (sl. A:7) i predstavlja geometrijsko mjesto tačaka čije su koordinate (I_u, I_{uv}) aksijalni i centrifugalni moment inercije date površine, za sve moguće parove upravnih osa u i v kroz posmatranu tačku.



Sl. A:7.

Mohrov krug inercije konstruiše se tako što se prvo odrede tačka $A(I_x, I_{xy})$ i tačka $C\left(\frac{I_x + I_y}{2}, 0\right)$, koja predstavlja centar Mohrovog kruga. Mohrov krug se onda dobija kada se iz C opiše krug poluprečnika CA , jer je $CA = \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$. Proizvoljna tačka $M(I_u, I_{uv})$ odgovara pravcu u pod uglom φ u odnosu na x osu, i njemu upravnom pravcu v koji je dobijen iz u rotacijom za 90° u pozitivnom matematičkom smjeru (suprotno kretanju kazaljke na satu). Sa sl. A:7 je takođe očigledno da je:

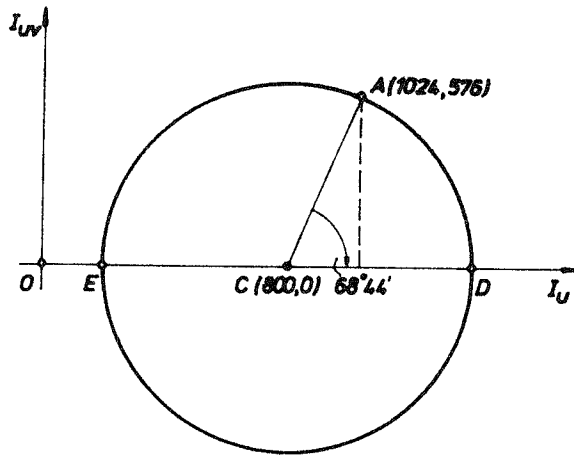
$$\overline{OD} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$\overline{OE} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2},$$

tj. duži OD i OE predstavljaju, u izabranoj srazmjeri, maksimalni i minimalni moment inercije (I_1 i I_2) date površine za posmatranu tačku. Položaj glavnih osa određen je uglom 2α , koji mjerimo od CA kao pozitivan u pozitivnom matematičkom smjeru. Na primjer, na sl. A:7 je ugao α negativan, pa glavna osa 1 prolazi kroz II i IV kvadrant (x, y) koordinatnog sistema, što smo i očekivali s obzirom da je na sl. A:7 $I_{xy} > 0$.

Primjer A.14.

Za pravougaonik posmatran u primjeru A.11 odrediti koristeći Mohrov krug inercije položaj glavnih osa inercije i veličinu glavnih momenata inercije u odnosu na tačku 0.



Sl. P A.14.

Rješenje:

U primjeru A.11 našli smo da je: $I_x = 1024 \text{ cm}^4$, $I_y = 576 \text{ cm}^4$, $I_{xy} = 576 \text{ cm}^4$. Mohrov krug inercije prikazan je na sl. P A.14. Sa sl. P A.14 se vidi da je glavna osa 1 definisana uglom $\alpha = -34^\circ 22'$ u odnosu na x osu, i da je (u izabranoj srazmjeri):

$$\overline{OD} = I_1 = 1418 \text{ cm}^4,$$

$$\overline{OE} = I_2 = 182 \text{ cm}^4.$$

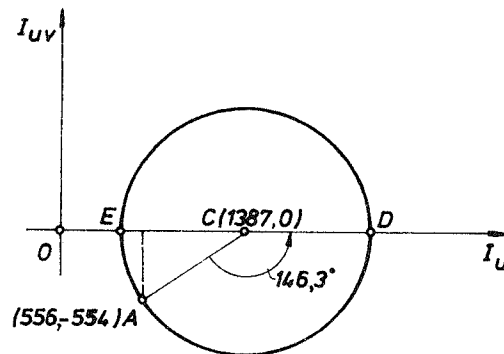
Primjer A.15.

Nacrtati Mohrov krug inercije za težište C trougla u primjeru A.12.

Rješenje:

U primjeru A.12 .dobili smo da je: $I_{\xi} = 556 \text{ cm}^4$, $I_{\eta} = 2218 \text{ cm}^4$, $I_{\xi\eta} = -554 \text{ cm}^4$. Mohrov krug inercije prikazan je na sl. P A.15. Sa slike vidimo da je glavna osa 1 definisana uglom $\alpha = 73,15^\circ$ u odnosu na ξ osu, i da je:

$$\overline{OD} = I_1 = 2386 \text{ cm}^4, \quad \overline{OE} = I_2 = 388 \text{ cm}^4.$$



Sl. P A.15.

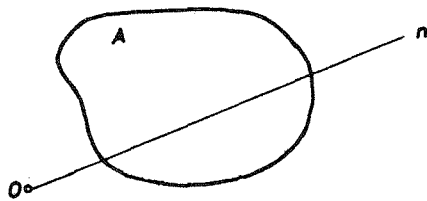
A.6. Elipsa inercije

Posmatrajmo površinu A i proizvoljnu osu n kroz tačku O (sl. A:8). Neka je I_n moment inercije površine A za osu n . Tada se poluprečnik inercije površine A za osu n definiše izrazom

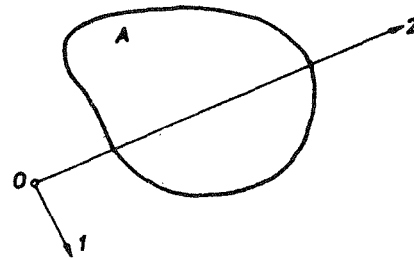
$$i_n = \sqrt{\frac{I_n}{A}}. \quad (1)$$

Neka su 1 i 2 glavne ose inercije površine A za tačku O , a I_1 i I_2 korespondentni glavni momenti inercije (sl. A:9). Tada su glavni poluprečnici inercije površine A za tačku O :

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}. \quad (2)$$

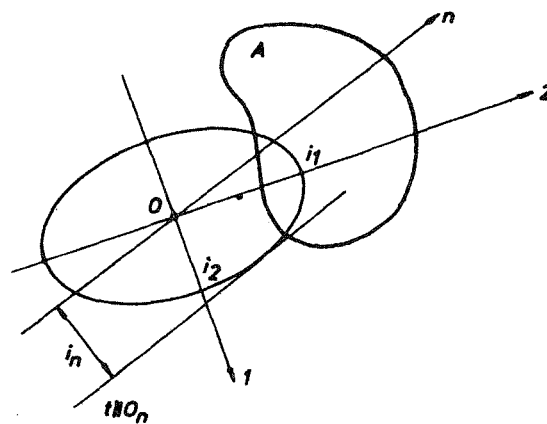


Sl. A:8.



Sl. A:9.

Nanesimo sada na osu 1 poluprečnik inercije i_2 , a na osu 2 poluprečnik inercije i_1 i konstruišimo elipsu sa poluosama i_2 i i_1 (sl. A:10). Tako dobijena elipsa naziva se elipsa inercije površine A za tačku O . Elipsa inercije ima svoje određeno geometrijsko značenje. Može se pokazati ako se povuče tangenta na elipsu inercije paralelno nekom pravcu n kroz tačku O , tada je normalno rastojanje tangente od pravca n jednako poluprečniku inercije i_n površine A za osu On (sl. A:10). Ako je tačka O težište površine A , govorimo o glavnim centralnim poluprečnicima inercije i centralnoj elipsi inercije površine A .



Sl. A:10.

Primjer A.16.

Odrediti elipsu inercije za tačku O pravougaonika na sl. PA.16(a), pa pomoću nje odrediti moment inercije pravougaonika za osu On – dijagonalu pravougaonika.

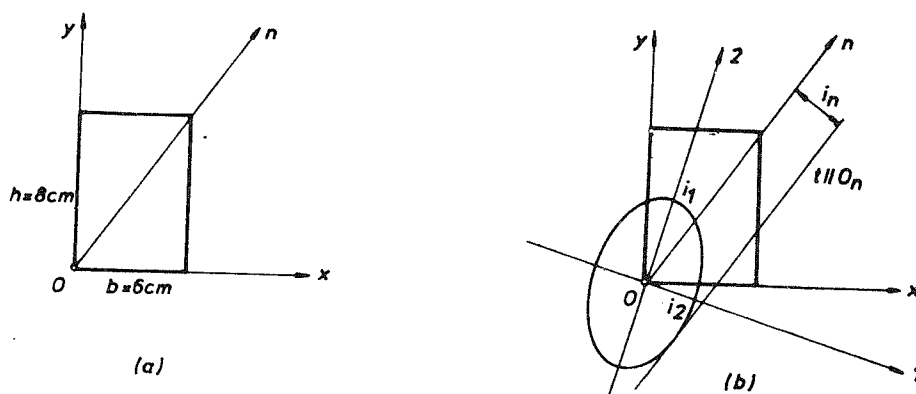
Rješenje:

U primjeru A.11 našli smo glavne ose inercije i korespondentne glavne momente inercije pravougaonika za tačku O . Osa 1 zaklapa sa x osom ugao $\alpha = -34^\circ 22'$ (sl. PA.16 (b)), a $I_1 = 1418 \text{ cm}^4$, $I_2 = 182 \text{ cm}^4$. Kako je $A = 48 \text{ cm}^2$, glavni poluprečnici inercije pravougaonika za tačku O su:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{1418}{48}} = 5,44 \text{ cm}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{182}{48}} = 1,95 \text{ cm}.$$

Elipsa inercije je prikazana na sl. PA.16 (b). Da bismo odredili poluprečnik inercije za dijagonalu pravougaonika, povucimo tangentu na elipsu inercije paralelno dijagonali. Sa sl. PA.16 (b) onda pročitamo da je $i_n \cong 2,04 \text{ cm}$. Moment inercije pravougaonika za dijagonalu je

$$I_n = A i_n^2 = 48 \cdot 2,04^2 = 200 \text{ cm}^4.$$

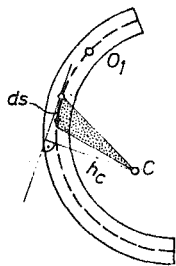


Sl. PA.16.

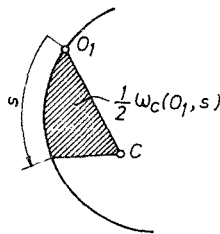
A.7. Sektorske karakteristike tankozidnih profila

A.7.1. Sektorska koordinata

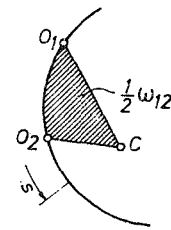
Posmatrajmo tankozidni profil, tj. profil čija je debljina znatno manja od dužine. Crtano na sl. A:11 označena je tzv. srednja linija profila, duž koje počev od proizvoljne tačke O_1 (nulta tačka), mjerimo lučnu koordinatu s . Za pozitivan smjer koordinate s pretpostavićemo smjer suprotan kretanju kazaljke na satu u odnosu na proizvoljnu tačku (pol) u ravni profila (na primjer, težište C). Uočimo na proizvoljnom mjestu srednje linije profila element luka ds . Sa h_c označimo normalno udaljenje tačke C od tangente na srednju liniju profila u uočenoj tački. Tada je $d\omega_c = h_c ds$ dvostruka površina elementarnog trougla prikazanog



Sl. A:11.



Sl. A:12.



Sl. A:13.

tačkasto na sl. A:11, pa veličina

$$\omega_c(o_1, s) = \int_0^s h_c ds \quad (1)$$

predstavlja dvostruku površinu sektora na dijelu srednje linije profila od nulte tačke O_1 do proizvoljne tačke definisane lučkom koordinatom s (sl. A:12). Veličina definisana sa (1) naziva se sektorska koordinata u odnosu na izabrani pol C i nultu tačku O_1 . Ako je tačka O_2 izabrana za nultu tačku (sl. A:13), tada očigledno imamo

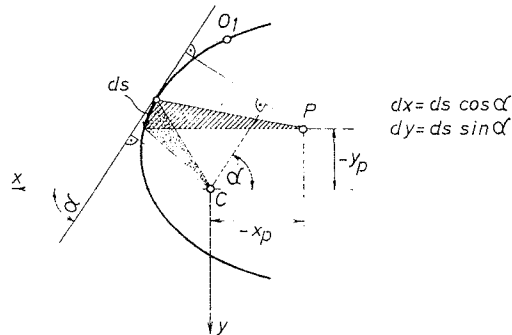
$$\omega_c(o_1, s) = \int_{o_1}^s h_c ds = \int_{o_1}^{o_2} h_c ds + \int_{o_2}^s h_c ds, \quad (2)$$

tj.

$$\omega_c(o_1, s) = \omega_c(o_2, s) + \omega_{12},$$

gdje je $\omega_{12} = \int_{o_1}^{o_2} h_c ds = \text{const.}$ dvostruka površina krivolinijskog trougla šrafi-rano prikazanog na sl. A:13. Relacija (2) predstavlja vezu između sektorskih koordinata u odnosu na isti pol, a različite nulte tačke. Ustavimo sada vezu između sektorskih koordinata u odnosu na različite polove, a zajedničku nultu tačku. Neka je na sl. A:14 tačka C težište profila, x i y par upravnih osa kroz težište (na primjer, glavne centralne ose inercije profila), a $P(x_p, y_p)$ proizvoljna druga tačka u ravni profila. Sa sl. A:14 je očigledno $d\omega_c = h_c ds$, $d\omega_p = h_p ds$, tj.

$$d\omega_p - d\omega_c = (h_p - h_c) ds.$$



Sl. A:14.

No,

$$h_p - h_c = -x_p \sin \alpha - (y_p \cos \alpha) = -x_p \frac{dy}{ds} + y_p \frac{dx}{ds},$$

gdje je α ugao koji tangenta na srednju liniju profila zaklapa sa pozitivnim smjerom x ose, pa je

$$d\omega_p - d\omega_c = -x_p dy + y_p dx,$$

odnosno nakon integracije od nulte tačke O_1 do proizvoljne tačke srednje linije

$$\omega_p(O_1, s) - \omega_c(O_1, s) = -x_p (y - y_{o_1}) + y_p (x - x_{o_1}). \quad (3)$$

Relacija (3) predstavlja vezu između sektorskih koordinata sa zajedničkom nultom tačkom u odnosu na tačku C (koordinatni početak) i tačku P (x_p, y_p) kao polove. Veza između sektorskih koordinata u odnosu na proizvoljne tačke P (x_p, y_p) i Q (x_q, y_q) kao polove direktno slijedi iz (3). Zaista, korišćenjem (3) za P i C, i Q i C, oduzimanjem dobijamo

$$\omega_p(O_1, s) - \omega_q(O_1, s) = (y_p - y_q) (x - x_{o_1}) - (x_p - x_q) (y - y_{o_1}).$$

A.7.2. Sektorski momenti

Sektorskim statičkim momentom tankozidnog profila u odnosu na nultu tačku O_1 i izabrani pol P nazivamo integral

$$S_{\omega_p} = \int_A \omega_p dA, \quad (1)$$

gdje je A ukupna površina profila ($dA = t ds$, gdje je $t = t(s)$ debljina profila). (1) očigledno predstavlja geometrijsku karakteristiku tankozidnog profila. Geometrijske karakteristike tankozidnog profila su takođe i veličine:

$$I_{x\omega_p} = \int_A x \omega_p dA, \quad I_{y\omega_p} = \int_A y \omega_p dA, \quad (2)$$

koje se nazivaju sektorskim centrifugalnim momentima. Veza između sektorskih centrifugalnih momenata u odnosu na polove P i Q dobija se nakon zamjene (A.7.1:4) u (2)

$$I_{x\omega_p} = I_{x\omega_Q} + (y_p - y_Q) I_y - (x_p - x_Q) I_{xy} + a S_y, \quad (3)$$

gdje je $a = y_{o_1} (x_p - x_Q) - x_{o_1} (y_p - y_Q) = \text{const}$, S_y statički moment inercije profila za y osu, a I_y i I_{xy} aksijalni i centrifugalni momenti inercije profila za y, odnosno x i y ose. Ako su x i y glavne centralne ose inercije profila, tada je $S_y = 0$ i $I_{xy} = 0$, pa iz (3) imamo

$$I_{x\omega_p} = I_{x\omega_Q} + (y_p - y_Q) I_y. \quad (4)$$

Slično dobijamo

$$I_{y\omega_p} = I_{y\omega_Q} - (x_p - x_Q) I_x. \quad (5)$$

A.7.3. Glavni pol. Normirana sektorska koordinata. Sektorski moment inercije

Od posebnog značaja u analizi naprezanja i deformacije štapova tankozidnog otvorenog profila je tačka D (x_D, y_D) u ravni profila za koju važi $I_{x\omega_D} = I_{y\omega_D} = 0$, i koja s toga, iz (A.7.2:4) i (A.7.2:5), ima koordinate:

$$\begin{aligned} x_D &= x_p + \frac{I_{y\omega_p}}{I_x} \\ y_D &= y_p - \frac{I_{x\omega_p}}{I_y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Tačka D s ovim koordinatama naziva se glavni pol ili centar smicanja (savijanja) profila. Njene koordinate su očigledno nezavisne od izbora nulte tačke profila, jer u odnosu na težišne ose x i y ni sektorski centrifugalni momenti (A.7.2:2) ne zavise od izbora nulte tačke (slijedi zamjenom (A.7.1:2) u (A.7.2:2), s obzirom da je za težišne ose $S_x = S_y = 0$).

Ako se nulta tačka profila izabere tako da je korespondentni sektorski statički moment u odnosu na glavni pol jednak nuli, tj.

$$\int_A \omega_D(o, s) dA = 0, \quad (2)$$

takva nulta tačka se naziva glavna nulta tačka 0, a korespondentna sektorska koordinata normirana sektorska koordinata $\Omega = \omega_D(o, s)$. Ako je određena sektorska koordinata u odnosu na glavni pol i proizvoljnu nultu tačku 0_1 , $\omega_D(0_1, s)$, tada se normirana sektorska koordinata dobija iz (A.7.1:2) kao

$$\Omega = \omega_D(0_1, s) - \omega_0, \quad (3)$$

gdje je, s obzirom na (2),

$$\omega_0 = \frac{1}{A} \int_A \omega_D(\omega_1, s) dA. \quad (4)$$

Napominjemo da se u opštem slučaju može dogoditi da postoji nekoliko nultih tačaka koje zadovoljavaju uslov (2). Za glavnu nultu tačku možemo uzeti bilo koju od njih (na primjer, najbližu glavnom polu), premda eksplicitno lociranje glavne nulte tačke nije suštinsko, s obzirom da normiranu sektorsku koordinatu Ω nalazimo direktno iz (3) i (4), nakon što je određeno $\omega_D(0_1, s)$.

Iz analize izvedenih izraza lako je pokazati da se za profile sa osom simetrije glavni pol nalazi na osi simetrije. Za profile sa dvije ili više osa simetrije glavni pol je u presjeku tih osa, tj. u težištu profila. Na osi simetrije takođe leži i glavna nulta tačka profila. Kod profila sa centrom simetrije glavni pol je u centru simetrije, tj. težištu (na primjer, Z profil). Za profile sastavljene od pravih djelova koji se svi susište u jednom čvoru (na primjer L, T, V, X, Y i slični profili), glavni pol je u čvoru susištavanja, jer je u odnosu na njega sektorska koordinata za svaku tačku srednje linije profila identički jednaka nuli.

Na kraju definišemo još jednu geometrijsku (sektorsku) karakteristiku tankozidnog profila. To je tzv. sektorski moment inercije (ili sektorski kvadratni moment)

$$I_\Omega = \int_A \Omega^2 dA, \quad (5)$$

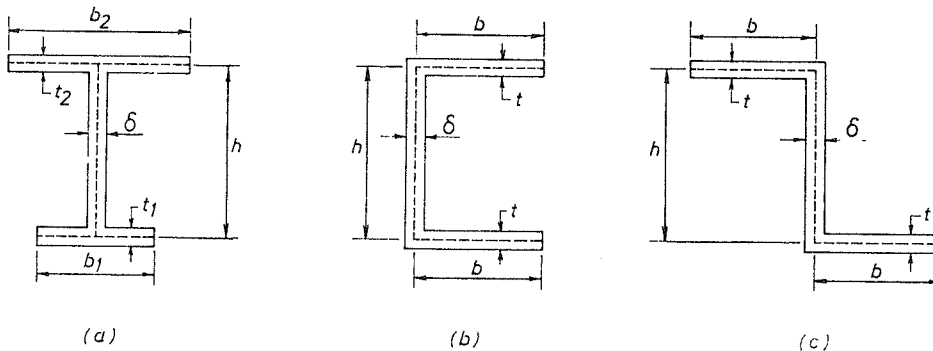
koji ima dimenziju (dužina)⁶, a određuje se nakon što je utvrđena promjena normirane sektorske koordinate duž srednje linije profila.

Određivanje sektorskih karakteristika tankozidnih profila biće ilustrovano sa nekoliko primjera koji slijede.

Primjeri

Primjer A.17.

Za tankozidne profile na sl. P A.17 odrediti položaj glavnog pola (centra smicanja), dijagram normirane sektorske koordinate i sektorski moment inercije.



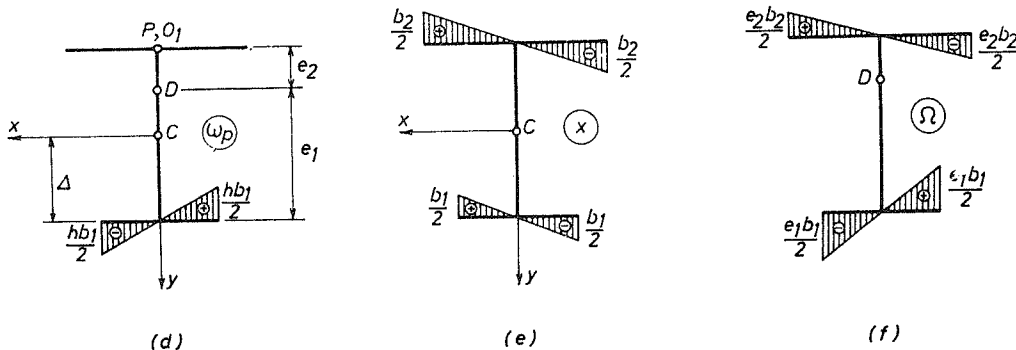
Sl. P A. 17(a) — (c).

Rješenje:

a) I profila sa nejednakim pojasevima prikazan na sl. P A. 17 (a) ima težište na udaljenju

$$\Delta = \frac{\frac{1}{2}h^2 \delta + h b_2 t_2}{b_1 t_1 + b_2 t_2 + h\sigma}$$

od sredine donjeg rebra, pa su x i y na sl. P A.17 (d) glavne centralne ose inercije profila. Na sl. P A.17 (d) prikazan je dijagram sektorske koordinate



Sl. P A.17(d)–(f).

$\omega_p(0_1, s)$ u odnosu na pol P i nultu tačku 0_1 , koji su oboje u sredini gornjeg pojasa. S obzirom da profil ima vertikalnu osu simetrije, glavni pol je na njoj ($x_D = 0$), a položaj mu slijedi iz

$$y_D = y_p - \frac{I_{x_{\omega p}}}{I_y}$$

gdje je $y_p = -(h - \Delta)$, $I_y = \frac{1}{12} (t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3)$, dok $I_{x_{\omega p}}$ određujemo množeći dijagrame na sl. P A.17 (d) i (e) (vidi Tabelu 12:1, str. 367):

$$I_{x_{\omega p}} = \int_A x \omega_p dA = 2 \frac{b_1/2}{3} \left(-\frac{h b_1}{2} \right) \frac{b_1}{2} t_1 = -\frac{1}{12} h b_1^3 t_1$$

Dakle:

$$e_2 = y_D - y_p = -\frac{I_{x_{\omega p}}}{I_y} = \frac{h b_1^3 t_1}{b_1^3 t_1 + b_2^3 t_2}, \quad e_1 = h - e_2 = \frac{h b_2^3 t_2}{b_1^3 t_1 + b_2^3 t_2}$$

što definiše položaj glavnog pola D u odnosu na gornje i donje rebro. Dijagram sektorske koordinate u odnosu na D kao pol, koji sada jednostavno nalazimo, prikazan je na sl. P A.17 (f).

Kako je

$$\int_A \omega_D(0_1, s) dA = 0,$$

to je dijagram na sl. P A.17 (f) takođe i dijagram normirane sektorske koordinate Ω .

Sektorski moment inercije dobijamo množeći dijagram za Ω sam sa sobom, prema Tabeli 12:1,

$$I_{\Omega} = 2 \left(\frac{b_1/2}{2} \frac{e_1 b_1}{2} \frac{e_1 b_1}{2} \right) t_1 + 2 \left(\frac{b_2/2}{3} \frac{e_2 b_2}{2} \frac{e_2 b_2}{2} \right) t_2 = \\ = \frac{1}{12} (e_1^2 b_1^3 t_1 + e_2^2 b_2^3 t_2).$$

Na primjer, za $b_1 = b_2 = b$ i $t_1 = t_2 = t$ dobijamo:

$$\Delta = \frac{h}{2}, \quad e_1 = e_2 = \frac{h}{2} \text{ (tj. } D \equiv C \text{)}, \quad I_{\Omega} = \frac{1}{24} h^2 b^3 t.$$

b) Za [profil se slično dobija (vidi sl. P A.17 (g) — (i)):

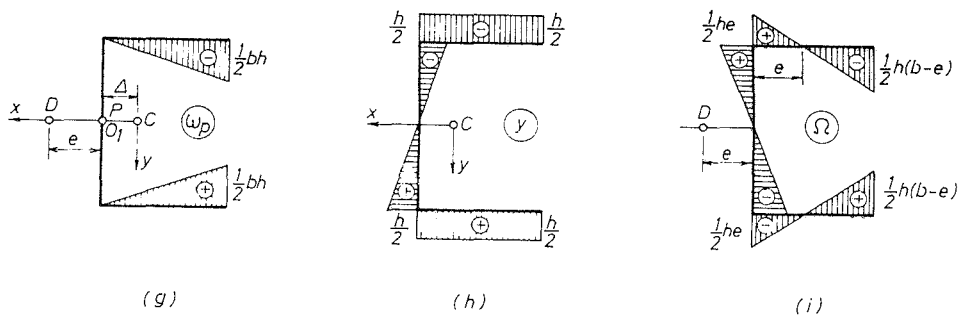
$$\Delta = \frac{b^2 t}{2 b t + h \delta}, \quad I_x = \frac{1}{12} \delta h^3 + \frac{1}{2} b h^2 t$$

$$I_{y_{\text{op}}} = \frac{1}{4} b^2 h^2 t, \quad e = x_D - x_P = \frac{b^2 t}{\frac{1}{3} h \delta + 2 b t}$$

$$I_{\Omega} = \frac{1}{6} b h^2 (3e^2 - 3eb + b^2) t + \frac{1}{12} h^3 e^2 \delta = e^2 I_x + \frac{1}{6} b^2 h^2 (b - 3e) t.$$

Na primjer, za $h = 2b$, $t = 2\delta$:

$$e = \frac{3}{7} b, \quad I_x = \frac{14}{3} b^3 \delta, \quad I_{\Omega} = \frac{21}{49} b^5 \delta.$$



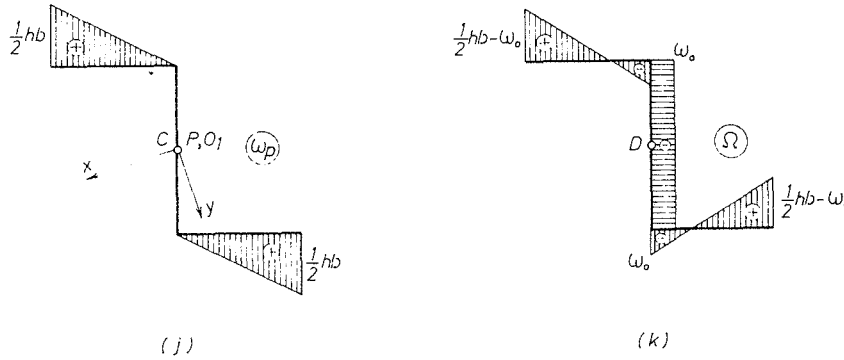
Sl. P A.17(g) — (i).

c) Na sl. P A. 17 (j) prikazan je dijagram sektorske koordinate u odnosu na pol P i nultu tačku O_1 , koji su oboje uzeti u centru simetrije, tj. težištu Z profila. Kako je u odnosu na ovu tačku dijagram ω_p simetričan, a dijagrami koordinata x i y tačaka srednje linije profila antisimetrični, slijedi $I_{x_{\text{op}}} = I_{y_{\text{op}}} = 0$, tj. glavni pol se poklapa sa težištem, $D \equiv C$. Međutim, glavna nulta tačka \bar{O} nije u težištu. Zaista:

$$\int_A \omega_p (O_1, s) dA = 2 \frac{1}{2} b \frac{1}{2} h b t = \frac{1}{2} h b^2 t$$

$$\omega_0 = \frac{\frac{1}{2}hb^2 t}{2bt + h\delta}, \quad \Omega = \omega_p - \omega_0.$$

Dijagram normirane sektorske koordinate prikazan je na sl.P A.17 (k).



Sl. P A.17(j) — (k).

Za sektorski moment inercije dobijamo

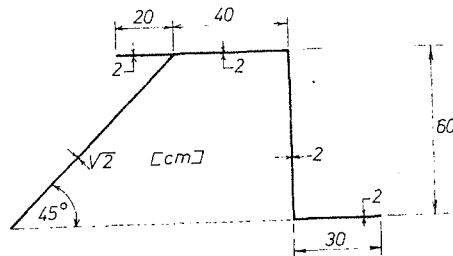
$$I_\Omega = \frac{b^3 t}{12} h^2 \frac{bt + 2h\delta}{2bt + h\delta}.$$

Na primjer, za $h = 2b$ i $t = 2\delta$ je:

$$\omega_0 = \frac{1}{3} b^2, \quad I_\Omega = \frac{2}{3} b^5 \delta.$$

Primjer A. 18.

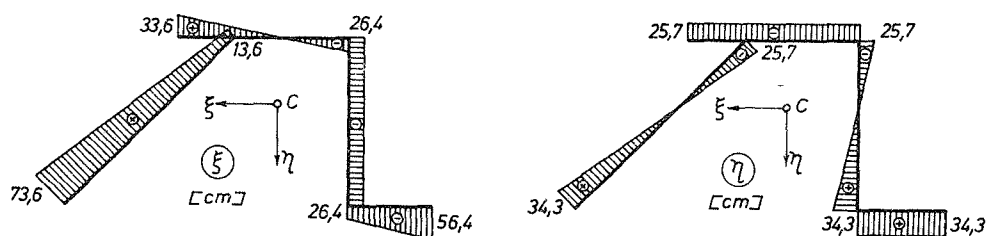
Odrediti glavni pol (centar smicanja), dijagram normirane sektorske koordinate i sektorski moment inercije tankozidnog profila na sl. P A. 18(a)



Sl. P A.18(a).

Rješenje:

Težište profila je lako naći i ono se nalazi na udaljenju 73,6 cm od donjeg lijevog kraja profila po horizontali, i 34,3 cm po vertikali. Na sl. P A.18 (b) i (c) prikazani su dijagrami ξ i η koordinata tačaka (srednje linije) profila.



Sl. P A. 18 (b) — (c).

Množenjem ovih dijagrama, uz pomoć Tabele 12:1, dobijamo vrijednosti momenta inercije I_ξ , I_η i $I_{\xi\eta}$. Na primjer,

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = \sqrt{2} \frac{60 \sqrt{2}}{6} [34,3 (2 \cdot 34,3 - 25,7) + (-25,7) (34,3 - 2 \cdot 25,7)] + 2 \cdot 60 \cdot 25,7 \cdot 25,7 + 2 \cdot \frac{60}{6} [34,3 (2 \cdot 34,3 - 25,7) + (-25,7) (34,3 - 2 \cdot 25,7)] + 2 \cdot 30 \cdot 34,3 \cdot 34,3 = 226 286 \text{ cm}^4.$$

Slično dobijamo:

$$I_\eta = 492 643 \text{ cm}^4 \\ I_{\xi\eta} = -29224 \text{ cm}^4.$$

Ove vrijednosti su nam potrebne da bismo odredili položaj glavnih centralnih osa inercije profila i korespondentne glavne centralne momente inercije:

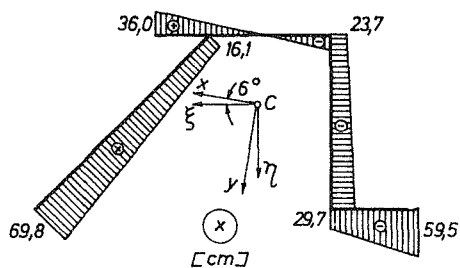
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 I_{\xi\eta}}{I_\xi - I_\eta} = -\frac{2 (-29224)}{226 286 - 492 643} = -0,22, \quad \alpha \approx -6^\circ$$

$$I_{\max} = \frac{1}{2} (I_\xi + I_\eta) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_\xi - I_\eta)^2 + 4 I_{\xi\eta}^2} = \dots = 359465 \pm 136347$$

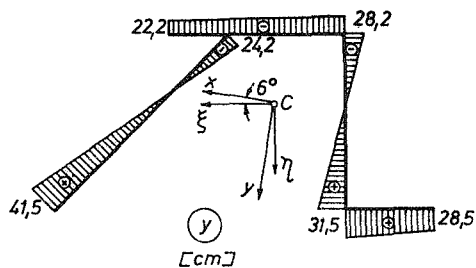
$$I_x = 223 118 \text{ cm}^4, \quad I_y = 495 812 \text{ cm}^4.$$

Na sl. P A.18 (d) i (e) prikazani su dijagrami x i y koordinate profila, koji su dobijeni iz ξ i η koordinate koristeći izraze za transformaciju koordinata usljed rotacije koordinatnog sistema za ugao $\alpha = -6^\circ$:

$$x = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = 0,9945 \xi - 0,1 \eta \\ y = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha = 0,1 \xi + 0,9945 \eta.$$



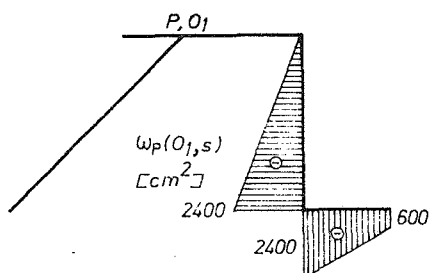
(d)



(e)

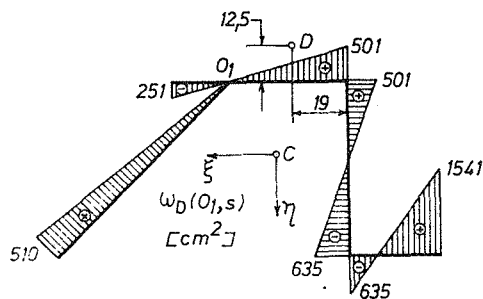
Sl. P A.18(d) — (e).

Da bismo odredili glavni pol (centar smicanja) profila, prvo izaberimo proizvoljan pol P i nultu tačku O_1 , na primjer kao na sl. P A.18 (f), i nađimo dijagram korespondentne sektorske koordinate $\omega_p(O_1, s)$. Dobijamo dijagram na sl. PA. 18 (f)



(f)

sl. PA.18(f).



(g)

Sl. P A.18 (f) — (g).

Množeći dijagrame na sl.P A.18 (d) i (f) sada dobijamo

$$I_{x_{\text{ovp}}} = 2 \frac{60}{6} (-23,7 - 2 \cdot 29,7) (-2400) + 2 \frac{30}{6} [-29,7 (-2 \cdot 2400 - 600) - 59,5 (-2400 - 2 \cdot 600)] = 7734600 \text{ cm}^5.$$

Slično, iz dijagrama na sl.P A.18 (e) i (f) nalazimo

$$I_{y_{\text{ovp}}} = -4397400 \text{ cm}^5,$$

pa su koordinate glavnog pola:

$$x_D = x_p + \frac{I_{y_{\text{ovp}}}}{I_x} = 16,1 + \frac{-4397400}{223118} = -3,6 \text{ cm}$$

$$y_D = y_p - \frac{I_{x_{\text{ovp}}}}{I_y} = -24,2 - \frac{7734600}{495812} = -38,8 \text{ cm},$$

ili u (ξ, η) koordinatnom sistemu:

$$\xi_D = x_D \cos \alpha - y_D \sin \alpha = \dots = -7,46 \text{ cm}$$

$$\eta_D = x_D \sin \alpha + y_D \cos \alpha = \dots = -38,23 \text{ cm}.$$

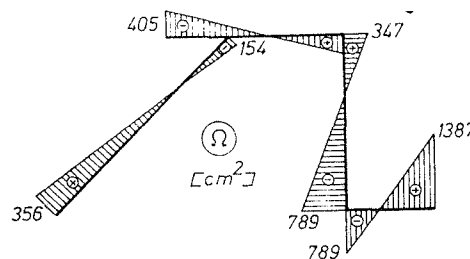
Dijagram sektorske koordinate u odnosu na glavni pol i nultu tačku O_1 prikazan je na sl. P A.18 (g). Normiranu sektorsku koordinatu sada dobijamo iz

$$\dot{\Omega} = \omega_D (o_1, s) - \omega_0,$$

gdje je $\omega_0 = 154 \text{ cm}^2$, s obzirom da je površina profila $A = 420 \text{ cm}^2$ i

$$\int_A \omega_D (o_1, s) dA = \sqrt{2} \frac{1}{2} 60 \sqrt{2} \cdot 510 + 2 \frac{501 - 251}{2} 60 + 2 \frac{501 - 635}{2} 60 + 2 \frac{1541 - 635}{2} 30 = 64740 \text{ cm}^4.$$

Dijagram normirane sektorske koordinate prikazan je na sl.PA.18 (h).



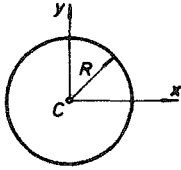
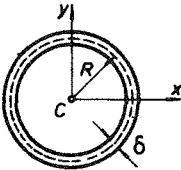
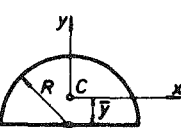
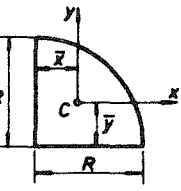
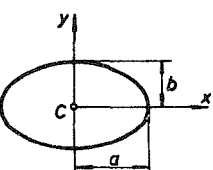
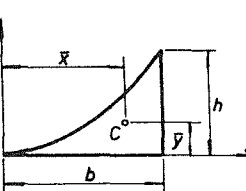
Sl. P A.18(h).

Korespondentni sektorski moment inercije je

$$I_{\Omega} = \sqrt{2} \frac{60 \sqrt{2}}{6} [356 (2 \cdot 356 - 154) - 154 (356 - 2 \cdot 154)] + 2 \frac{60}{6} [-405 (-2 \cdot 405 + 347) + 347 (-405 + 2 \cdot 347)] + 2 \cdot \frac{60}{6} [347 (2 \cdot 347 - 789) - 789 (347 - 2 \cdot 789)] + 2 \cdot \frac{30}{6} [-789 (-2 \cdot 789 + 1387) + 1387 (-789 + 2 \cdot 1387)] = \dots = 57,39 \text{ dm}^6.$$

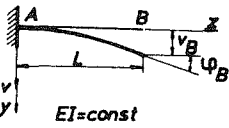
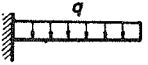
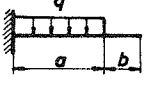
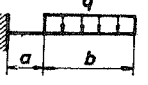
Tabela A:1. Momenti inercije nekih ravnih površina

1.		Pravougaonik (Koordinatni početak u težištu C)
		$A = bh$ $\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{2}$
		$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$
		$I_{xy} = 0$ $I_C = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$
2.		Pravougaonik (Koordinatni početak u tački O)
		$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $I_y = \frac{hb^3}{3}$
		$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4}$ $I_O = \frac{bh}{3} (b^2 + h^2)$
3.		Trougao (Koordinatni početak u težištu C)
		$A = \frac{bh}{2}$ $\bar{x} = \frac{b+c}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$
		$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh}{36} (b^2 - bc + c^2)$
		$I_{xy} = \frac{bh^2}{72} (b-2c)$ $I_C = \frac{bh}{36} (h^2 + b^2 - bc + c^2)$
4.		Trougao (Koordinatni početak u tački O)
		$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{bh}{12} (3b^2 - 3bc + c^2)$
		$I_{xy} = \frac{bh^2}{24} (3b-2c)$ $I_O = \frac{bh}{12} (h^2 + 3b^2 - 3bc + c^2)$
5.		Trapez (Koordinatni početak u težištu C)
		$A = \frac{h(a+b)}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{3} \frac{2a+b}{a+b}$
		$I_x = \frac{h^3 (a^2 + ab + b^2)}{36(a+b)}$

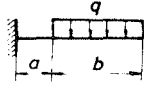
<p>6.</p> 	<p>Krug (Koordinatni početak u težištu C)</p> $A = \pi R^2$ $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$ $I_{xy} = 0 \quad I_c = \frac{\pi R^4}{2}$
<p>7.</p> 	<p>Tanki kružni prsten ($\delta \ll R$)</p> $A \approx 2\pi R\delta$ $I_x = I_y \approx \pi R^3\delta$ $I_{xy} = 0 \quad I_c \approx 2\pi R^3\delta$
<p>8.</p> 	<p>Polukrug (Koordinatni početak u težištu C)</p> $A = \frac{\pi R^2}{2} \quad \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$ $I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)R^4}{72\pi} \quad I_y = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_{xy} = 0$
<p>9.</p> 	<p>Četvrtina kruga (Koordinatni početak u težištu C)</p> $A = \frac{\pi R^2}{4} \quad \bar{x} = \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$ $I_x = I_y = \frac{(9\pi^2 - 64)R^4}{144\pi}$ $I_{xy} = \frac{9\pi - 32}{72\pi} R^4$
<p>10.</p> 	<p>Elipsa (Koordinatni početak u težištu C)</p> $A = \pi ab$ $I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \quad I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$ $I_{xy} = 0 \quad I_c = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)$
<p>11.</p> 	<p>Parabola ($y = \frac{hx^2}{b^2}$)</p> $A = \frac{bh}{3} \quad \bar{x} = \frac{3b}{4} \quad \bar{y} = \frac{3h}{10}$ $I_x = \frac{bh^3}{24} \quad I_y = \frac{hb^3}{5}$ $I_{xy} = \frac{h^2 b^2}{12}$

DODATAK B: TABLICE UGIBA I NAGIBA

Tablica B:1 Ugibi i nagibi konzole

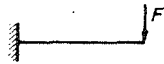
	$v = \text{ugib}$ $v' = \frac{dv}{dz} = \text{nagib}$ $v_B = v(L) = \text{ugib desnog kraja konzole}$ $\varphi_B = v'(L) = \text{nagib desnog kraja konzole}$
	$v = \frac{qz^2}{24EI} (6L^2 - 4Lz + z^2)$ $v' = \frac{qz}{6EI} (3L^2 - 3Lz + z^2)$ $v_B = \frac{qL^4}{8EI}, \quad \varphi_B = \frac{qL^3}{6EI}$
	$v = \frac{qz^2}{24EI} (6a^2 - 4az + z^2), \quad 0 \leq z \leq a$ $v' = \frac{qz}{6EI} (3a^2 - 3az + z^2), \quad 0 \leq z \leq a$ $v = \frac{qa^3}{24EI} (4z - a), \quad v' = \frac{qa^3}{6EI}, \quad a \leq z \leq L$ $\text{Za } z = a: v = \frac{qa^4}{8EI}, \quad v' = \frac{qa^3}{6EI}$ $v_B = \frac{qa^3}{24EI} (4L - a), \quad \varphi_B = \frac{qa^3}{6EI}$
	$v = \frac{q}{12EI} (3bL + 3ab - 2bz), \quad 0 \leq z \leq a$ $v' = \frac{qbz}{2EI} (L + a - z), \quad 0 \leq z \leq a$ $v = \frac{q}{24EI} (z^4 - 4Lz^3 + 6L^2z^2 - 4a^3z + a^4), \quad a \leq z \leq L$

$$v' = \frac{q}{6EI} (z^3 - 3Lz^2 + 3L^2z - a^3), \quad a \leq z \leq L$$



$$\text{Za } z = a: v = \frac{qa^2b}{12EI} (3L + a), \quad v' = \frac{qabL}{2EI}$$

$$v_B = \frac{q}{24EI} (3L^4 - 4a^3L + a^4), \quad \varphi_B = \frac{q}{6EI} (L^3 - a^3)$$



$$v = \frac{Fz^2}{6EI} (3L - z), \quad v' = \frac{Fz}{2EI} (2L - z)$$

$$v_B = \frac{FL^3}{3EI}, \quad \varphi_B = \frac{FL^2}{2EI}$$

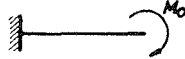


$$v = \frac{Fz^2}{6EI} (3a - z), \quad v' = \frac{Fz}{2EI} (2a - z), \quad 0 \leq z \leq a$$

$$v = \frac{Fa^2}{6EI} (3z - a), \quad v' = \frac{Fa^2}{2EI}, \quad a \leq z \leq L$$

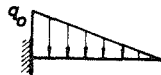
$$\text{Za } z = a: v = \frac{Fa^3}{3EI}, \quad v' = \frac{Fa^2}{2EI}$$

$$v_B = \frac{Fa^2}{6EI} (3L - a), \quad \varphi_B = \frac{Fa^2}{2EI}$$



$$v = \frac{M_0z^2}{2EI}, \quad v' = \frac{M_0z}{EI}$$

$$v_B = \frac{M_0L^2}{2EI}, \quad \varphi_B = \frac{M_0L}{EI}$$



$$v = \frac{q_0z^2}{120LEI} (10L^3 - 10L^2z + 5Lz^2 - z^3)$$

$$v' = \frac{q_0z}{24LEI} (4L^3 - 6L^2z + 4Lz^2 - z^3)$$

$$v_B = \frac{q_0L^4}{30EI}, \quad \varphi_B = \frac{q_0L^3}{24EI}$$



$$v = \frac{q_0z^2}{120LEI} (20L^3 - 10L^2z + z^3)$$

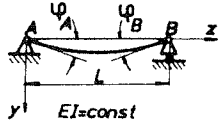
$$v' = \frac{q_0z}{24LEI} (8L^3 - 6L^2z + z^3)$$

$$v_B = \frac{11q_0L^4}{120EI}, \quad \varphi_B = \frac{q_0L^3}{8EI}$$

Tablica B: 2 Ugibi i nagibi proste grede

$v =$ ugib

$v' = \frac{dv}{dz} =$ nagib



$v_C = v\left(\frac{L}{2}\right) =$ ugib na sredini grede

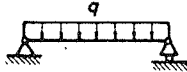
$z_1 =$ udaljenje od A tačke sa maksimalnim ugibom

$v_{\max} =$ maksimalni ugib

$\varphi_A = v'(0) =$ nagib lijevog kraja grede

$\varphi_B = -v'(L) =$ nagib desnog kraja grede

$v = \frac{qz}{24EI} (L^3 - 2Lz^2 + z^3)$

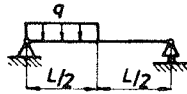


$v' = \frac{q}{24EI} (L^3 - 6Lz^2 + 4z^3)$

$v_C = v_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI}, \quad \varphi_A = \varphi_B = \frac{qL^3}{24EI}$

$v = \frac{qz}{384EI} (9L^3 - 24Lz^2 + 16z^3), \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$

$v' = \frac{q}{384EI} (9L^3 - 72Lz^2 + 64z^3), \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$



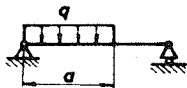
$v = \frac{qL}{384EI} (8z^3 - 24Lz^2 + 17L^2z - L^3), \quad \frac{L}{2} \leq z \leq L$

$v' = \frac{qL}{384EI} (24z^2 - 48Lz + 17L^2), \quad \frac{L}{2} \leq z \leq L$

$v_C = \frac{5qL^4}{768EI}, \quad \varphi_A = \frac{3qL^3}{128EI}, \quad \varphi_B = \frac{7qL^3}{384EI}$

$v = \frac{qz}{24LEI} (a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2z^2 - 4aLz^2 + Lz^3)$

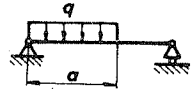
$0 \leq z \leq a$



$v' = \frac{q}{24LEI} (a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2z^2 - 12aLz^2 + 4Lz^3)$

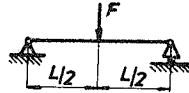
$0 \leq z \leq a$

$v = \frac{qa^2}{24LEI} (-a^2L + 4L^2z + a^2z - 6Lz^2 + 2z^3),$
 $a \leq z \leq L$



$$v' = \frac{qa^2}{24LEI} (4L^2 + a^2 - 12Lz + 6z^2), \quad a \leq z \leq L$$

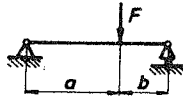
$$\Phi_A = \frac{qa^2}{24LEI} (a^2 - 4aL + 4L^2), \quad \Phi_B = \frac{qa^2}{24LEI} (2L^2 - a^2)$$



$$v = \frac{Fz}{48EI} (3L^2 - 4z^2), \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{F}{16EI} (L^2 - 4z^2), \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$$

$$v_C = v_{\max} = \frac{FL^3}{48EI}, \quad \Phi_A = \Phi_B = \frac{FL^2}{16EI}$$



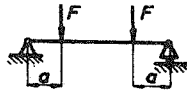
$$v = \frac{Fbz}{6LEI} (L^2 - b^2 - z^2), \quad 0 \leq z \leq a$$

$$v' = \frac{Fb}{6LEI} (L^2 - b^2 - 3z^2), \quad 0 \leq z \leq a$$

$$\Phi_A = \frac{Fab(L+b)}{6LEI}, \quad \Phi_B = \frac{Fab(L+a)}{6LEI}$$

$$\text{Za } a \geq b, \quad v_C = \frac{Fb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$$

$$\text{Za } a \geq b, \quad z_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad \text{i} \quad v_{\max} = \frac{Fb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$$



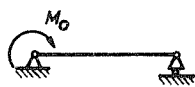
$$v = \frac{Fz}{6EI} (3aL - 3a^2 - z^2), \quad 0 \leq z \leq a$$

$$v' = \frac{F}{2EI} (aL - a^2 - z^2), \quad 0 \leq z \leq a$$

$$v = \frac{Fa}{6EI} (3Lz - 3z^2 - a^2), \quad a \leq z < \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{Fa}{2EI} (L - 2z), \quad a \leq z \leq \frac{L}{2}$$

$$\Phi_A = \frac{Fa(L-a)}{2EI}, \quad v_C = v_{\max} = \frac{Fa}{24EI} (3L^2 - 4a^2)$$

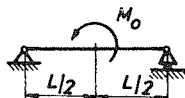


$$v = \frac{M_0 z}{6LEI} (2L^2 - 3Lz + z^2)$$

$$v' = \frac{M_0}{6LEI} (2L^2 - 6Lz + 3z^2)$$

$$v_c = \frac{M_0 L^2}{16EI}, \quad \varphi_A = \frac{M_0 L}{3EI}, \quad \varphi_B = \frac{M_0 L}{6EI}$$

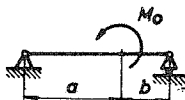
$$z_1 = L \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ i } v_{\max} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$$



$$v = \frac{M_0 z}{24LEI} (L^2 - 4z^2), \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{M_0}{24LEI} (L^2 - 12z^2), \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$$

$$v_c = 0, \quad \varphi_A = \frac{M_0 L}{24EI}, \quad \varphi_B = -\frac{M_0 L}{24EI}$$



$$v = \frac{M_0 z}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - z^2), \quad 0 \leq z \leq a$$

$$v' = \frac{M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3z^2), \quad 0 \leq z \leq a$$

$$\text{Za } z = a: v = \frac{M_0 a}{3LEI} (3aL - 2a^2 - L^2)$$

$$\text{Za } z = a: v' = \frac{M_0}{3LEI} (3aL - 3a^2 - L^2)$$

$$\varphi_A = \frac{M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2), \quad \varphi_B = \frac{M_0}{6LEI} (3a^2 - L^2)$$



$$v = \frac{q_0 z}{360LEI} (7L^4 - 10L^2 z^2 + 3z^4)$$

$$v' = \frac{q_0}{360LEI} (7L^4 - 30L^2 z^2 + 15z^4)$$

$$v_c = \frac{5q_0 L^4}{768EI}, \quad \varphi_A = \frac{7q_0 L^3}{360EI}, \quad \varphi_B = \frac{q_0 L^3}{45EI}$$

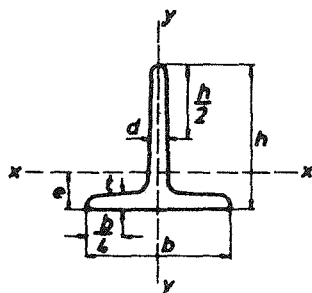
$$z_1 = 0,5193L \text{ i } v_{\max} = 0,00652 \frac{q_0 L^4}{EI}$$

DODATAK C: TABLICE STANDARDNIH PROFILA

U tablicama koje slijede date su geometrijske karakteristike nekoliko standardnih profila. Tablice su sačinjene prema DIN i Jugoslovenskim standardima za potrebe rješavanja primjera koji su analizirani u udžbeniku. U tablicama su korištene sljedeće oznake:

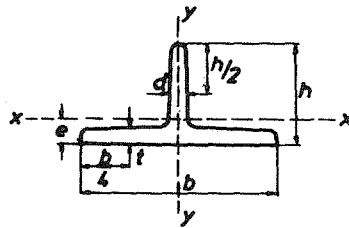
- A – površina profila,
- I – moment inercije,
- W – otporni moment,
- i – poluprečnik inercije,
- S – statički moment polovine profila.

Tablica C: 1 (L profili, $h=b$)



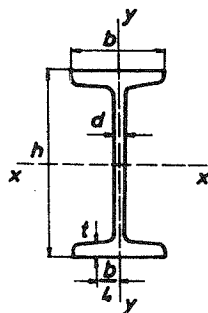
\perp b	b=h	d=t	A	e	I_x	W_x	i_x	I_y	W_y	i_y
cm	mm	mm	cm ²	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
$\perp 1\frac{1}{2}$	15	3	0,82	0,46	0,15	0,14	0,43	0,08	0,11	0,32
$\perp 2$	20	3	1,12	0,58	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42
$\perp 2\frac{1}{2}$	25	3,5	1,64	0,73	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51
$\perp 3$	30	4	2,26	0,85	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62
$\perp 3\frac{1}{2}$	35	4,5	2,97	0,99	3,10	1,23	1,04	1,57	0,90	0,73
$\perp 4$	40	5	3,77	1,12	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83
$\perp 4\frac{1}{2}$	45	5,5	4,67	1,26	8,13	2,51	1,32	4,01	1,78	0,93
$\perp 5$	50	6	5,66	1,39	12,1	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03
$\perp 6$	60	7	7,94	1,66	23,8	5,48	1,73	12,2	4,07	1,24
$\perp 7$	70	8	10,6	1,94	44,5	8,79	2,05	22,1	6,32	1,44
$\perp 8$	80	9	13,6	2,22	73,7	12,8	2,33	37,0	9,25	1,65
$\perp 9$	90	10	17,1	2,48	119	18,2	2,64	58,5	13,0	1,85
$\perp 10$	100	11	20,9	2,74	179	24,6	2,92	88,3	17,7	2,05
$\perp 12$	120	13	29,6	3,28	366	42,0	3,51	178	29,7	2,45
$\perp 14$	140	15	39,9	3,80	660	64,7	4,07	330	47,2	2,88
$\perp 16$	160	15	45,8	4,20	1010	85,5	4,68	490	61,3	3,27
$\perp 18$	180	18	61,7	4,80	1720	130	5,27	857	95,2	3,73

Tablica C:2 (I profili, $h = \frac{1}{2}b$)



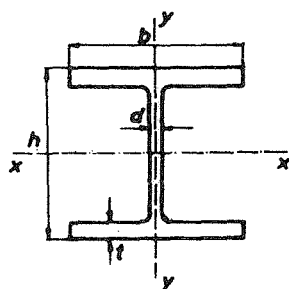
I b.h	b	h	d=t	A	e	I_x	W_x	i_x	I_y	W_y	i_y
cm	mm	mm	mm	cm ²	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
↓ 6.3	60	30	5,5	4,64	0,67	2,58	1,11	0,75	8,62	2,87	1,36
↓ 7.3 ¹ / ₂	70	35	6	5,94	0,77	4,49	1,65	0,87	15,1	4,31	1,59
↓ 8.4	80	40	7	7,91	0,88	7,81	2,50	0,99	28,5	7,13	1,90
↓ 9.4 ¹ / ₂	90	45	8	10,2	1,00	12,7	3,63	1,11	46,1	10,2	2,12
↓ 10.5	100	50	8,5	12,0	1,09	18,7	4,78	1,25	67,7	13,5	2,38
↓ 12.6	120	60	10	17,0	1,30	38,0	8,09	1,49	137	22,8	2,84
↓ 14.7	140	70	11,5	22,8	1,51	68,9	12,6	1,74	258	36,9	3,36
↓ 16.8	160	80	13	29,5	1,72	117	18,6	1,99	422	52,8	3,78
↓ 18.9	180	90	14,5	37,0	1,93	185	26,2	2,24	670	74,4	4,25
↓ 20.10	200	100	16	45,5	2,14	277	35,2	2,47	1000	100	4,69

Tablica C:3 (I profili)



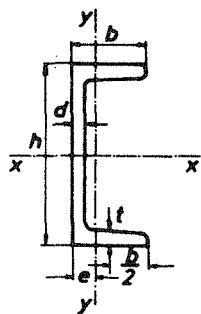
I h	h	b	d	t	A	I_x	W_x	i_x	I_y	W_y	i_y	S_x
cm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³
I 8	80	42	3,9	5,9	7,58	77,8	19,5	3,20	6,3	3,00	0,91	11,4
I 10	100	50	4,5	6,8	10,6	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9
I 12	120	58	5,1	7,7	14,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8
I 14	140	66	5,7	8,6	18,3	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	47,7
I 16	160	74	6,3	9,5	22,8	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0
I 18	180	82	6,9	10,4	27,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4
I 20	200	90	7,5	11,3	33,5	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125
I 22	220	98	8,1	12,2	39,6	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162
I 24	240	106	8,7	13,1	46,1	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206
I 26	260	113	9,4	14,1	53,4	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257
I 28	280	119	10,1	15,2	61,1	7590	543	11,1	364	61,2	2,45	316
I 30	300	125	10,8	16,2	69,1	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381
I 32	320	131	11,5	17,3	77,8	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457
I 34	340	137	12,2	18,3	86,8	15700	923	13,5	674	98,4	2,80	540
I 36	360	143	13,0	19,5	97,1	19610	1090	14,2	818	114	2,90	638
I 38	380	149	13,7	20,5	107	24010	1250	15,0	975	131	3,02	741
I 40	400	155	14,4	21,6	118	29210	1460	15,7	1160	149	3,13	857

Tablica C:4 (IP profili)



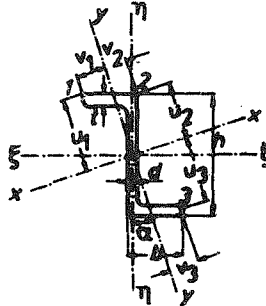
IPh	h	b	d	t	A	I_x	W_x	i_x	I_y	W_y	i_y	S_x
cm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³
IP 14	140	140	8	12	44,1	1520	217	5,87	550	78,6	3,53	127
IP 16	160	160	9	14	58,4	2630	329	6,72	958	120	4,05	188
IP 18	180	180	9	14	65,8	3830	426	7,63	1360	151	4,55	241
IP 20	200	200	10	16	82,7	5950	595	8,48	2140	214	5,08	337
IP 22	220	220	10	16	91,1	8050	732	9,37	2840	258	5,59	412
IP 24	240	240	11	18	111	11690	974	10,5	4150	346	6,11	549
IP 26	260	260	11	18	121	15050	1160	11,2	5280	406	6,61	649
IP 28	280	280	12	20	144	20720	1480	12,0	7320	523	7,14	831
IP 30	300	300	12	20	154	25760	1720	12,9	9010	600	7,65	959
IP 32	320	300	13	22	171	32250	2020	13,7	9910	661	7,60	1130
IP 34	340	300	13	22	174	36940	2170	14,5	9910	661	7,55	1220
IP 36	360	300	14	24	192	45120	2510	15,3	10810	721	7,51	1410
IP 38	380	300	14	24	194	50950	2680	16,2	10810	721	7,46	1510
IP 40	400	300	14	26	209	60640	3030	17,0	11710	781	7,49	1700
IP 42 $\frac{1}{2}$	425	300	14	26	212	69480	3270	18,1	11710	781	7,43	1830
IP 45	450	300	15	28	232	84220	3740	19,0	12620	841	7,38	2110
IP 47 $\frac{1}{2}$	475	300	15	28	235	95120	4010	20,1	12620	841	7,32	2250
IP 50	500	300	16	30	255	113200	4530	21,0	13530	902	7,28	2560
IP 55	550	300	16	30	263	140300	5100	23,1	13530	902	7,17	2880
IP 60	600	300	17	32	289	180800	6030	25,0	14440	962	7,07	3500
IP 65	650	300	17	32	297	216800	6670	27,0	14440	962	6,97	3780
IP 70	700	300	18	34	324	270300	7720	28,9	15350	1020	6,88	4400
IP 75	750	300	18	34	333	316300	8430	30,8	15350	1020	6,79	4800
IP 80	800	300	18	34	342	366400	9160	32,7	15350	1020	6,70	5220

Tablica C:5 (C profili)



h	h	b	d	t	A	e	I_x	W_x	i_x	I_y	W_y	i_y	S_x
cm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³
C 6,5	65	42	5,5	7,5	9,03	1,42	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	-
C 8	80	45	6	8	11,0	1,45	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9
C 10	100	50	6	8,5	13,5	1,55	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5
C 12	120	55	7	9	17,0	1,60	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3
C 14	140	60	7	10	20,4	1,75	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4
C 16	160	65	7,5	10,5	24,0	1,84	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8
C 18	180	70	8	11	28,0	1,92	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6
C 20	200	75	8,5	11,5	32,2	2,01	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114
C 22	220	80	9	12,5	37,4	2,14	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	146
C 24	240	85	9,5	13	42,3	2,23	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179
C 26	260	90	10	14	48,3	2,36	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221
C 28	280	95	10	15	53,3	2,53	6280	448	10,9	399	57,2	2,74	266
C 30	300	100	10	16	58,8	2,70	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316

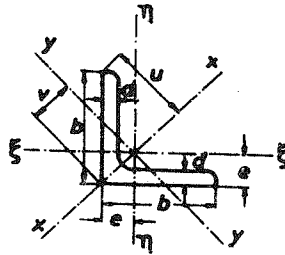
Tablica C:6 (Z profili)



Zh	h	b	d	t	A	tgα	u ₁	v ₁	u ₂	v ₂	u ₃	v ₃
cm	mm	mm	mm	mm	cm ²	-	cm	cm	cm	cm	cm	cm
Z 3	30	38	4	4,5	4,32	1,655	3,86	0,58	0,61	1,39	3,54	0,87
Z 4	40	40	4,5	5	5,43	1,181	4,17	0,91	1,12	1,67	3,82	1,19
Z 5	50	43	5	5,5	6,77	0,939	4,60	1,24	1,65	1,89	4,21	1,49
Z 6	60	45	5	6	7,91	0,779	4,98	1,51	2,21	2,04	4,56	1,76
Z 8	80	50	6	7	11,1	0,588	5,83	2,02	3,30	2,29	5,35	2,25
Z 10	100	55	6,5	8	14,5	0,492	6,77	2,43	4,34	2,50	6,24	2,65
Z 12	120	60	7	9	18,2	0,433	7,75	2,80	5,37	2,70	7,16	3,02
Z 14	140	65	8	10	22,9	0,385	8,72	3,18	6,39	2,89	8,08	3,39
Z 16	160	70	8,5	11	27,5	0,357	9,74	3,51	7,39	3,09	9,04	3,72
Z 18	180	75	9,5	12	33,3	0,329	10,7	3,86	8,40	3,27	9,99	4,08
Z 20	200	80	10	13	38,7	0,313	11,8	4,17	9,39	3,47	11,0	4,39

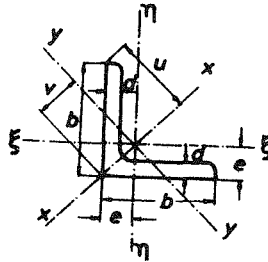
Zh	I _y	W _y	i _y	S _y	I _x	W _x	i _x	I _x	W _x	i _x	I _y	W _y	i _y	-I _{yy}
cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴
Z 3	5,96	5,97	1,17	-	13,7	3,80	1,78	18,1	4,69	2,04	1,54	1,11	0,60	7,35
Z 4	13,5	6,75	1,58	-	17,6	4,66	1,80	28,0	6,72	2,27	3,05	1,83	0,75	12,2
Z 5	26,3	10,5	1,97	-	23,8	5,88	1,88	44,9	9,76	2,57	5,23	2,76	0,88	19,6
Z 6	44,7	14,9	2,38	-	30,1	7,09	1,95	67,2	13,5	2,81	7,60	3,73	0,98	28,8
Z 8	109	27,3	3,13	16,3	47,4	10,1	2,07	142	24,4	3,58	14,7	6,44	1,15	55,6
Z 10	222	44,4	3,91	26,4	72,5	14,0	2,24	270	39,8	4,31	24,6	9,26	1,30	97,2
Z 12	402	67,0	4,70	39,6	106	18,8	2,42	470	60,6	5,08	37,7	12,5	1,44	158
Z 14	676	96,6	5,43	57,6	148	24,3	2,54	768	88,0	5,79	56,4	16,6	1,57	239
Z 16	1050	132	6,20	79,0	211	32,1	2,77	1180	121	6,57	79,5	21,4	1,70	358
Z 18	1600	178	6,92	106,2	270	38,4	2,84	1760	164	7,26	110	27,0	1,82	490
Z 20	2300	230	7,71	137,4	357	47,6	3,04	2510	213	8,06	147	33,4	1,95	674

Tablica C:7 (L profili)



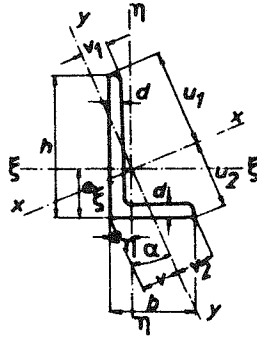
L b.b.d	A	e	u	v	$I_y = I_z$	$W_y = W_z$	$i_y = i_z$	I_x	i_x	I_y	W_y	i_y
mm	cm ²	cm	cm	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	cm ⁴	cm ³	cm
L 20.20.3	1,12	0,60	1,41	0,85	0,39	0,28	0,59	0,62	0,74	0,15	0,18	0,37
L 25.25.3	1,42	0,73	1,77	1,03	0,79	0,45	0,75	1,27	0,95	0,31	0,30	0,47
L 25.25.4	1,85	0,76	1,77	1,08	1,01	0,58	0,74	1,61	0,93	0,40	0,37	0,47
L 30.30.3	1,74	0,84	2,12	1,18	1,41	0,65	0,90	2,24	1,14	0,57	0,48	0,57
L 30.30.4	2,27	0,89	2,12	1,24	1,81	0,86	0,89	2,85	1,12	0,76	0,61	0,58
L 30.30.5	2,78	0,92	2,12	1,30	2,16	1,04	0,88	3,41	1,11	0,91	0,70	0,57
L 35.35.4	2,67	1,00	2,47	1,41	2,96	1,18	1,05	4,68	1,33	1,24	0,88	0,68
L 40.40.4	3,08	1,12	2,83	1,58	4,48	1,56	1,21	7,09	1,52	1,86	1,18	0,78
L 40.40.5	3,79	1,16	2,83	1,64	5,43	1,91	1,20	8,64	1,51	2,22	1,35	0,77
L 45.45.5	4,30	1,28	3,18	1,81	7,83	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87
L 50.50.5	4,80	1,40	3,54	1,98	11,0	3,05	1,51	17,4	1,90	4,59	2,32	0,98
L 50.50.6	5,69	1,45	3,54	2,04	12,8	3,61	1,50	20,4	1,89	5,24	2,57	0,96
L 55.55.6	6,31	1,56	3,89	2,21	17,3	4,40	1,66	27,4	2,08	7,24	3,28	1,07
L 60.60.6	6,91	1,69	4,24	2,39	22,8	5,29	1,82	36,1	2,29	9,43	3,95	1,17
L 60.60.8	9,03	1,77	4,24	2,50	29,1	6,88	1,80	46,1	2,26	12,1	4,84	1,16
L 65.65.7	8,70	1,85	4,60	2,62	33,4	7,18	1,96	53,0	2,47	13,8	5,27	1,26
L 70.70.7	9,40	1,97	4,95	2,79	42,4	8,43	2,12	67,1	2,67	17,6	6,31	1,37
L 70.70.9	11,9	2,05	4,95	2,90	52,6	10,6	2,10	83,1	2,64	22,0	7,59	1,36
L 75.75.8	11,5	2,13	5,30	3,01	58,9	11,0	2,26	93,3	2,85	24,4	8,11	1,46
L 75.75.10	14,0	2,21	5,30	3,12	71,4	13,5	2,25	113	2,83	29,8	9,55	1,45
L 80.80.8	12,3	2,26	5,66	3,20	72,3	12,6	2,42	115	3,06	29,6	9,25	1,55

Tablica C:7 – Nastavak (L profili)



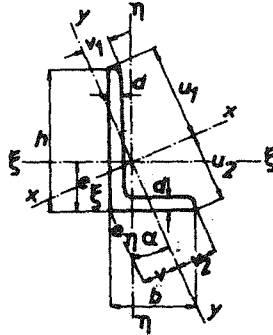
L b.b.d	A	e	u	v	$I_y=I_z$	$W_y=W_z$	$i_y=i_z$	I_x	i_x	I_y	W_y	i_y
mm	cm ²	cm	cm	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	cm ⁴	cm ³	cm
L* 80.80.10	15,1	2,34	5,66	3,31	87,5	15,5	2,41	139	3,03	35,9	10,9	1,54
L 80.80.12	17,9	2,41	5,66	3,41	102	18,2	2,39	161	3,00	43,0	12,6	1,53
L 90.90.9	15,5	2,54	6,36	3,59	116	18,0	2,74	184	3,45	47,8	13,3	1,76
L 90.90.11	18,7	2,62	6,36	3,70	138	21,6	2,72	218	3,41	57,1	15,4	1,75
L 100.100.10	19,2	2,82	7,07	3,99	177	24,7	3,04	280	3,82	73,3	18,4	1,95
L 100.100.12	22,7	2,90	7,07	4,10	207	29,2	3,02	328	3,80	86,2	21,0	1,95
L 110.110.10	21,2	3,07	7,78	4,34	239	30,1	3,36	379	4,23	98,6	22,7	2,16
L 110.110.12	25,1	3,15	7,78	4,45	280	35,7	3,34	444	4,21	116	26,1	2,15
L 120.120.11	25,4	3,36	8,49	4,75	341	39,5	3,66	541	4,62	140	29,5	2,35
L 120.120.13	29,7	3,44	8,49	4,86	394	46,0	3,64	625	4,59	162	33,3	2,34
L 130.130.12	30,0	3,64	9,19	5,15	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54
L 130.130.14	34,7	3,72	9,19	5,26	540	58,2	3,94	857	4,97	223	42,4	2,53
L 140.140.14	37,2	4,02	9,90	5,68	692	69,3	4,31	1100	5,44	282	49,7	2,75
L 140.140.16	42,2	4,09	9,90	5,78	775	78,2	4,28	1230	5,40	318	55,0	2,74
L 150.150.14	40,3	4,21	10,6	5,95	845	78,2	4,58	1340	5,77	347	58,3	2,94
L 150.150.16	45,7	4,29	10,6	6,07	949	88,7	4,56	1510	5,74	391	64,4	2,93
L 160.160.15	46,1	4,49	11,3	6,35	1100	95,6	4,88	1750	6,15	453	71,3	3,14
L 160.160.17	51,8	4,57	11,3	6,46	1230	108	4,86	1950	6,13	506	78,3	3,13
L 200.200.16	61,8	5,52	14,1	7,80	2340	162	6,15	3740	7,78	943	121	3,91
L 200.200.18	69,1	5,60	14,1	7,92	2600	181	6,13	4150	7,75	1050	133	3,90
L 200.200.20	76,4	5,68	14,1	8,04	2850	199	6,11	4540	7,72	1160	144	3,89

Tablica C:8 (L profili, raznokraki)



L b.h.d	A	e ₁	e ₂	u ₁	u ₂	v ₁	v ₂	tgα	
mm	cm ²	cm	cm	cm	cm	cm	cm	-	
L 20.30.3	1,42	0,99	0,50	2,04	1,51	0,86	0,56	1,04	0,431
L 20.30.4	1,85	1,03	0,54	2,02	1,52	0,91	0,58	1,03	0,423
L 20.40.3	1,72	1,43	0,44	2,61	1,77	0,79	0,46	1,19	0,259
L 30.45.4	2,87	1,48	0,74	3,07	2,26	1,27	0,83	1,58	0,436
L 40.60.5	4,79	1,96	0,97	4,08	3,01	1,68	1,10	2,09	0,437
L 40.60.6	5,68	2,00	1,01	4,06	3,02	1,72	1,12	2,08	0,433
L 40.60.7	6,55	2,04	1,05	4,04	3,03	1,77	1,14	2,07	0,429
L 40.80.6	6,89	2,85	0,88	5,21	3,53	1,55	0,89	2,42	0,259
L 50.65.5	5,54	1,99	1,25	4,52	3,61	2,08	1,50	2,38	0,583
L 50.65.7	7,60	2,07	1,33	4,50	3,62	2,19	1,52	2,37	0,574
L 50.100.10	14,1	3,67	1,20	6,43	4,49	2,08	1,22	2,91	0,252
L 55.75.7	8,66	2,40	1,41	5,16	4,02	2,37	1,62	2,70	0,525
L 60.90.6	8,69	2,89	1,41	6,14	4,50	2,46	1,60	3,16	0,442
L 60.90.8	11,4	2,97	1,49	6,11	4,54	2,56	1,69	3,15	0,437
L 65.80.8	11,0	2,47	1,73	5,59	4,65	2,79	2,05	2,94	0,645
L 65.100.9	14,2	3,32	1,59	6,78	4,94	2,76	1,78	3,46	0,415
L 65.100.11	17,1	3,40	1,67	6,74	4,97	2,85	1,83	3,45	0,410
L 65.130.10	18,6	4,65	1,45	8,43	5,76	2,58	1,54	3,82	0,259
L 75.130.8	15,9	4,36	1,65	8,73	6,01	2,99	1,83	4,26	0,339
L 80.120.8	15,5	3,83	1,87	8,23	5,99	3,27	2,16	4,20	0,441
L 80.120.10	19,1	3,92	1,95	8,18	6,03	3,37	2,19	4,19	0,438
L 80.120.12	22,7	4,00	2,03	8,14	6,06	3,46	2,25	4,18	0,433
L 90.130.10	21,2	4,15	2,18	8,92	6,69	3,75	2,51	4,62	0,472
L 90.130.12	25,1	4,24	2,26	8,88	6,72	3,85	2,56	4,60	0,468
L 100.150.10	24,2	4,80	2,34	10,3	7,50	4,10	2,68	5,25	0,442
L 100.150.12	28,7	4,89	2,42	10,2	7,53	4,19	2,73	5,24	0,439
L 100.200.12	34,8	7,03	2,10	13,1	8,82	3,84	2,26	5,95	0,264
L 100.200.14	40,3	7,12	2,18	13,0	8,88	3,93	2,32	5,92	0,262

Tablica C:8 – Nastavak (L profili, raznokraki)



L b.h.d	$I_{\bar{y}}$	$W_{\bar{y}}$	$i_{\bar{y}}$	$I_{\bar{x}}$	$W_{\bar{x}}$	$i_{\bar{x}}$	I_x	i_x	I_y	i_y	$-I_{xy}$
mm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	cm ⁴	cm	cm ⁴
L 20.30.3	1,25	0,62	0,94	0,44	0,29	0,56	1,43	1,00	0,25	0,42	0,43
L 20.30.4	1,59	0,81	0,93	0,55	0,38	0,55	1,81	0,99	0,33	0,42	0,54
L 20.40.3	2,79	1,08	1,27	0,47	0,30	0,52	2,96	1,31	0,30	0,42	0,64
L 30.45.4	5,78	1,91	1,42	2,05	0,91	0,85	6,65	1,52	1,18	0,64	2,01
L 40.60.5	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,50	0,86	5,99
L 40.60.6	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,12	0,85	6,91
L 40.60.7	23,0	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,73	0,85	7,86
L 40.80.6	44,9	8,73	2,55	7,59	2,44	1,05	47,6	2,63	4,90	0,84	10,3
L 50.65.5	23,1	5,11	2,04	11,9	3,18	1,47	28,8	2,28	6,21	1,06	9,89
L 50.65.7	31,0	6,99	2,02	15,8	4,31	1,44	38,4	2,25	8,37	1,05	13,0
L 50.100.10	141	22,2	3,16	23,4	6,17	1,29	149	3,25	15,5	1,04	31,6
L 55.75.7	47,9	9,39	2,35	21,8	5,32	1,59	57,9	2,59	11,8	1,17	19,0
L 60.90.6	71,7	11,7	2,87	25,8	5,61	1,72	82,8	3,09	14,6	1,30	25,2
L 60.90.8	92,5	15,4	2,85	33,0	7,31	1,70	107	3,06	19,0	1,29	32,1
L 65.80.8	68,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,36	30,9
L 65.100.9	141	21,0	3,15	46,7	9,52	1,82	160	3,36	27,2	1,39	47,3
L 65.100.11	167	25,3	3,13	55,1	11,4	1,80	190	3,34	32,6	1,38	55,2
L 65.130.10	321	38,4	4,15	54,2	10,7	1,71	340	4,27	35,0	1,37	74,1
L 75.130.8	276	31,9	4,17	68,3	11,7	2,08	303	4,37	41,3	1,61	70,5
L 80.120.8	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,29	261	4,10	45,8	1,72	79,4
L 80.120.10	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,27	318	4,07	56,1	1,71	96,5
L 80.120.12	323	40,4	3,77	114	19,1	2,25	371	4,04	66,1	1,71	111
L 90.130.10	358	40,5	4,11	141	20,6	2,58	420	4,46	78,5	1,93	132
L 90.130.12	420	48,0	4,09	165	24,4	2,56	492	4,43	92,6	1,92	153
L 100.150.10	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15	194
L 100.150.12	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	5,10	132	2,15	227
L 100.200.12	1440	111	6,43	247	31,3	2,67	1530	6,63	158	2,13	338
L 100.200.14	1650	128	6,41	282	36,1	2,65	1760	6,60	181	2,12	385

DODATAK D: ZADACI ZA VJEŽBU

GLAVA 1

1.1. U nekoj tački napregnutog tijela tenzor napona je

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -15 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ (MPa).}$$

Odrediti:

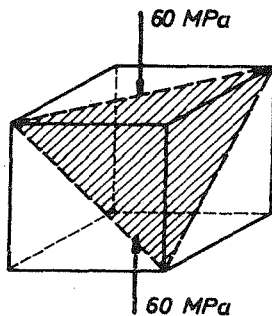
- vektor napona u ravni sa normalom $\vec{n} = \left\{ \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}} \right\}$,
- normalni i smičući napon u toj ravni,
- glavne napone i glavne pravce,
- maksimalni smičući napon i korespondentni normalni napon,
- normalni i smičući napon u oktaedarskoj ravni,
- sferni i devijatorski dio tenzora napona.

1.2. Tenzor napona u tački u odnosu na (x, y, z) koordinatni sistem je:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \text{ (MPa).}$$

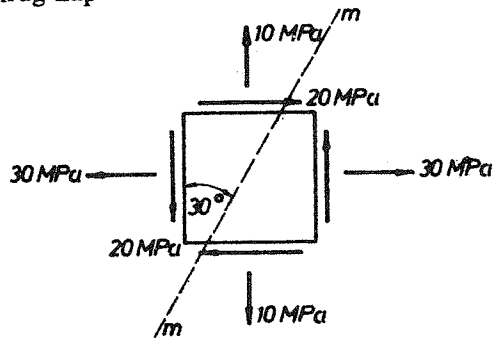
Napisati tenzor napona u odnosu na (ξ, η, ζ) koordinatni sistem koji je dobijen iz (x, y, z) sistema rotacijom za ugao od 60° oko z ose.

1.3. Blok materijala u obliku kocke opterećen je po horizontalnim stranama pritiskom od 60 MPa kao na slici. Odrediti normalni i tangencijalni napon u šrafiranoj ravni.

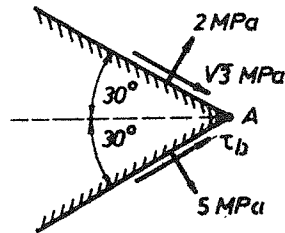


1.4. Za element koji je u stanju napona kao na slici, odrediti:

- normalni i smičući napon u ravni $m - m$,
- glavne napone i element na koji oni djeluju,
- maksimalni smičući napon i element na koji djeluje,
- Mohrov krug napona.

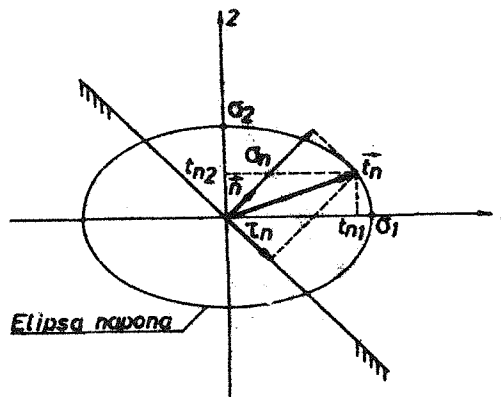


1.5. Normalni i smičući naponi u dvije ravni kroz tačku A tijela su prikazani na slici. Koristeći stav o konjugovanosti napona odrediti intenzitet smičućeg napona τ_b . Odrediti pravce i veličinu glavnih napona u tački A .



1.6. Dokazati da geometrijsko mjesto krajeva vektora napona za sve presjeka kroz uočenu tačku sa ravnim stanjem napona predstavlja elipsu sa jednačinom

$$\frac{t_{n1}^2}{\sigma_1^2} + \frac{t_{n2}^2}{\sigma_2^2} = 1.$$



GLAVA 2

2.1. Komponentalna pomjeranja tačaka tijela data su sa:

$$u_x = 10^{-3} (3x^2y + 6)$$

$$u_y = 10^{-3} (y^2 + 6xz)$$

$$u_z = 10^{-3} (6z^2 + 2yz + 10).$$

Odrediti:

- tenzor deformacije u tački $(x, y, z) = (1, 0, 2)$,
- glavne dilatacije i glavne pravce dilatacije u toj tački.

2.2. Dat je tenzor deformacije u tački

$$E = \begin{bmatrix} -0,005 & 0 & 0 \\ 0 & -0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 \end{bmatrix}.$$

Odrediti:

- maksimalnu smičuću deformaciju (klizanje) u toj tački,
- dilataciju u pravcu normale na ravan maksimalnog klizanja.

2.3. Pokazati da komponentalne deformacije:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{a^3} (x^2 + y^2) z, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{a^3} y^2 z, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{a^3} xyz, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zz} = 0,$$

($a = \text{const.}$) ne predstavljaju kompatibilne deformacije.

2.4. Date su komponentalne deformacije:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{a^2} (x^2 + y^2), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{a^2} y^2, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{a^2} xy, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zz} = 0, \quad a = \text{const.}$$

Odrediti komponentalna pomjeranja koja odgovaraju ovim deformacijama. Integracione konstante odrediti iz uslova da su u tački $(0, 0, 0)$ pomjeranje i rotacija jednaki nuli.

2.5. U tački tijela u kojoj je stanje deformacije ravno pomoću mjernih traka izmjerene su dilatacije: $\varepsilon_a = -0,0005$, $\varepsilon_b = 0,0002$ i $\varepsilon_c = 0,0003$ u pravcima pod uglom od 0° , 45° i 90° u odnosu na horizontalnu x osu. Odrediti:

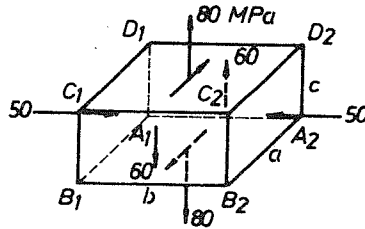
- tenzor deformacije u toj tački,
- dilataciju u pravcu pod uglom od 60° prema x osi,
- klizanje između tog i njemu upravnog pravca,
- glavne dilatacije i glavne pravce dilatacije,
- maksimalnu smičuću deformaciju (klizanje) i pravce između kojih se događa,
- Mohrov krug deformacije.

2.6. Dokazati da se prilikom homogene deformacije dio tijela u obliku lopte deformiše u troosni elipsoid (tzv. elipsoid deformacije).

GLAVA 3

3.1. Blok materijala u obliku paralelepipeda početnih dimenzija $a \times b \times c = 20 \times 30 \times 10$ cm od izotropnog homogenog materijala modula elastičnosti $E = 200$ GPa, Poissonovog koeficijenta $\nu = 1/3$ i koeficijenta linearnog termičkog širenja $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, nalazi se u stanju napona kao što je skicirano na slici. Ako se blok još i zagrije za $\Delta T = 50^\circ\text{C}$, odrediti:

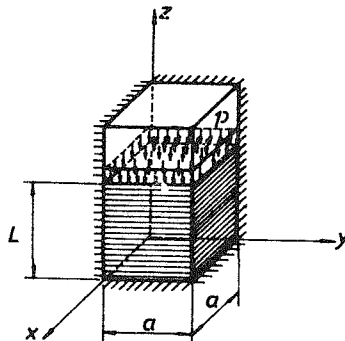
- da li će u bloku doći do plastične deformacije (prema Misesovom kriterijumu) ako je $\sigma_T = 200$ MPa?
- dilataciju dijagonale bloka A_1C_2 ,
- klizanje između pravaca A_1B_2 i A_1C_2 ,
- glavne napone i njihove pravce,
- glavne dilatacije,
- promjenu zapremine bloka.



3.2. Blok materijala na slici sabija se pritiskom $p = 50$ MPa u bunaru čiji su zidovi kruti, i istovremeno se zagrije za $\Delta T = 50^\circ\text{C}$. Zanemarujući trenje između materijala i zidova bunara odrediti:

- komponentalne napone i deformacije,
- komponentalna pomjeranja,
- promjenu visine bloka L ,
- promjenu zapremine bloka.

Dato je: $E = 200$ GPa, $\nu = 1/3$, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $a = 0,1$ m, $L = 1$ m.



- 3.3. Debela kruta ploča ima udubljenje kvadratne osnove dimenzija $10,001 \times 10,001$ mm i dubine 10 mm. U to udubljenje stavljena je čelična kocka dimenzija $10 \times 10 \times 10$ mm. Ako se kocka pritisne silom $F = 15$ kN ravnomjerno raspoređenoj po slobodnoj strani, odrediti napone u kocki. Poznato je $E = 200$ GPa i $\nu = 0,3$.
- 3.4. U tački tijela sa ravnim stanjem deformacije izmjerene su dilatacije: $\varepsilon_{0^\circ} = -0,00022$, $\varepsilon_{45^\circ} = +0,00012$ i $\varepsilon_{90^\circ} = +0,00022$. Izračunati glavne napone i njihove pravce ako je $E = 200$ GPa i $\nu = 0,3$.

GLAVA 4

- 4.1. Pokazati da komponentalni naponi:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= a[y^2 + \nu(x^2 - y^2)] & \sigma_{xy} &= -2\nu xy \\ \sigma_{yy} &= a[x^2 + \nu(y^2 - x^2)] & \sigma_{yz} &= 0 \\ \sigma_{zz} &= a\nu(x^2 + y^2) & \sigma_{zx} &= 0, \end{aligned}$$

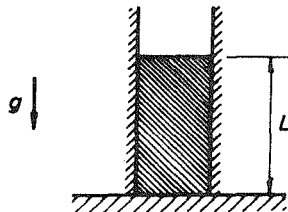
gdje su a i ν konstante, nisu rješenje mogućeg problema teorije elastičnosti, iako zadovoljavaju jednačine ravnoteže sa zapreminskim silama identički jednakim nuli.

- 4.2. Da li komponentalna pomjeranja:

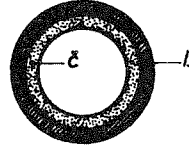
$$u_x = -ayz, \quad u_y = axz, \quad u_z = b(x^2 + y^2),$$

gdje su a i b konstante, mogu biti rješenje problema teorije elastičnosti?

- 4.3. Napisati kompletan skup jednačina teorije elastičnosti (Cauchyve jednačine ravnoteže, Saint-Venantove jednačine kompatibilnosti, Hookeov zakon, Navierove jednačine ravnoteže i Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti) u slučaju:
- ravnog stanja deformacije,
 - ravnog stanja napona.
- 4.4. Cilindrično tijelo od homogenog i izotropnog materijala gustine ρ , modula elastičnosti E i Poissonovog koeficijenta ν postavljeno je u bunar sa krutim, idealno glatkim zidovima, kao što je prikazano na slici. Odrediti naponsko stanje koje se javlja u tijelu usljed dještva sile zemljine teže.



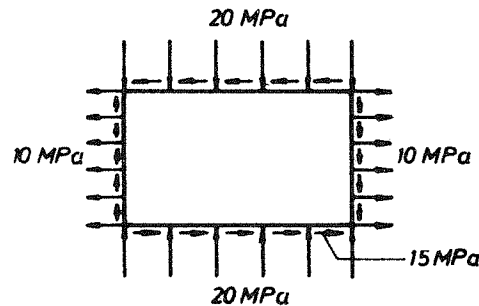
- 4.5. Bakarna cijev je navučena na čeličnu cijev pri visokoj temperaturi T pri kojoj nema pritiska između cijevi. Odrediti napone koji će se pojaviti u bakarnoj i čeličnoj cijevi kad se ohlade do sobne temperature T_0 . Spoljni prečnik čelične cijevi je d , debljina čelične cijevi je δ_1 , a bakarne δ_2 . Poznate su termo-mehaničke osobine čelika i bakra ($\alpha_1, E_1, \alpha_2, E_2$).



GLAVA 5

- 5.1. Pravougaona ploča dimenzija $a \times b = 30 \times 20$ cm i debljine $h = 1$ cm od homogenog izotropnog materijala modula elastičnosti $E = 200$ GPa i Poissonovog koeficijenta $\nu = 1/3$, nalazi se u stanju napona kao što je skicirano na slici. Odrediti:

- specifični deformacioni rad u ploči,
- ukupan deformacioni rad u ploči,
- dio deformacionog rada koji se troši na promjeni oblika i dio koji se troši na promjeni zapremine ploče,
- promjenu zapreminu ploče.

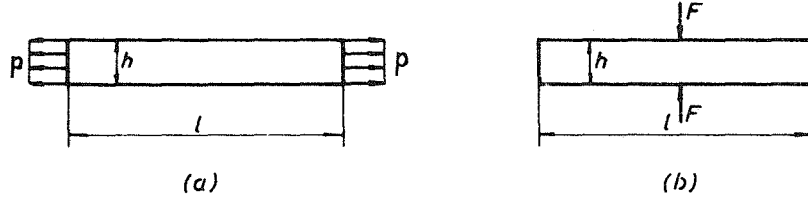


- 5.2. Tenzor deformacije u tački elastično napregnutog tijela je

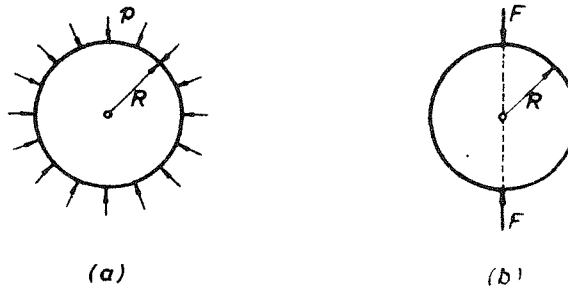
$$E = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Odrediti specifični deformacioni rad u toj tački ako je poznato da je modul elastičnosti materijala $E = 70$ GPa, a Poissonov koeficijent $\nu = 1/3$.

- 5.3. Tanka pravougaona ploča jedinične debljine opterećena je kao na slici (a). Ako je materijal ploče modula elastičnosti E i Poissonovog koeficijenta ν , odrediti smanjenje visine ploče h , pa zatim, koristeći ovaj rezultat i Bettiev stav, odrediti razmicanje δ lijevog i desnog kraja ploče usljed dještva dvije sile F prikazane na slici (b).

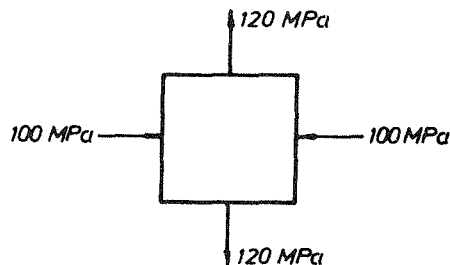


- 5.4. Kugla poluprećnika R od materijala modula elastičnosti E i Poissonovog koeficijenta ν opterećena je po omotaču ravnomjernim pritiskom p , kao na slici (a). Odrediti promjenu prećnika kugle, pa zatim, koristeći ovaj rezultat i Bettiev stav, odrediti smanjenje Δ zapremine kugle usljed dještva dvije sile F prikazane na slici (b).



GLAVA 6

- 6.1. U taćki napregnutog tijela glavni naponi su: $\sigma_1 = 20 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -40 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -80 \text{ MPa}$. Ako materijal tijela ima Poissonov koeficijent $\nu = 1/3$, odrediti uporedni napon u posmatranoj taćki koristeći sve četiri hipoteze o slomu.
- 6.2. Ispitati po sve četiri hipoteze o slomu da li će u elementu napregnutom kao na slici doći do sloma. Materijal ima Poissonov koeficijent $\nu = 0,3$ i granicu sloma pri istezanju i pritisku $\sigma_0 = 160 \text{ MPa}$.



6.3. Stanje napona u tačkama A i B definisano je tenzorima napona:

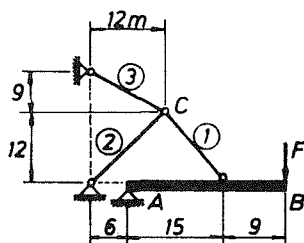
$$[\sigma]_A = \begin{bmatrix} -5a & -3a & 0 \\ -3a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad [\sigma]_B = \begin{bmatrix} 3a & -a & 2a \\ -a & a & a \\ 2a & a & -2a \end{bmatrix}, \quad (a = \text{const.}).$$

U kojoj tački je stanje napona opasnije prema hipotezi najvećeg deformacionog rada na promjeni oblika?

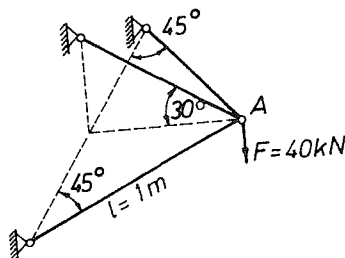
6.4. Pokazati da je hipoteza o slomu bazirana na deformacionom radu na promjeni oblika ekvivalentna hipotezi da do sloma dolazi kada oktaedarski smičući napon dostigne kritičnu vrijednost (jednaku oktaedarskom smičućem naponu na granici sloma pri aksijalnom naprezanju).

GLAVA 7

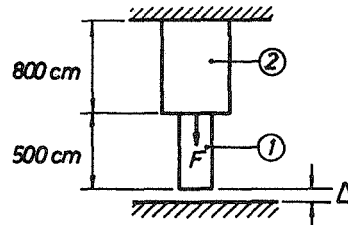
7.1. Kruta greda AB vezana je u tački A za nepokretan oslonac, a u ravnoteži se održava pomoću tri zglobno vezana štapa kao na slici. Konstrukcija je opterećena u tački B silom $F = 450 \text{ kN}$. Ako je dozvoljeni napon istezanja štapova $\sigma_d^+ = 140 \text{ MPa}$, a dozvoljeni napon pritiska $\sigma_d^- = 70 \text{ MPa}$, odrediti potrebne površine poprečnih presjeka štapova.



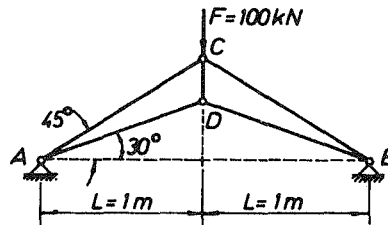
7.2. Odrediti površine poprečnih presjeka štapova konstrukcije na slici ako je $\sigma_d = 100 \text{ MPa}$ i ako je dozvoljeno horizontalno pomjeranje čvora A $\delta_d = 2,5 \text{ mm}$. Štapovi su od istog materijala modula elastičnosti $E = 200 \text{ GPa}$.



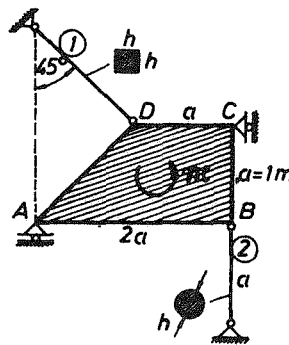
- 7.3. Odrediti napone u dijelovima konstrukcije na slici koji se javljaju pod djelovanjem sile $F=160$ kN. Prije djelovanja sile F zazor u konstrukciji iznosi $\Delta=2,2$ cm. Dijelovi konstrukcije su od istog materijala modula elastičnosti $E=10$ GPa, a površine poprečnih presjeka su $A_1=20$ cm² i $A_2=40$ cm².



- 7.4. Odrediti sile u štapovima konstrukcije na slici, kao i pomjeranje tačaka C i D. Svi štapovi su iste krutosti na istežanje $EA=50$ MN.

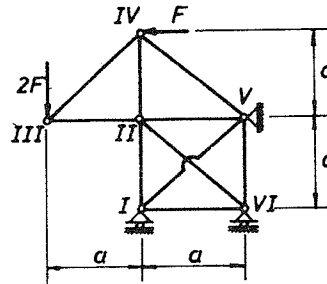


- 7.5. Homogena kruta ploča $ABCD$ težine $G=5$ kN opterećena je spregom $M=20$ kNm, a održava se u ravnoteži pomoću pokretnih oslonaca A i C i štapova ① i ②, koji su od istog materijala modula elastičnosti $E=200$ GPa.
- Dimenzionisati štapove je $\sigma_a=120$ MPa.
 - Odrediti pomjeranje tačaka A i C.

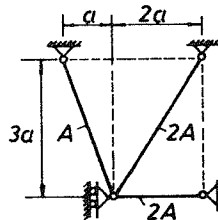


- 7.6. Za rešetkasti nosač na slici odrediti:
- sile u svim štapovima rešetke,
 - pomjeranje čvora II rešetke.

Dato je: $F = 20 \text{ kN}$, $a = 1 \text{ m}$. Svi štapovi rešetke su iste krutosti na istezanje $EA = 200 \text{ MN}$.

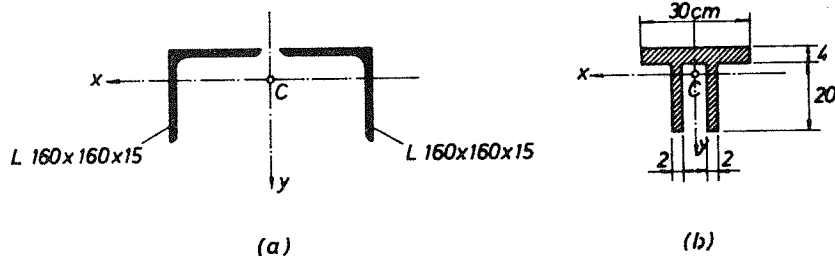


- 7.7. Odrediti napone koji se javljaju u štapovima konstrukcije na slici ako se štapovi zagriju za $\Delta T = 40^\circ\text{C}$. Štapovi su čelični ($E = 200 \text{ GPa}$, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$), a površine poprečnih presjeka A , odnosno $2A$.

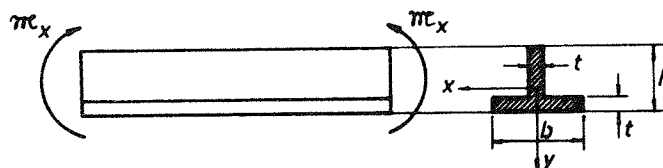


GLAVA 8

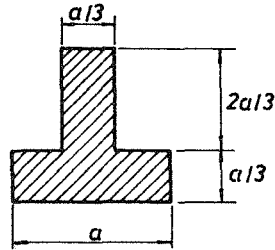
- 8.1. Izračunati otporni moment W_x profila na slici.



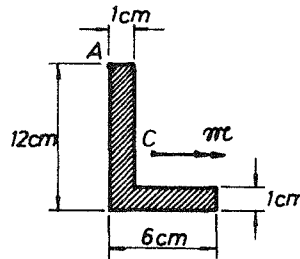
- 8.2. Odrediti širinu b pojasa grede od livenog gvožđa čiji je presjek prikazan na slici, tako da najveći napon zatezanja bude triput manji od najvećeg napona pritiska. Poznato je: $h = 10 \text{ cm}$, $t = 2,5 \text{ cm}$.



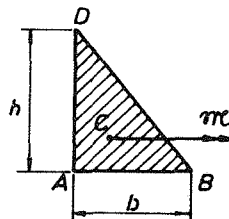
- 8.3. Greda poprečnog presjeka na slici opterećena je na savijanje spregovima $\mathfrak{M}_x = 15 \text{ kNm}$. Ako je dozvoljeni napon na zatezanje $\sigma_d^+ = 20 \text{ MPa}$, a na pritisak $\sigma_d^- = 80 \text{ MPa}$, izvršiti dimenzionisanje grede i nacrtati dijagram normalnog napona u gredi.



- 8.4. Odrediti krivinu K i maksimalni ugib δ proste grede dužine L , pravougaonog poprečnog presjeka, koja je podvrgnuta neravnomjernom zagrijavanju po visini h poprečnog presjeka, tako da su gornja vlakna grede na temperaturi T_1 , a donja na temperaturi T_2 ($T_2 > T_1$), pri čemu je promjena temperature od vrha ka dnu grede linearna. Koeficijent termičke ekspanzije materijala grede je α , a modul elastičnosti E .
- 8.5. Greda L profila na slici opterećena je spregovima savijanja $\mathfrak{M} = 1 \text{ kNm}$. Odrediti napon u tački A profila i maksimalni napon u gredi. Odrediti takođe ravan savijanja i maksimalni ugib grede. Greda je dužine $L = 1,5 \text{ m}$ i od materijala modula elastičnosti $E = 200 \text{ GPa}$.



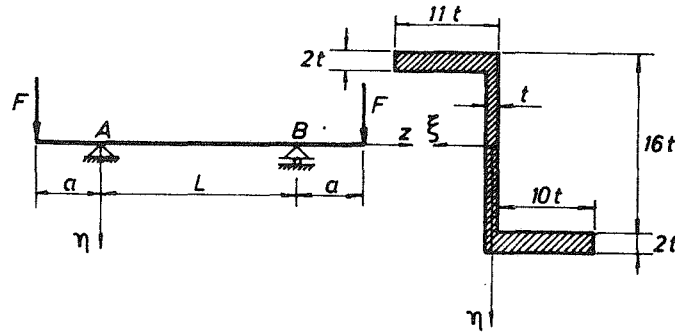
- 8.6. Greda trougaonog poprečnog presjeka opterećena je momentom savijanja \mathfrak{M} kao na slici. Odrediti neutralnu osu poprečnog presjeka i izraze za napon u tačkama A , B i D .



8.7. Za nosač na slici odrediti:

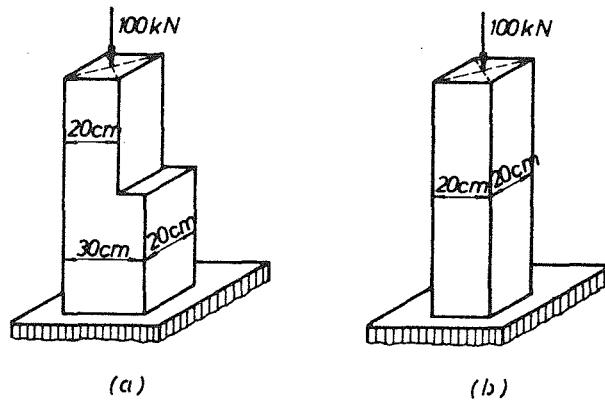
- dijagrame presječnih sila,
- veličinu t iz uslova da maksimalno pomjeranje u η pravcu na dijelu AB nosača ne pređe vrijednost $|\eta_{\max}| = 0,8 \text{ cm}$,
- maksimalni napon u dijelu AB nosača.

Poznato je: $F = 40 \text{ kN}$, $E = 70 \text{ GPa}$, $L = 2 \text{ m}$, $a = 0,5 \text{ m}$.



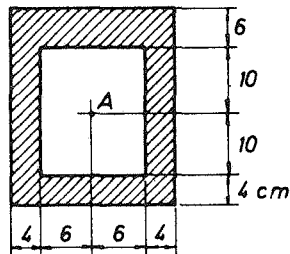
GLAVA 9

9.1. Odrediti najveći normalni napon u donjem dijelu stuba na slici (a). Uporediti ovu vrijednost sa normalnim naponom koji se javlja u stubu na slici (b).

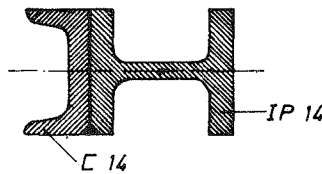


9.2. Pri livenju šupljeg čeličnog stuba pravougaonog poprečnog presjeka, dva paralelna zida su greškom izrađena različitim debljina (vidi sliku). Odrediti vrijednost najvećeg i najmanjeg normalnog napona u stubu ako napadna

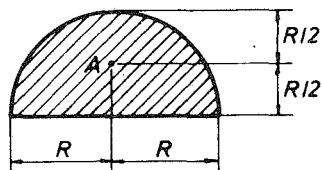
linija pritisne sile $F=3\text{ MN}$ prolazi kroz tačku A poprečnog presjeka. Uporediti dobijene rezultate sa normalnim naponom koji se javlja u stubu kada su pomenuta dva zida izrađena jednake debljine (po 5 cm).



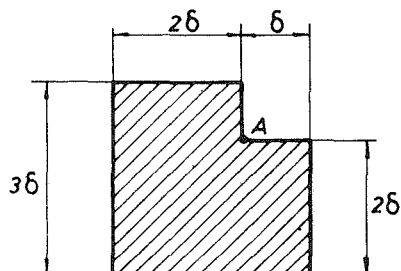
- 9.3. Stub poprečnog presjeka na slici opterećen je pritisnom silom $F=1\text{ MN}$ čija linija dještva prolazi kroz težište IP profila. Odrediti dijagram normalnog napona i jezgro poprečnog presjeka stuba.



- 9.4. Odrediti prečnik drvenog stuba polukružnog poprečnog presjeka na slici koji je opterećen pritisnom silom $F=50\text{ kN}$ čija linija dještva prolazi kroz tačku A , ako je $\sigma_d=10\text{ MPa}$. Koliki bi prečnik trebalo uzeti ako bi stub bio izložen čistom pritisku, tj. ako bi pritisna sila prolazila kroz težište poprečnog presjeka?



- 9.5. Za stub poprečnog presjeka na slici:
 a) odrediti jezgro presjeka,
 b) dimenzionisati poprečni presjek, tj. odrediti δ , ako je stub pritisnut silom $F=200\text{ kN}$ čija linija dještva prolazi kroz tačku A . Dozvoljeni napon pritiska je $\sigma_d^- = 80\text{ MPa}$, a istezanja $\sigma_d^+ = 20\text{ MPa}$.



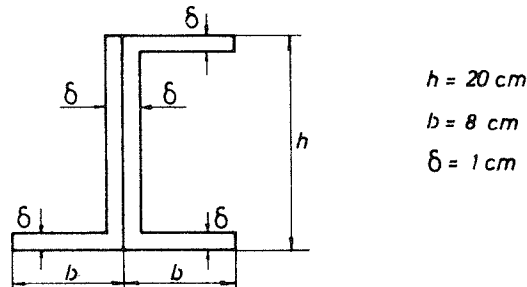
GLAVA 10.

- 10.1. Raspodjela napona u punom prizmatičnom štapu opterećenom na torziju definisana je funkcijom napona

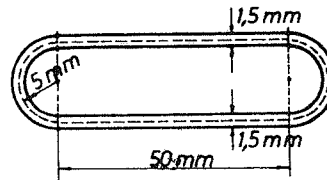
$$\varphi = A [a^2 - x^2 + (3 - \sqrt{8}) y^2] [a^2 + (3 - \sqrt{8}) x^2 - y^2].$$

Odrediti:

- izraz za konstantu A u zavisnosti od modula smicanja G i ugla torzije θ ,
 - konturu poprečnog presjeka štapa,
 - raspodjelu napona u štapu,
 - korespondentni moment torzije.
- 10.2. Za koliko se poveća torziona krutost [profila ako se on pojača L profilom kao na slici? Za koliko se promijeni τ_{\max} pri istom momentu torzije $M_t = 10 \text{ kNm}$?



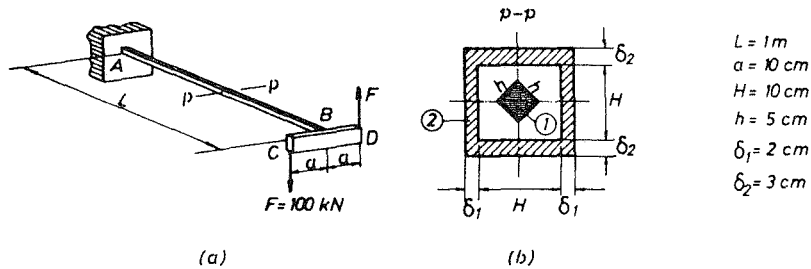
- 10.3. Odrediti smičući napon i ugao torzije zatvorene tankozidne cijevi poprečnog presjeka na slici usljed momenta torzije $M_t = 50 \text{ Nm}$. Modul smicanja je $G = 70 \text{ GPa}$.



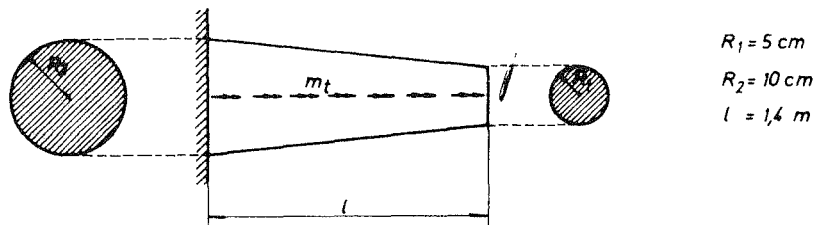
- 10.4. Šuplja i puna kružna osovina od istog materijala poprečnih presjeka na slici treba da prenesu isti moment torzije pri istom maksimalnom smičućem naponu. Ako je $R_1 = 0,8 R_2$, odrediti odnos težina šuplje i pune osovine. Koliki je pri tome odnos R_2/R ?



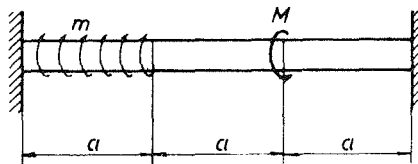
- 10.5. Nosač poprečnog presjeka na slici (b) uklješten je u tački A, a u tački B vezan za krutu ploču CD na koju djeluje spreg sila kao na slici (a). Dio ① nosača ima modul smicanja $G_1 = 70 \text{ GPa}$, a dio ② $G_2 = 10 \text{ GPa}$. Odrediti:
- maksimalni smičući napon u nosaču,
 - rotaciju poprečnog presjeka B.



- 10.6. Konzola promjenljivog kružnog poprečnog presjeka opterećena je kontinualnim momentom torzije $m_t = 10 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$ kao na slici. Odrediti:
- dijagram momenta torzije,
 - maksimalni smičući napon,
 - ugao rotacije kraja konzole ako je modul smicanja $G = 100 \text{ GPa}$.

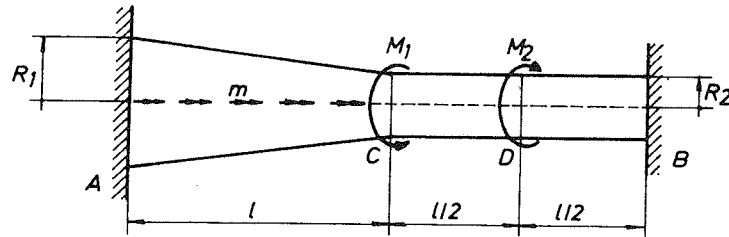


- 10.7. Dimenzionisati nosač kružnog poprečnog presjeka koji je opterećen kao na slici ako je $\tau_a = 40 \text{ MPa}$. Nacrtati zatim dijagram promjene ugla rotacije poprečnog presjeka duž ose nosača. Modul smicanja je $G = 80 \text{ GPa}$, $m = 80 \text{ Nm/m}$, $M = 400 \text{ Nm}$, $a = 0,5 \text{ m}$.



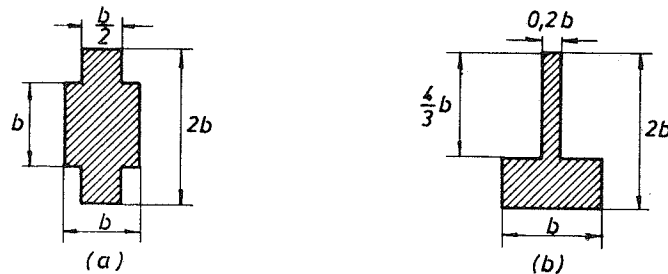
- 10.8. Za nosač opterećen kao na slici odrediti:
- dijagram momenta torzije duž ose nosača,
 - dijagram ivičnog napona $\tau(z)$ („ivičnog“ znači u tačkama omotača nosača),
 - maksimalni smičući napon,
 - rotaciju poprečnog presjeka C.

Poznato je: $M_1 = 20 \text{ kNm}$, $M_2 = 10 \text{ kNm}$, $m = 10 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$, $G = 70 \text{ GPa}$,
 $l = 1 \text{ m}$, $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 5 \text{ cm}$.

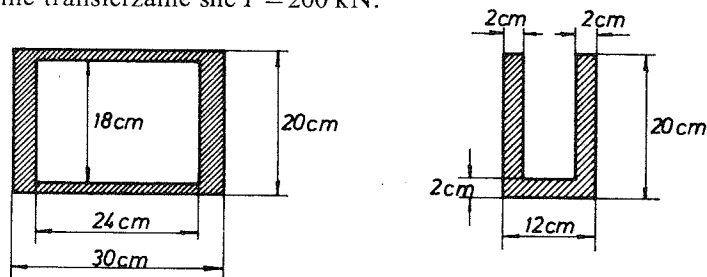


GLAVA 11.

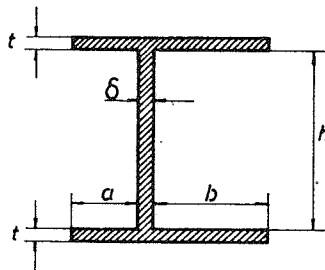
11.1. Koristeći formulu Žuravskog odrediti dijagram smičućeg napona u profilima na slici usljed dještva vertikalne transferzalne sile F .



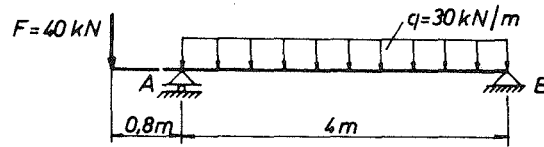
11.2. Za tankozidne profile na slici odrediti dijagram smičućeg napona usljed vertikalne transferzalne sile $F = 200 \text{ kN}$.



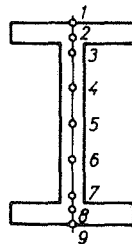
11.3. Odrediti centar smicanja nesimetričnog I profila na slici. Dato je: $h = 10 \text{ cm}$,
 $a = 4 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $t = 0,5 \text{ cm}$, $\delta = 0,6 \text{ cm}$.



11.4. Dimenzionisati nosač I profila na slici ako je $\sigma_d = 160 \text{ MPa}$ i $\tau_d = 100 \text{ MPa}$.



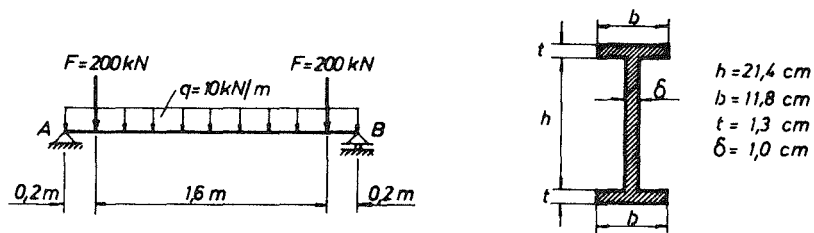
11.5. Odrediti u nosaču iz prethodnog primjera dijagram promjene glavnih napona σ_1 i σ_2 po visini profila u presjeku desno od A. Nacrtati takođe dijagram promjene maksimalnog smičućeg napona po visini profila. (Pri određivanju ordinata dijagrama, vrijednost napona određivati u tačkama 1—9, kao što je naznačeno na slici). Provjeriti na kraju izdržljivost nosača koristeći III hipotezu o slomu.



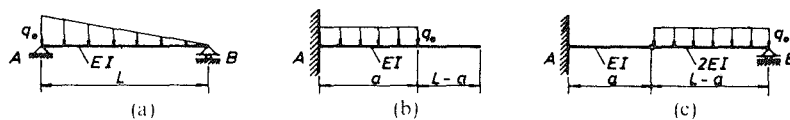
11.6. Izvršiti provjeru izdržljivosti grede na slici respektujući:

- uslov $\sigma_{\max} \leq \sigma_d$ i $\tau_{\max} \leq \tau_d$,
- IV hipotezu.

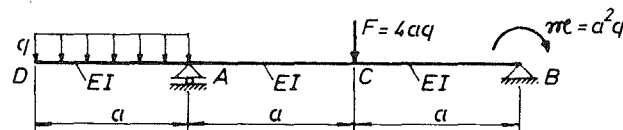
Poznato je: $\sigma_d = 160 \text{ MPa}$ i $\tau_d = 105 \text{ MPa}$.



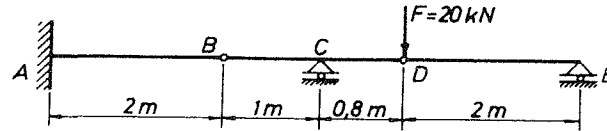
11.7. Odrediti jednačinu elastične linije nosača na slici.



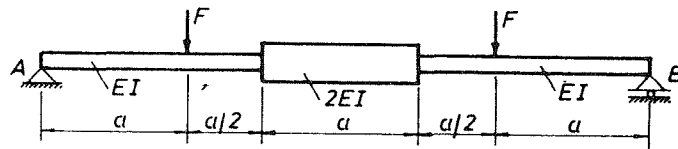
11.8. Metodom superpozicije, pomoću tablica ugiba i nagiba, odrediti ugib i nagib nosača u tačkama A, B, C i D. Skicirati zatim elastičnu liniju nosača.



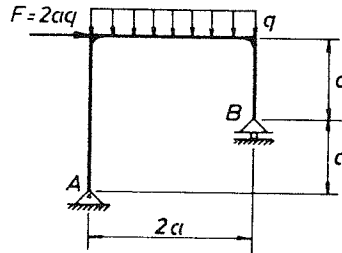
- 11.9. Maxwell-Mohrovom metodom fiktivnog nosača odrediti ugib u tački D i nagib u tački C nosača na slici. Dato je $EI = 5 \text{ MNm}^2$.



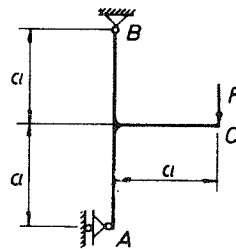
- 11.10. Odrediti maksimalni ugib grede promjenljivog poprečnog presjeka na slici. Poznato je F, a, EI .



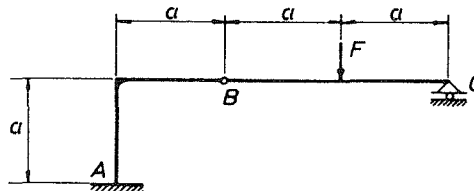
- 11.11. Koristeći Maxwell-Mohrovu metodu (deformacionog rada) odrediti pomjeranje oslonca B nosača na slici. Poznato je a, q, EI .



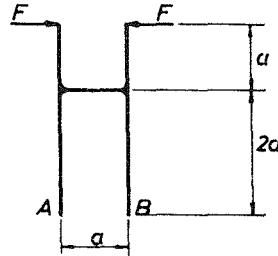
- 11.12. Koristeći Vereščaginov postupak odrediti pomjeranje i nagib u tački C nosača na slici. Poznato je F, a i EI .



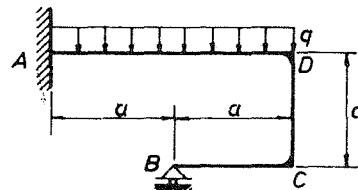
- 11.13. Odrediti pomjeranje tačke C i promjenu nagiba između dijelova nosača u tački B . Poznato je F, a, EI .



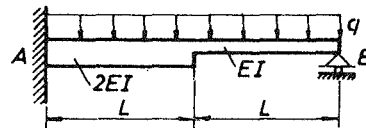
- 11.14. Odrediti razmicanje tačaka A i B usljed djejtva dvije sile F kao što je prikazano na slici. Svi dijelovi konstrukcije su iste krutosti na savijanje EI .



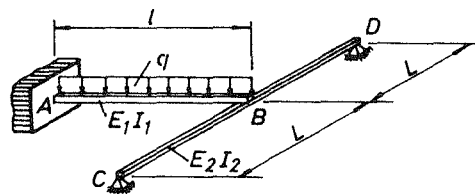
- 11.15. Odrediti reakcije u vezama nosača na slici, pa nacrtati dijagrame presječnih sila u nosaču. Odrediti pomjeranje tačke C nosača. Poznato je q , a , EI .



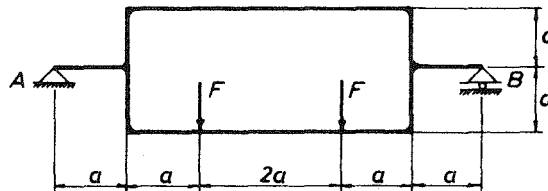
- 11.16. Odrediti maksimalni moment savijanja u gredi na slici.



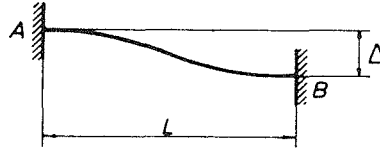
- 11.17. Konzola AB naslanja se u tački B na gredu CD kao na slici. Odrediti reakcije u vezama.



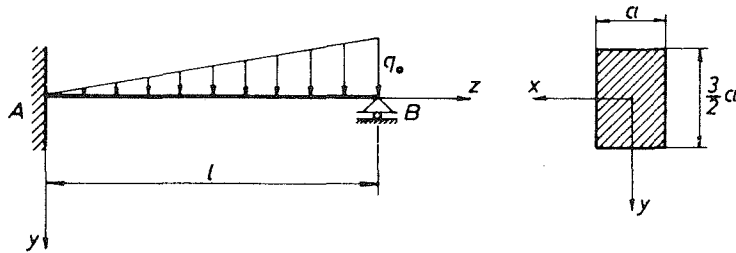
- 11.18. Odrediti maksimalni moment savijanja u nosaču na slici. Poznato je a i F , a svi dijelovi nosača su iste krutosti na savijanje.



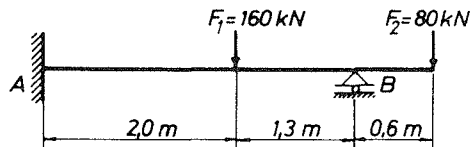
- 11.19. Jedan kraj obostrano ukliještene grede pomjeren je vertikalno u odnosu na drugi kraj za veličinu Δ , kao na slici. Odrediti reakcije u ukliještenjima ako je krutost grede EI , a dužina L .



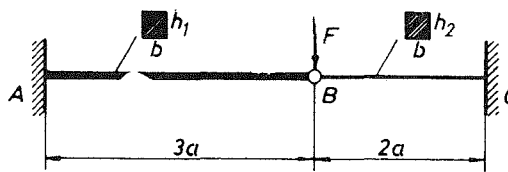
- 11.20. Dimenzionisati nosač pravougaonog poprečnog presjeka na slici tako da maksimalni ugib nosača ne pređe vrijednost $v_{\max} = 2$ cm. Poznato je: $q_0 = 10$ kN/m, $l = 10$ m, $E = 20$ GPa.



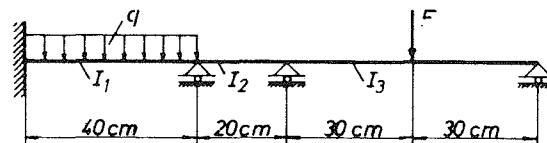
- 11.21. Dimenzionisati nosač I profila na slici ako je $\sigma_d = 10$ kN/cm².



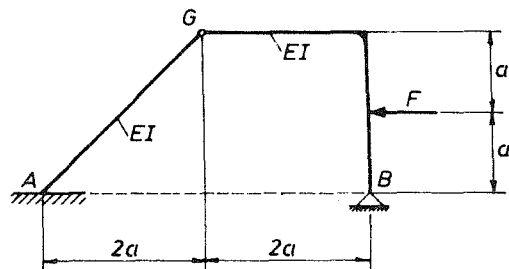
- 11.22. Izvršiti dimenzionisanje nosača pravougaonog poprečnog presjeka konstantne širine $b = 24$ cm, tj. odrediti visine h_1 i h_2 dijelova nosača AB i BC, ako je dozvoljeni napon u oba dijela nosača $\sigma_d = 10$ MPa. Dato je: $F = 20$ kN i $a = 1,5$ m.



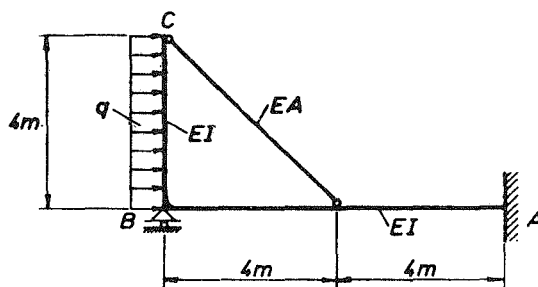
- 11.23. Odrediti reakcije kontinualne grede na slici. Dato je: $F = 10$ kN, $q = 30$ kN/m, $I_2 = \frac{1}{2} I_1$, $I_3 = 3I_1$.



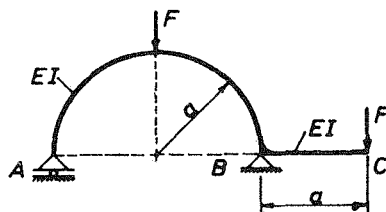
11.24. Odrediti dijagram momenta savijanja u Gerberovom nosaču na slici.



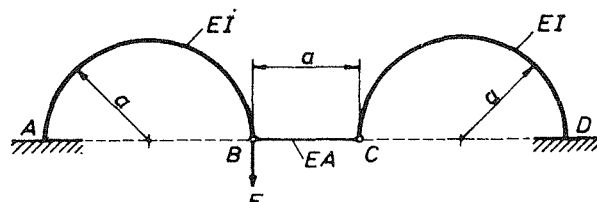
11.25. Odrediti maksimalni moment savijanja u nosaču na slici, kao i pomjeranje tačke C nosača. Poznato je: $q = 5 \text{ kN/m}$, $EI = 5 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$, $\frac{I}{A} = 4 \text{ m}^2$.



11.26. Odrediti pomjeranje oslonca A i tačke C nosača na slici. Poznato je F , a i EI .

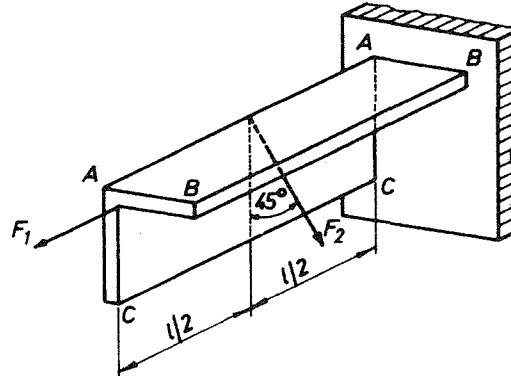


11.27. Odrediti pomjeranje tačke B nosača na slici. Poznato je: $F = 20 \text{ kN}$, $a = 1 \text{ m}$, $EI = 2 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$, $\frac{I}{A} = 5 \text{ m}^2$.

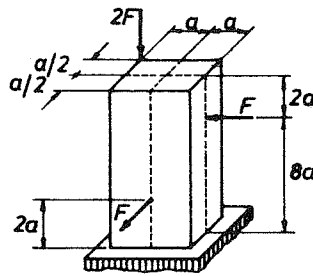


GLAVA 12

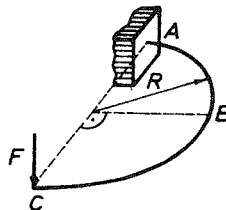
- 12.1. Konzola dužine $l=2$ m čiji je poprečni presjek raznokraki profil L $100 \times 150 \times 10$ opterećena je aksijalnom silom $F_1=50$ kN i silom $F_2=5$ kN koja djeluje u ravni upravnoj na osu grede i prolazi kroz centar smicanja površine srednjeg poprečnog presjeka konzole pod uglom od 45° prema vertikali. Odrediti normalne napone u tačkama A, B i C opasnog presjeka konzole.



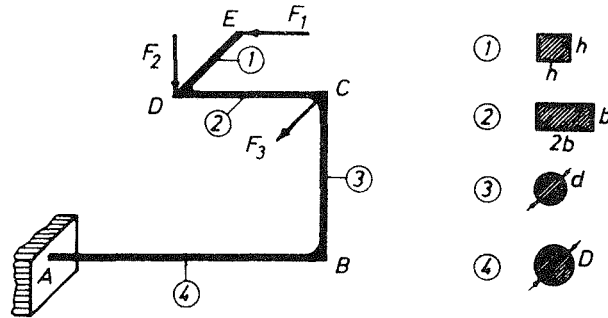
- 12.2. Odrediti ekstremne vrijednosti normalnog napona u stubu opterećenom kao na slici. Odrediti takođe položaj neutralne ose u kritičnom presjeku. Dato je: $F=50$ kN, $a=0,4$ m.



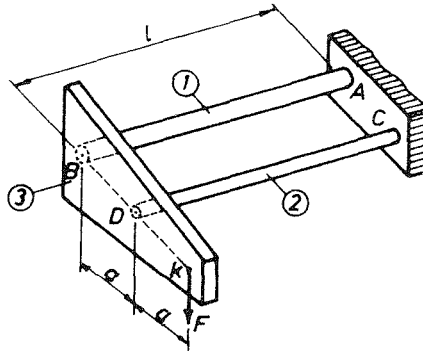
- 12.3. Čelični ram kvadratnog poprečnog presjeka $h \times h=3 \times 3$ cm čija je osa polukružna linija poluprečnika $R=20$ cm uklješten je na kraju A i opterećen vertikalnom silom $F=1$ kN na kraju C. Odrediti najveće uporedne napone u presjecima A i B prema IV hipotezi. Odrediti takođe vertikalno pomjeranje tačke C. Poznato je: $E=200$ GPa, $G=80$ GPa.



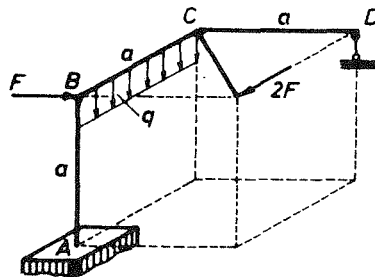
- 12.4. Koristeći se III hipotezom dimenzionisati prostorni nosač na slici. Poznato je: $F_1=2\text{ kN}$, $F_2=1\text{ kN}$, $F_3=2.4\text{ kN}$, $l_1=30\text{ cm}$, $l_2=40\text{ cm}$, $l_3=60\text{ cm}$, $l_4=80\text{ cm}$, $\sigma_d=100\text{ MPa}$.



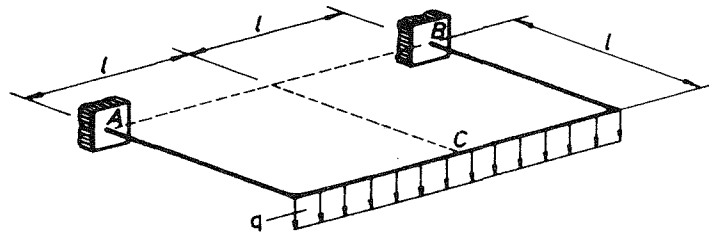
- 12.5. Odrediti maksimalne glavne napone u dijelovima ① i ② konstrukcije na slici. Štapovi ① i ② su kružnog poprečnog presjeka prečnika $d_1=2\text{ cm}$ i $d_2=1\text{ cm}$, dužine $l=20\text{ cm}$ i od materijala modula elastičnosti $E=2.5$ $G=200\text{ GPa}$. Na krajevima B i D štapovi su spojeni sa krutom pločom ③ na koju u tački K djeluje sila $F=0.6\text{ kN}$, pri čemu je $a=8\text{ cm}$. Odrediti takođe vertikalno pomjeranje tačke K. (Pretpostaviti da ploča ostaje u vertikalnoj ravni prilikom dještva sile F).



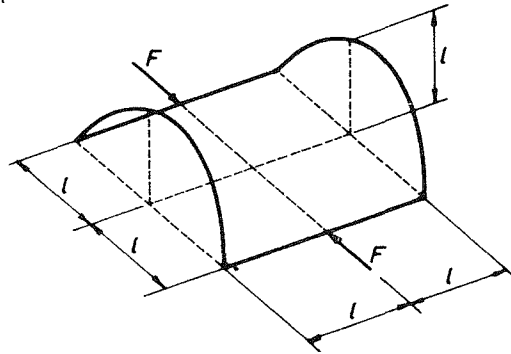
- 12.6. Odrediti pomjeranje tačke D nosača na slici. Svi dijelovi nosača su kvadratnog poprečnog presjeka $h \times h$. Poznato je još: a , F , $q = \frac{F}{a}$, E i $G=0.4E$.



- 12.7. Respektujući III hipotezu odrediti najveće dozvoljeno opterećenje q kojim se smije opteretiti čelični nosač na slici ako je $\sigma_d = 120$ MPa. Odrediti takođe pomjeranje tačke C nosača. Svi dijelovi nosača su kružnog poprečnog presjeka prečnika $d = 2$ cm. Dato je: $l = 15$ cm, $E = 200$ GPa, $G = 80$ GPa.

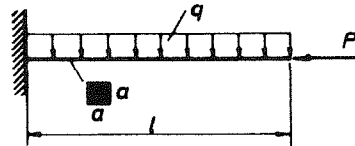


- 12.8. Odrediti dijagrame momenata u dijelovima konstrukcije na slici. Poznato je: F , l , $EI = 1.3GI_t$.

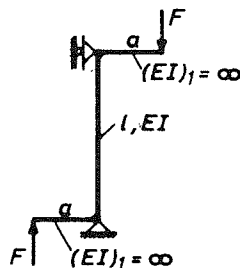


GLAVA 13

- 13.1. Uzimajući u obzir uticaj aksijalne sile na savijanje, odrediti maksimalni ugib i maksimalni normalni napon u nosaču na slici. Poznato je: $q = 0.5$ kN/m, $P = 4$ kN, $a = 10$ cm, $l = 2$ m, $E = 10$ GPa.



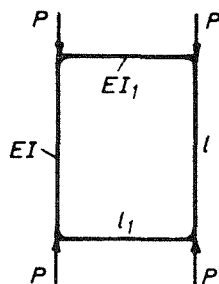
- 13.2. Za nosač na slici:
a) odrediti kritičnu silu izvijanja F_{kr} ,



b) ako je $F = \frac{1}{16} F_{kr}$, nacrtati dijagrame presječnih sila M i V uzimajući u obzir uticaj aksijalne sile na savijanje.

Poznato je EI , l i a .

13.3. Odrediti kritičnu vrijednost sile P pri kojoj dolazi do izvijanja pritisnutih vertikalnih štapova rama na slici. Poznato je: l , EI , l_1 , EI_1 .



13.4. U kom će se pravcu pri gubitku stabilnosti izviti štapovi čiji su poprečni presjeci prikazani na slici?



(a)



(b)



(c)

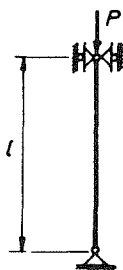


(d)

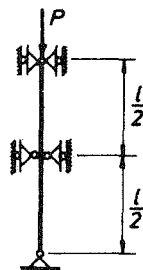


(e)

13.5. Uporediti kritične sile izvijanja štapova od istog materijala i istih poprečnih presjeka koji su prikazani na slici. Poznato je E , I , l .

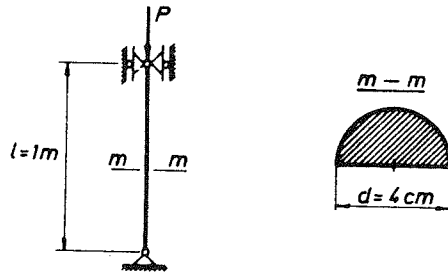


(a)

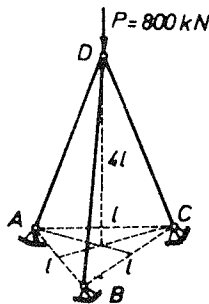


(b)

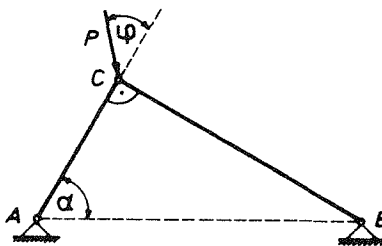
- 13.6. Odrediti kritičnu silu izvijanja stuba na slici. Materijal stuba ima modul elastičnosti $E = 70 \text{ GPa}$ i granicu proporcionalnosti $\sigma_p = 170 \text{ MPa}$.



- 13.7. Odrediti pri kojoj dužini l konstrukcija na slici gubi stabilnost usljed elastičnog izvijanja. Sva tri štapa konstrukcije su kružnog poprečnog presjeka prečnika $d = 30 \text{ cm}$ i od materijala modula elastičnosti $E = 10 \text{ GPa}$.

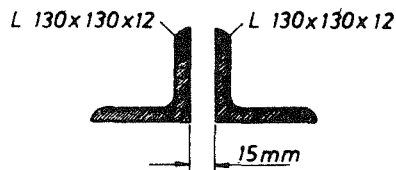


- 13.8. Konstrukcija na slici sastoji se od dva vitka štapa istih poprečnih presjeka i od istog materijala. Pretpostavljajući da do sloma konstrukcije dolazi usljed elastičnog izvijanja, odrediti ugao φ koji definiše pravac maksimalne sile P kojom se konstrukcija smije opteretiti. (Pretpostaviti $0 < \varphi < \pi/2$).



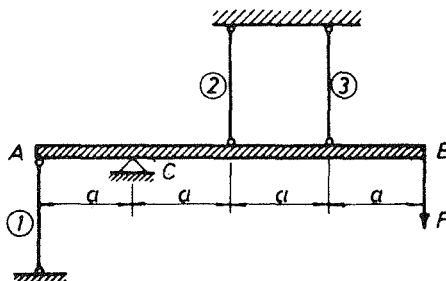
- 13.9. Odrediti dimenzije poprečnog presjeka cjevastog stuba sa odnosom unutrašnjeg prema spoljašnjem prečniku 0,8, ako je stub opterećen pritisnom silom $P = 70 \text{ kN}$. Stub je dužine $l = 1,8 \text{ m}$, a njegova oba kraja su uklještena. Materijal stuba je duraluminijum za koji je eksperimentalno utvrđeno da je pri vitkosti $0 \leq \lambda \leq 80$ kritični napon definisan sa $\sigma_{kr} = 336 - 2,8\lambda \text{ [MPa]}$. Uzeti da je koeficijent sigurnosti protiv izvijanja $n_{izv} = 3$.

- 13.10. Provjeriti stabilnost i otpornost stuba dužine 2,4 m čiji je poprečni presjek prikazan na slici, ako su oba kraja stuba zglobno oslonjena i ako je stub pritisnut silom $P=800$ kN. Dozvoljeni napon na pritisak materijala stuba je $\sigma_d=160$ MPa.

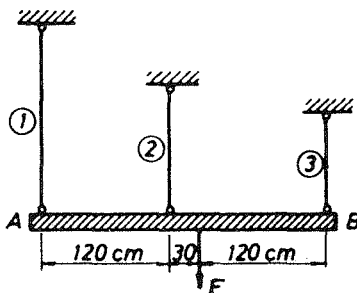


GLAVA 14

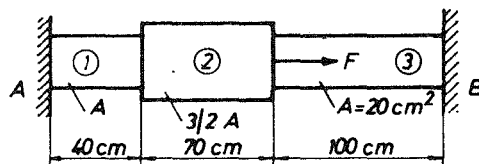
- 14.1. Kruti štap AB održava se u ravnoteži pomoću oslonca C i tri žice jednake dužine, istog poprečnog presjeka A i od istog materijala granice plastičnog tečenja σ_T . Odrediti silu F_T pri kojoj počinje plastična deformacija u konstrukciji i graničnu silu F_{gr} pri kojoj dolazi do sloma konstrukcije.



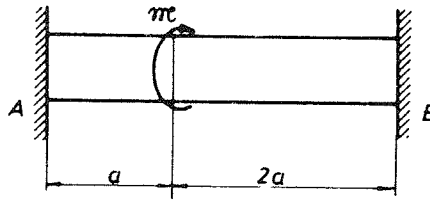
- 14.2. Tri štapa kružnog poprečnog presjeka prečnika d održavaju u ravnoteži krutu gredu AB . Ako su svi štapovi od čelika ($\sigma_T=240$ MPa), dimenzionirati štapove prema graničnoj nosivosti. Dato je: $F=150$ kN, $l_1=180$ cm, $l_2=120$ cm, $l_3=90$ cm.



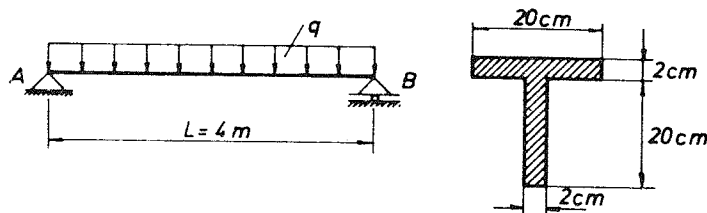
- 14.3. Odrediti silu F_T pri kojoj počinje plastična deformacija u nosaču na slici. Odrediti zatim graničnu silu F_{gr} pri kojoj nosač gubi dalju nosivost. Svi dijelovi nosača su od istog materijala ($\sigma_T=120$ MPa).



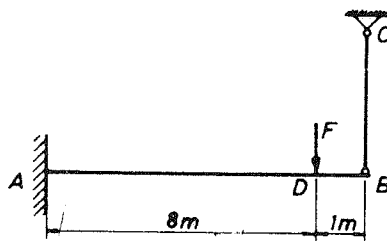
- 14.4. Odrediti vrijednost graničnog momenta torzije M_{gr} nosača na slici ako je $\tau_T = 60 \text{ MPa}$. Nosač je kružnog poprečnog presjeka prečnika $d = 10 \text{ cm}$.



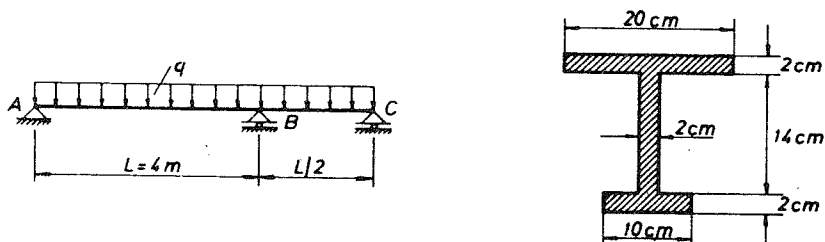
- 14.5. Odrediti granično opterećenje q_{gr} grede na slici ako je $\sigma_T = 150 \text{ MPa}$. Uporediti dobijeni rezultat sa dozvoljenim opterećenjem q_d koje se dobija klasičnim proračunom prema dozvoljenom naponu ($\sigma_{max} \leq 150 \text{ MPa}$).



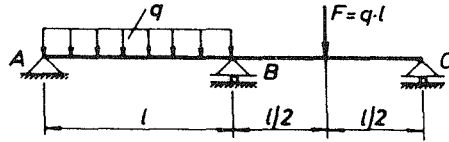
- 14.6. Konzola AB profila I 30 poduprta je u tački B štapom CB površine poprečnog presjeka $A = 2.5 \text{ cm}^2$, i opterećena u tački D silom F . Ako su konzola i štap od istog materijala sa granicom plastičnog tečenja $\sigma_T = 240 \text{ MPa}$, odrediti graničnu silu F_{gr} pri kojoj dolazi do sloma konstrukcije.



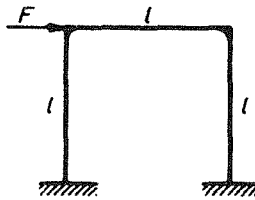
- 14.7. Ako materijal nosača na slici ima granicu plastičnog tečenja $\sigma_T = 200 \text{ MPa}$, odrediti graničnu vrijednost opterećenja q_{gr} .



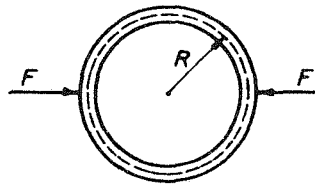
- 14.8. Dimenzionisati prema graničnoj nosivosti gredu kružnog poprečnog presjeka na slici ako je $\sigma_T = 140 \text{ MPa}$, $q = 5 \text{ kN/m}$, $l = 1 \text{ m}$.



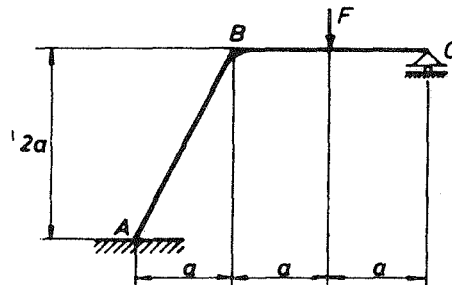
- 14.9. Odrediti graničnu silu kojom se smije opteretiti ram na slici ako su svi dijelovi rama kvadratnog poprečnog presjeka $a \times a$ i od istog materijala granice plastičnog tečenja σ_T .



- 14.10. Dimenzionisati prema graničnoj nosivosti tanki kružni prsten poluprečnika $R = 20 \text{ cm}$ čiji je poprečni presjek pravougaonik dimenzija $b \times 2b$. Materijal prstena ima granicu plastičnog tečenja $\sigma_T = 240 \text{ MPa}$, a sila $F = 15 \text{ kN}$.

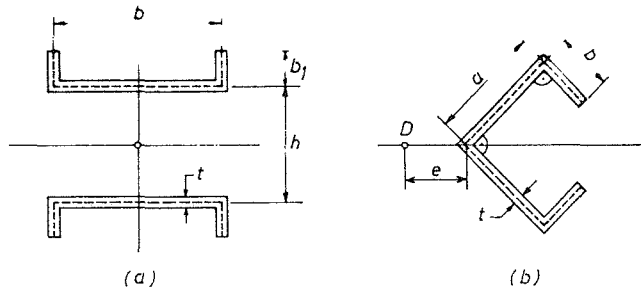


- 14.11. Dimenzionisati prema graničnoj nosivosti nosač na slici ako je $\sigma_T = 200 \text{ MPa}$, $F = 100 \text{ kN}$ i $a = 1 \text{ m}$. Poprečni presjek nosača na dijelu AB je pravougaonik $b \times 2b$, a na dijelu BC kvadrat $b \times b$.

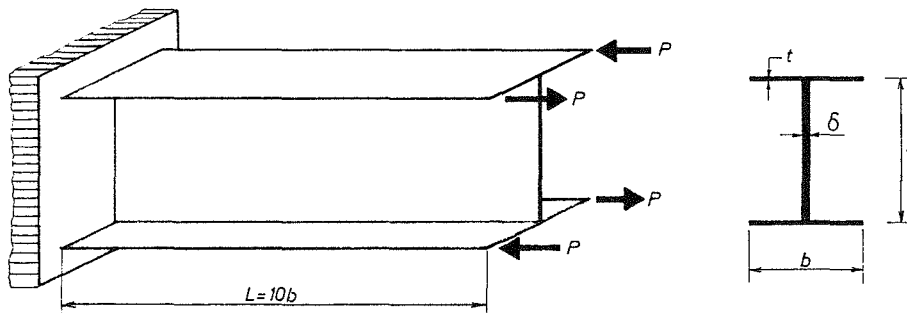


GLAVA 15

15.1. Odrediti sektorski moment inercije profila na slici.



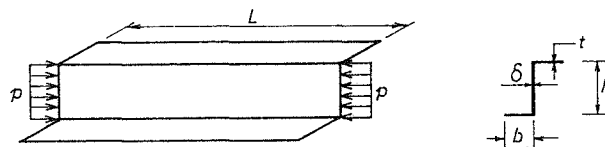
15.2. Štap I profila ($h = 2b$, $t = 2\delta$) ukliješten je na jednom, a opterećen bimoment na drugom kraju, kao na slici. Odrediti ugao obrtanja poprečnih presjeka i promjenu bimomenta u štapu.



15.3. Tankozidni štap otvorenog profila, čija su oba kraja ukliještena opterećen je momentom torzije m_t na sredini raspona. Odrediti promjenu ugla obrtanja poprečnih presjeka.

15.4. Tankozidni profil ukliješten je na lijevom kraju i opterećen ravnomjerno raspoređenim momentom torzije m_t (po jedinici dužine) duž cijelog raspona. Odrediti promjenu ugla obrtanja i bimoment duž ose štapa.

15.5. Tankozidni štap Z profila ($h = 2b$, $t = 2\delta$) opterećen je podužnim opterećen (po jedinici dužine rebra) kao na slici. Odrediti bimoment i normalni napon u štapu.



REZULTATI ZADATAKA ZA VJEŽBU

1.1. a) $\vec{i}_n = \left\{ -\frac{35}{3\sqrt{2}}, \frac{5}{3\sqrt{2}}, \frac{15}{3\sqrt{2}} \right\}$ (MPa),

b) $\sigma_n = \frac{5}{3}$ MPa, $\tau_n = 8,9$ MPa,

c) $\sigma_1 = -5 + 5\sqrt{5}$, $\sigma_2 = 5$, $\sigma_3 = -5 - 5\sqrt{5}$ (MPa),

$\vec{n}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, 0, -\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \right\}$, $\vec{n}_2 = \{0, 1, 0\}$,

$\vec{n}_3 = \left\{ \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \right\}$,

d) $\tau_{\max} = 5\sqrt{5}$ MPa, $\sigma_n = -5$ MPa,

e) $\sigma_{\text{okt}} = -\frac{5}{3}$ MPa, $\tau_{\text{okt}} = 10,27$ MPa,

f) $[\sigma]_{sf} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$, $[\sigma]_{\text{dev}} = \begin{bmatrix} -\frac{40}{3} & 0 & -5 \\ 0 & \frac{20}{3} & 0 \\ -5 & 0 & \frac{20}{3} \end{bmatrix}$ (MPa).

1.2. $[\sigma]' = \begin{bmatrix} 5(1+\sqrt{3}) & -5(1+\sqrt{3}) & 0 \\ -5(1+\sqrt{3}) & 5(3-\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$ (MPa).

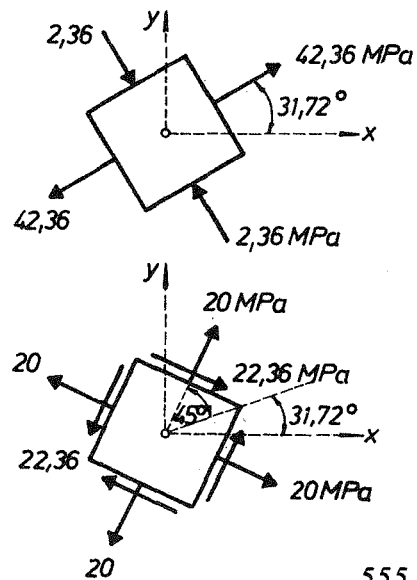
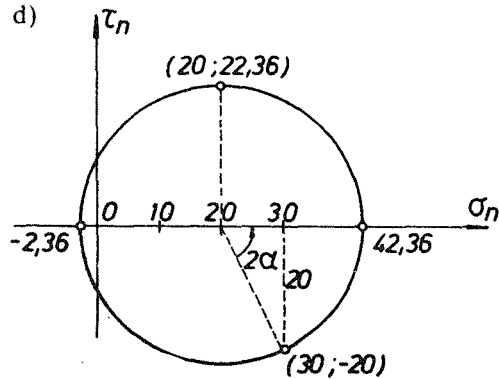
1.3. $\sigma_n = -20$ MPa, $\tau_n = 28,2$ MPa.

1.4. a) $\sigma_n = 7,68$ MPa, $\tau_n = 18,66$ MPa,

b) $\sigma_1 = 42,36$ MPa, $\sigma_2 = -2,36$ MPa,
 $\alpha = 31,72^\circ$,

c) $\tau_{\max} = 22,36$ MPa,

d)



1.5. $\tau_b = 2\sqrt{3}$ MPa, $\sigma_1 = 8,46$ MPa, $\sigma_2 = 1,54$ MPa, $\alpha = -15^\circ$.

2.1. a)

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 7,5 & 0 \\ 7,5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 24 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

b) $\epsilon_1 = 25,1 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_2 = 6,8 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_3 = -7,9 \cdot 10^{-3}$

$$\vec{n}_1 = \{0,064; 0,213; 0,975\}, \quad \vec{n}_2 = \{0,727; 0,659; -0,193\},$$

$$\vec{n}_3 = \{-0,684; 0,721; -0,113\}.$$

2.2. a) $\epsilon_{kl}^{\max} = 0,003$,

b) $\epsilon_n = -0,002$.

2.4. $u_x = \frac{1}{3a^2}(x^3 + 3xy^2)$, $u_y = \frac{1}{3a^2}y^3$, $u_z = 0$.

2.5. a)

$$E = \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0003 \\ 0,0003 & 0,0003 \end{bmatrix},$$

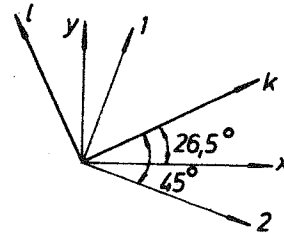
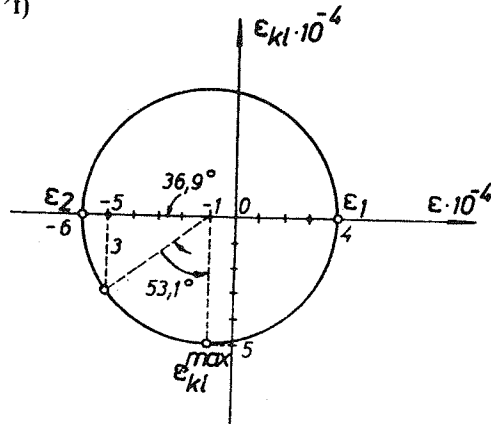
b) $\epsilon_n = 0,00036$,

c) $\epsilon_{nl} = 0,000196$,

d) $\epsilon_1 = 0,0004$, $\epsilon_3 = -0,0006$, $\alpha = -18,45^\circ$,

e) $\epsilon_{kl}^{\max} = 0,0005$,

f)



3.1. a) Ne,

b) $2,831 \cdot 10^{-4}$,

c) $-0,3 \cdot 10^{-4}$,

d) $\sigma_1 = 112,1$ MPa, $\sigma_2 = -32,1$ MPa, $\sigma_3 = -50$ MPa,

e) $\epsilon_1 = 13,2 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_2 = 3,6 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_3 = 2,4 \cdot 10^{-4}$,

f) $\Delta V = 11,55$ cm³.

3.2. a)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -212,5 & 0 & 0 \\ 0 & -212,5 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0011 \end{bmatrix},$$

b) $u_x = u_y = 0, \quad u_z = 0,0011z.$

c) $\Delta L = 0,11 \text{ cm},$

d) $\Delta V = 11 \text{ cm}^3.$

3.3. $\sigma_x = \sigma_y = -35,7 \text{ MPa}, \quad \sigma_z = -150 \text{ MPa}.$

3.4. $\sigma_1 = 38,5 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -38,5 \text{ MPa}, \quad \alpha = -14,3, \quad \sigma_3 = 0.$

4.2. Mogu, pod uslovom da je prisutna specifična zapreminska sila $\{0, 0, -4bG\}.$

4.3. a) *Ravno stanje deformacije* ($u_z = 0, u_x = u_x(x, y), u_y = u_y(x, y)$)

Cauchyve jednačine ravnoteže:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0,$$

Saint-Venantove jednačine kompatibilnosti:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

Hookeov zakon:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \varepsilon_{yy} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

Navierove jednačine:

$$G \nabla^2 u_x + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + b_x = 0$$

$$G \nabla^2 u_y + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + b_y = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti:

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right).$$

b) *Ravno stanje napona* ($\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$)

Cauchyve jednačine ravnoteže:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0,$$

Saint-Venantove jednačine kompatibilnosti:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

Hookeov zakon:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

Navierove jednačine:

$$G \nabla^2 u_x + G \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + b_x = 0$$

$$G \nabla^2 u_y + G \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + b_y = 0,$$

Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti:

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right).$$

$$4.4. \quad \sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \rho g (z-L), \quad \sigma_z = \rho g (z-L).$$

$$4.5. \quad \sigma_b = \frac{pd}{2\delta_2}, \quad \sigma_\varepsilon = -\frac{pd}{2\delta_1}, \quad p = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1)(T - T_0)}{\frac{1}{E_1 \delta_1} + \frac{1}{E_2 \delta_2}}.$$

$$5.1. \quad a) \quad \mathcal{A}^* = 3,08 \cdot 10^{-3} \text{ J/cm}^3,$$

$$b) \quad \mathcal{A} = 1,85 \text{ J},$$

$$c) \quad \mathcal{A}_{sf}^* = 0,028 \cdot 10^{-3} \text{ J/cm}^3, \quad \mathcal{A}_{dev}^* = 3,05 \cdot 10^{-3} \text{ J/cm}^3,$$

$$d) \quad \Delta V = -0,01 \text{ cm}^3.$$

$$5.2. \quad \mathcal{A}^* = 20,475 \cdot 10^{-3} \text{ J/cm}^3$$

$$5.3. \quad \Delta h = \frac{\nu p h}{E}, \quad \delta = \frac{\nu F h}{EA}, \quad A = 1 \cdot h.$$

$$5.4. \quad \Delta(2R) = \frac{(1-2\nu)p \cdot 2R}{E}, \quad \Delta = \frac{(1-2\nu)F \cdot 2R}{E}.$$

6.1. 20 MPa, 60 MPa, 100 MPa, 87,2 MPa.

6.2. $\sigma_{\text{upor}}^{\text{I}} = 120 \text{ MPa}$ (Neće), $\sigma_{\text{upor}}^{\text{II}} = 150 \text{ MPa}$ (Neće), $\sigma_{\text{upor}}^{\text{III}} = 220 \text{ MPa}$ (Hoće), $\sigma_{\text{upor}}^{\text{IV}} = 191 \text{ MPa}$ (Hoće).

$$6.3. \sigma_{\text{upor}} = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right\}^{1/2},$$

$$\sigma_{\text{upor}}^A = \sqrt{63} a, \quad \sigma_{\text{upor}}^B = \sqrt{37} a; \quad \text{Opasnije je stanje napona u tački A.}$$

7.1. $A_1 = 64,3 \text{ cm}^2$, $A_2 = 36,4 \text{ cm}^2$, $A_3 = 64,3 \text{ cm}^2$.

7.2. $4,9 \text{ cm}^2$, 8 cm^2 .

7.3. $\sigma^{\text{O}} = 34,4 \text{ MPa}$, $\sigma^{\text{Q}} = -11,1 \text{ MPa}$.

7.4. $S_{AC} = -46,6 \text{ kN}$, $S_{AD} = -34 \text{ kN}$, $S_{CD} = -34 \text{ kN}$,
 $\delta_C = 0,185 \text{ cm}$, $\delta_D = 0,157 \text{ cm}$.

7.5. a) $h = 0,82 \text{ cm}$,

b) $\delta_{,I} = 0,0295 \text{ cm}$, $\delta_C = 0,059 \text{ cm}$.

7.6. a) $S_{\text{I,VI}} = 0,81 F$, $S_{\text{I,II}} = -4,19 F$, $S_{\text{I,V}} = -1,14 F$, $S_{\text{II,VI}} = -1,14 F$,
 $S_{\text{V,VI}} = 0$, $S_{\text{II,V}} = -1,19 F$, $S_{\text{II,III}} = -2 F$, $S_{\text{III,IV}} = 2,83 F$, $S_{\text{II,IV}} = -5 F$,
 $S_{\text{IV,V}} = 4,24 F$,

b) $x_{\text{II}} = -0,12 \text{ mm}$, $y_{\text{II}} = 0,42 \text{ mm}$.

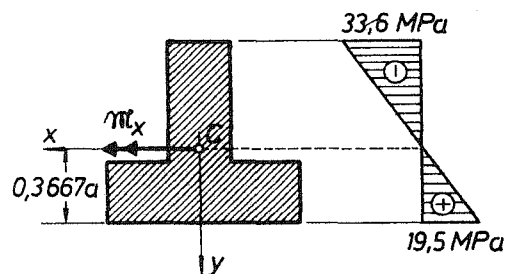
7.7. 17,2 MPa, 9,8 MPa, 100 MPa.

8.1. a) $W_x = 191 \text{ cm}^3$,

b) $W_x = 566 \text{ cm}^3$.

8.2. $b = 22,5 \text{ cm}$.

8.3. $a = 18,5 \text{ cm}$

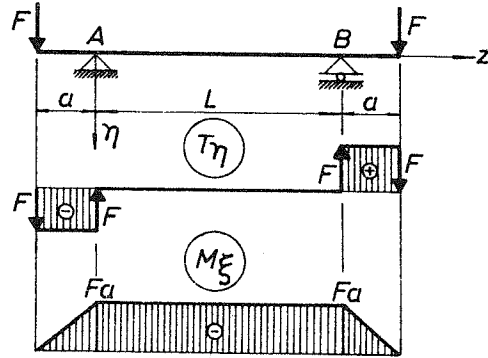


8.4. $K = \alpha (T_2 - T_1)/h$, $\delta = \alpha L^2 (T_2 - T_1)/8h$.

8.5. $\sigma_A = 33,5 \text{ MPa}$, $\sigma_{\text{max}} = 41,2 \text{ MPa}$, $y = 0,406x$, $u_{\text{max}} = 0,137 \text{ cm}$.

8.6. Linija CB je neutralna osa. $\sigma_A = -\sigma_D = -\frac{24M}{bh^2}$, $\sigma_B = 0$.

8.7. a)



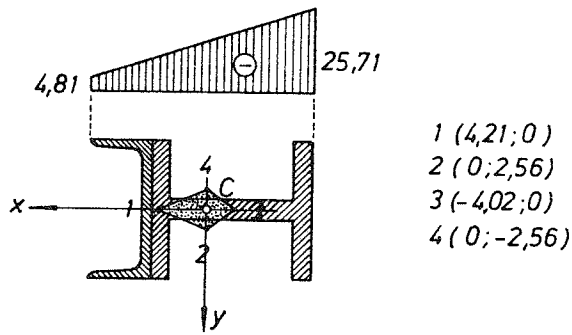
b) $t = 1,27 \text{ cm}$,

c) $\sigma_{\max} = 89,6 \text{ MPa}$.

9.1. 3,3 MPa, 2,5 MPa.

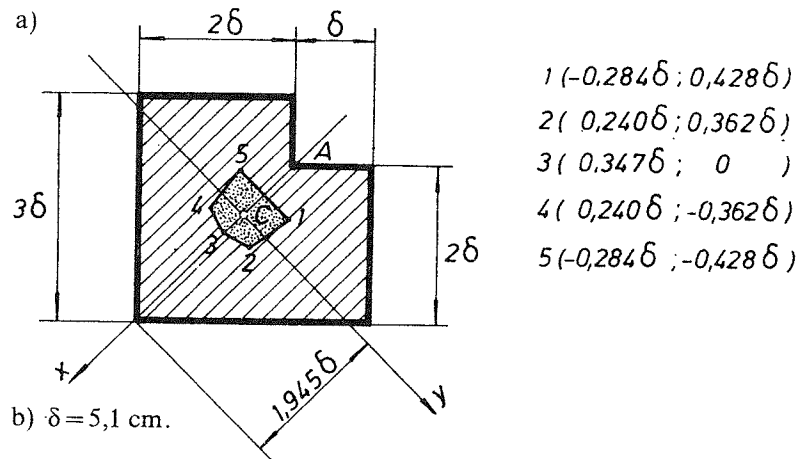
9.2. $-104,7 \text{ MPa}$, $-63,7 \text{ MPa}$, $-83,3 \text{ MPa}$.

9.3.



9.4. $R = 7,2 \text{ cm}$, $R = 5,6 \text{ cm}$.

9.5. a)

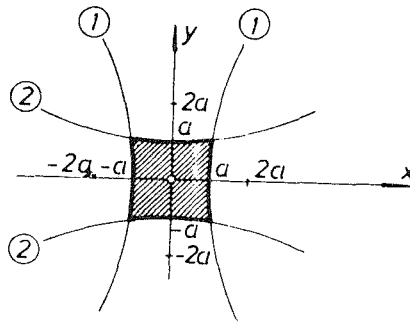


10.1. a) $A = -\frac{G\theta}{4(1-\sqrt{2})a^2}$.

b)

①: $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}(x^2 - a^2)/2$

②: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}(y^2 - a^2)/2$



c) $\sigma_{xx} = \frac{G\theta}{2(1-\sqrt{2})a^2} [(2-\sqrt{8})a^2y + 6(3-\sqrt{8})x^2y - 2(3-\sqrt{8})y^3],$

$\sigma_{yy} = \frac{G\theta}{2(1-\sqrt{2})a^2} [(2-\sqrt{8})a^2x + 6(3-\sqrt{8})xy^2 - 2(3-\sqrt{8})x^3],$

d) $M_t = 1,23a^4G\theta.$

10.2. $GI_t^2 = 5,32GI_t^1, \quad \tau_{\max}^2 = 0,38\tau_{\max}^1$

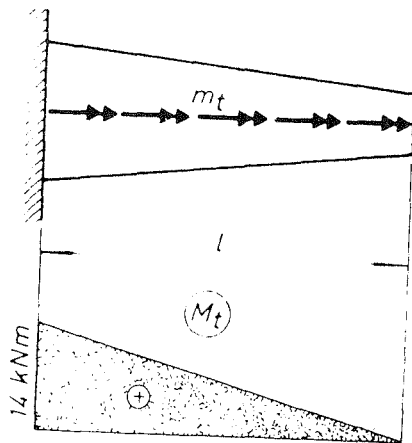
10.3. $\tau = 28,8 \text{ MPa}, \quad \theta = 2,67 \text{ m}.$

10.4. $0,51, \quad \frac{R_2}{R} = 1,19.$

10.5. a) $\tau_{\max}^1 = 92,3 \text{ MPa}, \quad \tau_{\max}^2 = 28,2 \text{ MPa}.$

b) $\beta_B = 0,0392 \text{ rad}.$

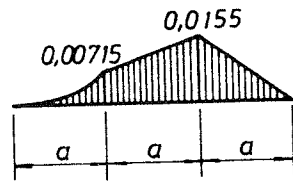
10.6. a)



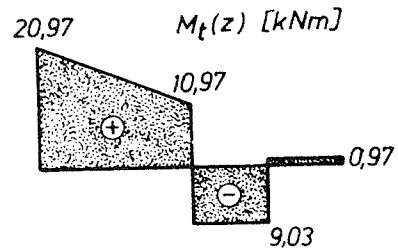
b) $\tau_{\max} = 10,6 \text{ MPa}.$

c) $\beta = 0,1$

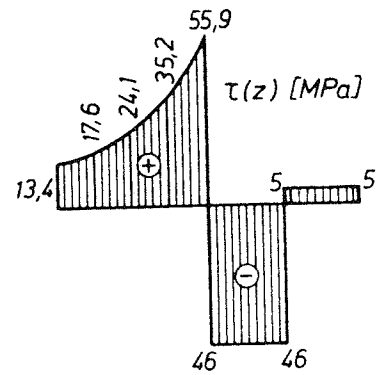
10.7. $d = 3,2 \text{ cm}$



10.8. a)



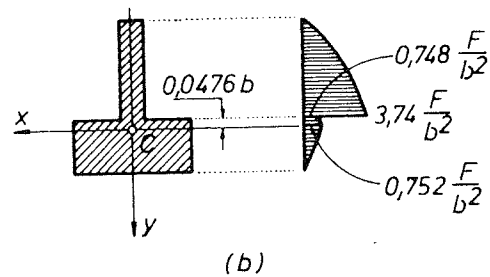
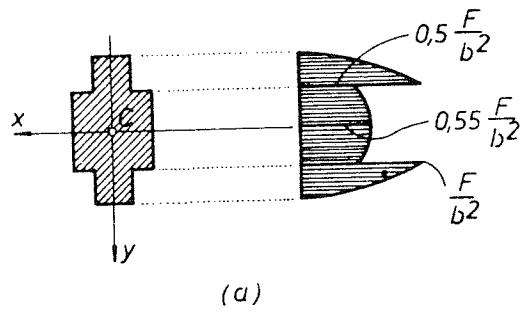
b)



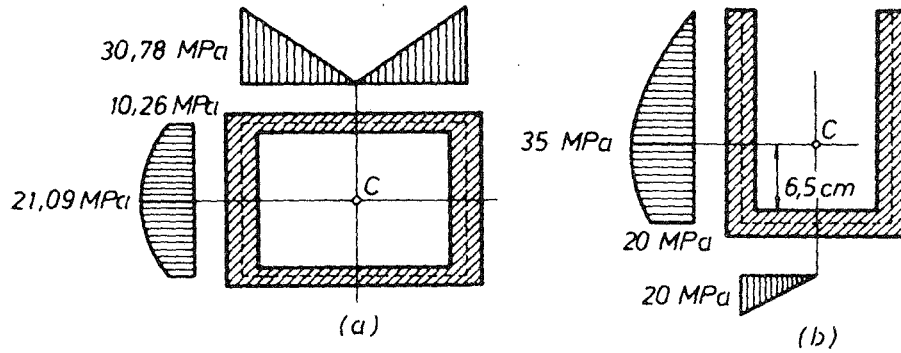
c) $\tau_{\max} = 55,9 \text{ MPa}$,

d) $\beta_c = 0,34^\circ$.

11.1.



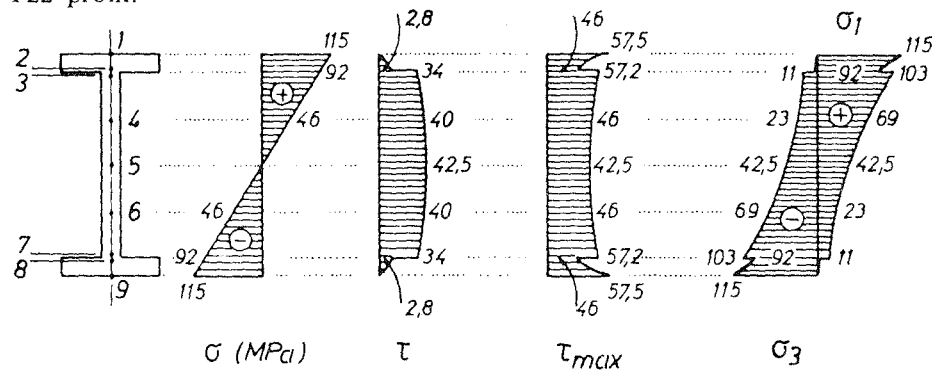
11.2.



11.3. $e = 0,83$ cm, lijevo od sredine vertikalnog rebra.

11.4. I 22 profil.

11.5.



11.6. a) $\sigma_{max} = 113$ MPa $< \sigma_d$, $\tau_{max} = 102$ MPa $< \tau_d$,

b) $\sigma_{upor}^{IV} = 162$ MPa $\cong \sigma_d$.

11.7. a) $v(z) = \frac{q_0 L^4}{360 EI} \left[8 \left(\frac{z}{L} \right) - 20 \left(\frac{z}{L} \right)^3 + 15 \left(\frac{z}{L} \right)^4 - 3 \left(\frac{z}{L} \right)^5 \right]$,

b) $v(z) = \frac{q_0 a^4}{24 EI} \left[6 \left(\frac{z}{a} \right)^2 - 4 \left(\frac{z}{a} \right)^3 + \left(\frac{z}{a} \right)^4 \right]$, $0 \leq z \leq a$

$v(z) = \frac{q_0 a^4}{24 EI} \left[4 \left(\frac{z}{a} \right) - 1 \right]$, $a \leq z \leq L$,

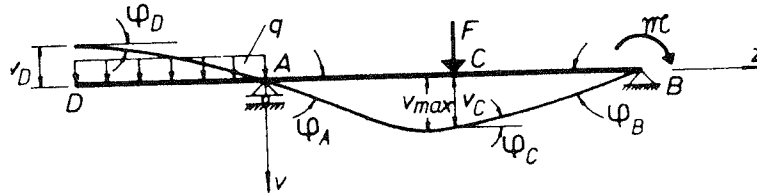
c) $v(z) = \frac{q_0 a^3}{12 EI} (L-a) \left[3 \left(\frac{z}{a} \right)^2 - \left(\frac{z}{a} \right)^3 \right]$, $0 \leq z \leq a$

$v(z) = \frac{q_0 a^3}{24 EI} (L-a) \left[3 \left(\frac{z}{a} \right)^2 - \left(\frac{z}{a} \right)^3 \right] + \frac{q_0 a^4}{48 EI} \left[\left(\frac{z}{a} \right) - 1 \right]^4 +$
 $+ \frac{q_0 L^3 a}{48 EI} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{L} \right) - 3 \left(\frac{a}{L} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{L} \right)^3 \right] \left[\left(\frac{z}{a} \right) - 1 \right] +$

$\frac{q_0 L a^3}{12 EI} \left[1 - \left(\frac{a}{L} \right) \right]$, $a \leq z \leq L$.

$$11.8. \quad v_A = 0, \quad \varphi_A = \frac{qa^3}{3EI}, \quad v_B = 0, \quad \varphi_B = -\frac{qa^3}{6EI}, \quad v_C = \frac{7qa^4}{24EI},$$

$$\varphi_C = -\frac{qa^3}{24EI}, \quad v_D = -\frac{5qa^4}{24EI}, \quad \varphi_D = \frac{qa^3}{6EI}.$$



$$11.9. \quad v_D = 0,85 \text{ cm}, \quad \varphi_C = 0,0096.$$

$$11.10. \quad v_{\max} = \frac{67 Fa^3}{48 EI}$$

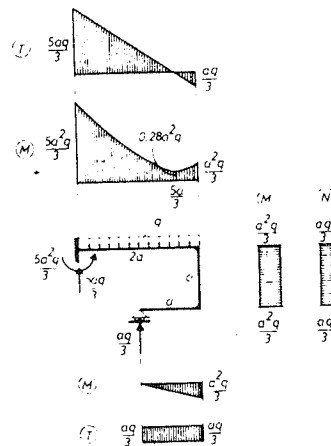
$$11.11. \quad \delta_B = 13 \frac{qa^4}{EI}$$

$$11.12. \quad v_C = \frac{1 Fa^3}{2 EI}, \quad \delta_C = 0, \quad \varphi_C = \frac{2 Fa^2}{3 EI}$$

$$11.13. \quad \delta_C = \frac{1 Fa^3}{4 EI}, \quad \Delta\varphi_B = \frac{5 Fa^2}{6 EI}$$

$$11.14. \quad \Delta = 2 \frac{Fa^3}{EI}$$

$$11.15. \quad F_A = \frac{5}{3} qa, \quad F_B = \frac{1}{3} qa, \quad M_A = -\frac{5}{3} qa^2, \quad v_C = \frac{16 qa^4}{9 EI}, \quad \delta_C = -\frac{3 qa^4}{2 EI}$$



$$11.16. M_{\max} = \frac{7}{12} qL^2.$$

$$11.17. F_A = ql - X, \quad M_A = Xl - \frac{1}{2} ql^2, \quad F_C = F_D = \frac{1}{2} X,$$

$$X = \frac{3}{8} \frac{ql}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{l}\right)^3 \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2}}.$$

$$11.18. M_{\max} = Fa.$$

$$11.19. F_A = 12 \frac{EI}{L^3} \Delta, \quad M_A = -6 \frac{EI}{L^2} \Delta, \quad F_B = 12 \frac{EI}{L^3} \Delta, \quad M_B = 6 \frac{EI}{L^2} \Delta.$$

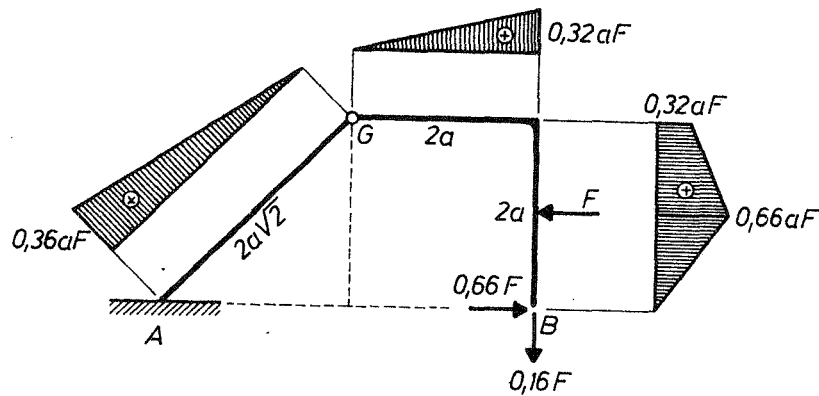
$$11.20. a = 23 \text{ cm.}$$

$$11.21. W_x = 716 \text{ cm}^3, \text{ pa usvajamo I32 profil.}$$

$$11.22. h_1 = 42 \text{ cm}, \quad h_2 = 19 \text{ cm.}$$

$$11.23. M_1 = -56,45 \text{ kNcm}, \quad Y_1 = 7,23 \text{ kN}, \quad Y_2 = 3,37 \text{ kN}, \quad Y_3 = 7 \text{ kN}, \quad Y_4 = 4,42 \text{ kN.}$$

11.24.



$$11.25. M_{\max} = 20,76 \text{ kNm}, \quad x_C = 0,52 \text{ mm.}$$

$$11.26. x_A = \frac{1 Fa^3}{2 EI}, \quad y_C = \left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \frac{Fa^3}{EI}.$$

$$11.27. x_B = 0,16 \text{ cm}, \quad y_B = 0,42 \text{ cm.}$$

$$12.1. \sigma_A = 142 \text{ MPa}, \quad \sigma_B = -124 \text{ MPa}, \quad \sigma_C = -69 \text{ MPa.}$$

$$12.2. \sigma_{\max} = 5,31 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\min} = -5,94 \text{ MPa}, \quad x_0 = -\frac{1}{6} a, \quad y_0 = \frac{1}{15} a.$$

$$12.3. \sigma_{\text{upor}}^A = 123 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\text{upor}}^B = 76 \text{ MPa}, \quad v_C = 0,51 \text{ cm.}$$

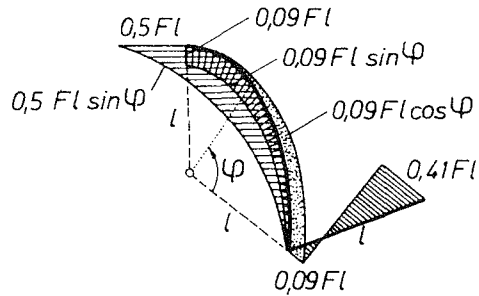
12.4. $h = 3,3 \text{ cm}$, $b = 2,8 \text{ cm}$, $d = 6,1 \text{ cm}$, $D = 6,1 \text{ cm}$.

12.5. $\sigma_{I,\max}^{\Phi} = 82,7 \text{ MPa}$, $\sigma_{I,\max}^2 = 175,5 \text{ MPa}$, $r_k = 0,53 \text{ mm}$.

12.6. $x_D = 60,15 \frac{Fa^3}{Eh^4}$, $y_D = 51,53 \frac{Fa^3}{Eh^4}$.

12.7. $q = 4,14 \text{ kN m}$, $r_c = 0,63 \text{ mm}$.

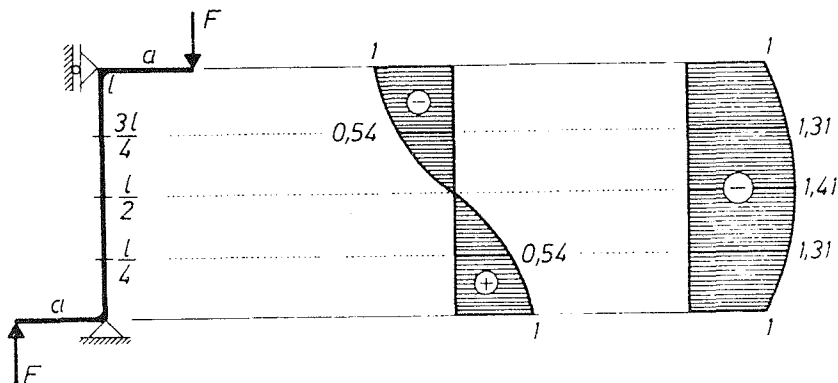
12.8.



13.1. $r_{\max} = 1,3 \text{ cm}$, $|\sigma_{\max}| = 6,71 \text{ MPa}$.

13.2. a) $F_{kr} = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$.

b)



$$\frac{M}{EI a \frac{a^2}{4l^2}} \quad \frac{V}{EI a \frac{a^3}{8l^3}}$$

13.3. $\text{tg} \left(\frac{kl}{2} \right) + \frac{I}{I_1} \frac{l_1}{l} \left(\frac{kl}{2} \right) = 0$, $k^2 = \frac{P}{EI}$.

Za $I = I_1$, $l = l_1$: $P_{kr} = 16,47 \frac{EI}{l^2} = \pi^2 \frac{EI}{(0,774l)^2}$.

13.4. U pravcu maksimalnog glavnog centralnog momenta inercije poprečnog presjeka.

13.5. a) $P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$,

b) $P_{kr} = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$.

13.6. $P_{kr} = 12,38 \text{ kN}$.

13.7. $l = 2,99 \text{ m}$.

13.8. $\varphi = \arctg(\operatorname{ctg}^2 \alpha)$.

13.9. $D = 6 \text{ cm}$, $d = 4,8 \text{ cm}$.

13.10. $\sigma = 133,3 \text{ MPa} > \sigma_{izv} = 122,6 \text{ MPa}$, pa će doći do izvijanja.

14.1. $F_T = \sigma_T A$, $F_{gr} = \frac{4}{3} \sigma_T A$.

14.2. $d = 1,75 \text{ cm}$.

14.3. $F_T = 447,8 \text{ kN}$, $F_{gr} = 480 \text{ kN}$.

14.4. $\mathfrak{M}_{gr} = 31,4 \text{ kNm}$.

14.5. $q_{gr} = 33 \text{ kN/m}$, $q_d = 18,2 \text{ kN/m} = 0,55 q_{gr}$.

14.6. $F_{gr} = 90,36 \text{ kN}$.

14.7. $q_{gr} = 75,6 \text{ kN/m}$.

14.8. $d = 3,3 \text{ cm}$.

14.9. $F_{gr} = \frac{\sigma_T a^3}{l}$.

14.10. $b = 1,46 \text{ cm}$.

14.11. $b = 8,8 \text{ cm}$.

15.1. a) $I_\Omega = \frac{tb^2}{4} (8b_1^3 + 6h^2b_1 + h^2b - 12b_1h)$

b) $I_\Omega = \frac{ta^4b^3}{6} \frac{4a+3b}{2a^3-(a-b)^3}$, $e = 0,707 ab^2 \frac{3a-2b}{2a^3-(a-b)^3}$.

15.2. $\varphi = \frac{Pbh}{GI_t} \frac{1}{\operatorname{ch} kL} (1 - \operatorname{ch} kz)$, $B_\Omega = \frac{Pbh}{\operatorname{ch} kL} \operatorname{ch} kz$.

15.3. $\varphi = \frac{m_t/2}{GI_t} \frac{1}{k} \frac{\operatorname{ch} \frac{kL}{2} - 1}{\operatorname{sh} \frac{kL}{2}} (\operatorname{ch} kz - 1) - \operatorname{sh} kz + kz$.

15.4. $\varphi = \frac{m_t}{GI_t} \frac{1}{k^2} \frac{1 + kL \operatorname{sh} kL}{\operatorname{ch} kL} (\operatorname{ch} kz - 1) - kL \operatorname{sh} kz + k^2z (L - \frac{z}{2})$

$$B_{\Omega} = -\frac{m_1}{k} \frac{1 + kL \operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kL} (\operatorname{ch} kz - kL \operatorname{sh} kz - 1) .$$

$$15.5. \quad B_{\Omega} = -\frac{1}{3} pb^3 \frac{\operatorname{ch} k(\frac{L}{2} - z)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} \dots + \frac{B_{\Omega}}{I_{\Omega}} \Omega .$$

L I T E R A T U R A

1. *D. Bazjanac*, Nauka o čvrstoći, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
2. *N. M. Beljajev*, Zbirka zadataka iz otpornosti materijala, (prevod), Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
3. *V. Brčić*, Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1978.
4. *J. P. Den Hartog*, Strength of materials, Dover, New York, 1961.
5. *V. I. Feodoseev*, Soprotivljenje materialov, Nauka, Moskva, 1973.
6. *M. M. Filonenko – Borodič* i dr., Kurs soprotivljenia materialov, Gos. Izd., Moskva, 1955.
7. *Y. C. Fung*, Foundations of solid mechanics, Prentice-Hall, New Jersey, 1965.
8. *V. A. Gastev*, Kratki kurs otpornosti materijala, (prevod), Građevinska knjiga, Beograd, 1966.
9. *R. C. Juvinall*, Stress, strain and strength, McGraw-Hill, New York, 1967.
10. *L. M. Kachanov*, Fundamentals of the theory of plasticity, Mir Publishers, Moscow, 1974.
11. *J. Lazić* i dr., Zbirka rešenih zadataka iz otpornosti materijala, Građevinski fakultet, Beograd, 1978.
12. *L. E. Malvern*, Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice-Hall, New Jersey, 1969.
13. *J. Đ. Mandić*, Otpornost materijala, Naučna knjiga, Beograd, 1977.
14. *I. Mirolioubov* i dr., Problemes de resistance des materiaux, Editions Mir, Moscow, 1973.
15. *N. Hajdin*, Štapovi sa tankim zidovima i otvorenim profilom, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1965.
16. *E. P. Popov*, Mechanics of materials, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
17. *D. Rašković*, Otpornost materijala, Naučna knjiga, Beograd, 1971.
18. *D. Rašković*, Tablice iz otpornosti materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.
19. *R. J. Roark* i dr., Formulas for stress and strain, McGraw-Hill, New York, 1975.
20. *I. S. Sokolnikoff*, Mathematical theory of elasticity, McGraw-Hill, New York, 1965.
21. *S. P. Timoshenko, J. M. Gere*, Mechanics of materials, D. Van Nostrand Company, New York, 1972.
22. *S. P. Timoshenko, J. M. Gere*, Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New York, 1961.
23. *S. P. Timoshenko, J. N. Goodier*, Theory of elasticity, McGraw-Hill, New York, 1970.
24. *S. Timoshenko, D. H. Young*, Elements of strenght of materials, D. Van Nostrand Company, New York, 1968.
25. *S. Timošenko*, Otpornost materijala, I dio, (prevod), Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
26. *S. Timošenko*, Otpornost materijala, II dio, (prevod), Građevinska knjiga, Beograd, 1966.

REGISTAR POJMOVA

A

Akcija i reakcija, zakon 15, 19
Aksijalni:
 moment inercije 452
 opterećenje 146
 sila 146, 385
Aksijalno naprezanje 145
 deformacija 146
 deformacioni rad 148, 151
 dimenzionisanje 149
 elasto-plastična analiza 424
 izduženje 147
 koncentracija napona 150, 151
 krutost 147
 napon 146
 plastična analiza 424
 pomjeranja 147
 statički neodređeni problemi 156
 uticaj na savijanje 385
 zaostali naponi 426
Aksijalno simetričan 117
Aluminijum 82, 91
Amorfna struktura 78
Analiza:
 deformacije 53
 elasto-plastična 423
 napona 15
Analogija:
 diferencijalnih jednačina 306
 graničnih uslova 306
 membranska 216, 219, 253, 262
Anizotropija 79
 ortogonalna 99
Armatura 286
Asfalt 85

B

Bakar, osobine 91
Bauschingerov efekat 8^d
Beltrami-Michellove jednačine kompatibilnosti 114,
 516
Bernoulli-Eulerova hipoteza 169

Beton 79, 83, 86, 91
Betonski stubovi 83, 195
Bettiev stav 130
Biaksijalno stanje napona 49
Bimoment 458
Bočna:
 kontrakcija, koeficijent 88
 opterećenje 385, 391, 400
 sila 388, 400
Bredtove formule 229, 282
Brzina deformacije 85

C

Castiglianov stav 132
 aksijalno naprezanje 148, 151
 čisto koso savijanje 183
 čisto pravo savijanje 168
 kombinovano naprezanje 368
 savijanje silama 312
 torzija 231, 236
Cauchyve:
 jednačine ravnoteže 41, 516
 relacija 21, 60
Celuloza 79
Centar:
 savijanja (smicanja) 253, 275, 283
 simetrije 450
Centrifugalni moment inercije 452
Cijev:
 debela 117
 kružna 241
 pravougaona 242
 tankozidna 121
Ciklično opterećenje 82, 426
Cilindrična površ 145
Cjevasti stub 510
Clapeyronova jednačina tri momenta 339

Č

Čelik 79, 80, 82, 91
Čisto koso savijanje 180
 deformacija 181

deformacioni rad 183
dimenzionisanje 184
napon 181
neutralna osa 182
pomjeranja 182
Čisto pravo savijanje 165
deformacija 166
deformacioni rad 168
dimenzionisanje 171
elementarna teorija 168
napon 166
neutralna osa 166
pomjeranja 166
Čisto smicanje 50

D

Debeli cijev 117
Debljina zida (profila) 228, 229, 273
Deformabilno tijelo 11
Deformacija:
 kod aksijalnog naprezanja 146
 elastična 81
 elipsoid 487
 energija 125
 homogenost 54
 invarijante tenzora 64
 inženjerska 80
 konačna 11
 logaritamska 80
 longitudinalna 88
 mala (infinitesimalna) 11, 54, 87
 Mohrov krug 73
 normalna 59
 plastična 81
 pojam 53
 poprečna 88
 povratna 81
 prirodna 80
 ravno stanje 72
 kod savijanja 166, 181, 254
 (vidi takode Ugib grede)
 smičuća 59
 usljed temperature 100
 tenzor 59
 kod torzije 205
 transformacija tenzora 63
 uslovi kompatibilnosti 68
 vektor 60
 veza sa komponentalnim pomjeranjima 55
 viskozna 107
Deformacioni rad:
 kod aksijalnog naprezanja 148, 151
 kod čistog savijanja 168, 183
 devijatorski dio 126
 kod kombinovanog naprezanja 367

 određivanje ugiba i nagiba 312
 na promjeni oblika 126, 137
 na promjeni zapremine 126
 kod savijanja silama 297
 sferni dio 126
 specifični 124, 125
 kod torzije 229, 236
Deformisana konfiguracija 54, 386
Deplanacija 450
Descartesove koordinate 117
Devijatorski dio:
 deformacionog rada 126
 tenzora deformacije 65
 tenzora napona 38
Diferencijalna jednačina:
 elastične linije 300
 ograničene torzije 463
 pritisnute savijene grede 386
 ravnoteže 40
Dijagram:
 napona i deformacije 80
 presječnih sila 329
 sile i izduženja 80
Dilatacija 54
 glavna 64
 kubna 66
 srednja 66
Dimenzionisanje:
 pri aksijalnom naprezanju 149
 pri čistom kosom savijanju 184
 pri čistom pravom savijanju 171
 dozvoljeni napon 141
 kod ekscentričnog pritiska 194
 prema graničnoj nosivosti 439
 prema izvijanju 406
 koeficijent sigurnosti 141
 pri kombinovanom naprezanju 369
 pri savijanju silama 286
 pri torziji 233
 uporedni napon 141
Dislokacioni mehanizam 81
Donja granica plastičnog tečenja 81
Dozvoljeni:
 napon 141
 ugib 288
Drvo 79
Duraluminijum 510
Dužina izvijanja, slobodna 406

E

Efekat, Bauschingerov 84
Ekscentricitet sile 193
Ekscentrični pritisak 193, 393
dimenzionisanje 194

jezgro 195
napon 193
neutralna osa 193
Eksperiment 80
Eksperimentalne metode 114
Elastična:
energija 123
histerezis 82
izvijanje 407
simetrija 98
Elastična linija 255, 298
diferencijalna jednačina 300
određivanje 300
pritisnute grede 389
Elastično-idealno plastično 423
Elastičnost:
granica 81
modul 81, 88
naknadna 109
trenutna 86
visko 79, 106
zaostala 109
Elastomeri 79
Elasto-plastična analiza 423
aksijalno opterećenog nosača 424
dimenzionisanje 439
dozvoljeno opterećenje 440
granična nosivost 439
granična sila 425, 437
granični moment 428, 432
granično opterećenje 439
koeficijent sigurnosti 440
mehanizam sloma 437, 439
plastični zglobovi 436
savijanja silama 434
savijanja spregovima 430
statički neodređeni problemi 439
torzije grede 426
zaostali naponi 426, 428, 434, 438
Elementarna teorija:
savijanja 168, 266
torzije 211
Elipsa:
inercije 465
napona 486
Elipsoid deformacije 487
Eliptični poprečni presjek:
pri savijanju 256
pri torziji 208
Energija:
deformacije (*vidi* Deformacioni rad)
elastična 123
kinetička 122

potencijalna 128, 409
toplotna 122
Epruveta 80
izduženje 80
lom 80, 82
Eulerova:
kritična sila 389, 401, 406, 410
kriva 407
osnovni slučajevi izvijanja 400

F

Faktor koncentracije napona 150
Fenomen nestabilnosti 82, 384
Fiktivni:
moment 307
nosač 306
opterećenje 306
sila 312
Fleksibilnost 11
Fluidi 11
Formula:
Bredtova 229
sekantna 398
Vereščaginova 319
Žuravskog 274
Fotoelastičnost, metoda 114
Fourierovi:
koeficijenti 262
red 221
Funkcija:
napona 202, 251
tečenja 103

G

Generalisani:
Hookeov zakon 90
pomjeranje 312
sila 312
Geometrijske osobine ravnih površina 450
Gerberova:
greda 303
zglob 306
Glavna ravan 165
Glavne:
dilatacije 64
momenti inercije 458
nulta tačka 499
ose inercije 459
pol 499
poluprečnik inercije 465
pravci napona 30, 44
Glavni naponi:
kod kombinovanog naprezanja 361

I

- Idealni:
 - oblik grede 288
 - otporni moment 176
- Idealno plastično 106, 423
- Inercija:
 - elipsa 465
 - glavne ose 459
 - Mohrov krug 462
 - moment 452
 - poluprečnik 465
- Integracione konstante 70, 300
- Integral 315, 319
- Invarijante:
 - momenta inercije 460
 - tenzora deformacije 64
 - tenzora napona 30
- I profil 240, 275, 477, 501
- IP profil 478
- Ispitivanje materijala 87
- Istezanje 147
 - test 80
- Istorija deformisanja 105
- Ivični napon 499
- Izduženje:
 - eprovete 80
 - srednje 54
- Izotropnost 79
- Izvijanje 400
 - dimenzionisanje 406
 - elastično 407
 - grede promjenljivog poprečnog presjeka 412
 - koeficijent 409
 - koeficijent sigurnosti 408
 - kritična sila (Eulerova) 389, 401, 406, 410
 - metod potencijalne energije 409
 - napon 406
 - osnovni Eulerovi slučajevi 400
 - plastično 407
 - slobodna dužina 406
 - Tetmajerova prava 407
- Izvod napona 105

J

- Jačina na kidanje 82
- Jedinična:
 - sila 161, 315
 - sprej 316
- Jedinstvenost rješenja 112
- Jednačina:
 - elastične linije 300

- elastičnosti, osnovne 110
- kanonske 343
- Laplaceova 220, 264
- linearne termoelastične 100
- Poissonova 204, 252
- tri momenta (Clapeyronova) 339
- Jednačine kompatibilnosti:
 - Beltrami-Michellove 114, 516
 - Saint-Venantove 69, 516
- Jednačine, konstitutivne 78, 87, 98, 100, 102, 106
- Jednačine ravnoteže:
 - Cauchyve 41, 516
 - Navierove 113, 516
- Jezgro presjeka 195

K

- Kamen 83
- Kanonske jednačine 343
- Karakteristični slučajevi izvijanja 400
- Kelvinov model 108
- Kidalica 80
- Kidanje, jačina 82
- Kinetička energija 122
- Klizanje 55
 - maksimalno 65
- Koeficijent:
 - Fourierov 262
 - kubne ekspanzije 101
 - linearne termičke ekspanzije 100
 - Poissonov (bočne kontrakcije) 88
 - proporcionalnosti 98
 - recipročni Maxwelllovi 133
 - sigurnosti 141, 408, 440
 - uticajni (Maxwelllovi) 131
- Kombinovano naprezanje 360
 - deformacioni rad 367
 - dimenzionisanje 369
 - statički neodređeni problemi 374
- Kompatibilnost deformacija 67
 - jednačine 69, 114, 516
- Komplementarna energija 129
- Komponentalne:
 - deformacije 55
 - naponi 22
 - pomjeranja 53
- Komponente:
 - relativnog pomjeranja 62
 - tenzora deformacije 59
 - tenzora napona 21
 - vektora napona 18
 - vektora pomjeranja 53
- Kompresija, modul 91

- Kompresivni napon 96
 - Konačne deformacije 11
 - Konačni elementi 11, 114
 - Koncentracija napona:
 - kod aksijalnog napreznja 150
 - faktor 150
 - kod savijanja 308
 - kod torzije 227, 229, 234
 - Koncentrisana sila 301
 - na pritisnutoj gredi 388
 - Konstante:
 - elastičnosti 91
 - Laméove 91
 - Konstitutivne jednačine:
 - za elastičan anizotropan materijal 98
 - za elastičan izotropan materijal 87
 - plastičnosti 102
 - termoelastičnosti 100
 - viskoelastičnosti 106
 - Kontinualne grede 338
 - jednačina tri momenta 339
 - Kontinualno opterećenje 151, 300
 - po pritisnutoj gredi 391
 - Kontinuum 11
 - Kontrakcija:
 - bočna 88
 - epruvete 82
 - Konturni uslov 252
 - Konvencija o znaku:
 - komponenti napona 22
 - smičuće deformacije 73
 - Konzola 288, 300
 - poduprta 326
 - Konjugovanost:
 - napona 24
 - smičućih napona 23
 - Koordinate:
 - Descartesove 117
 - polarne 264
 - polarno-cilindrične 117
 - Koordinatni sistem:
 - rotacija 26, 63
 - transformacija 455
 - translacija 455
 - Kosa ravan grede 148
 - Koso savijanje:
 - čisto 180
 - silama 360
 - Koža 79
 - Kratka greda 407
 - Kristalna struktura 78
 - Kritični:
 - napon 406
 - opterećenje 412
 - poprečni presjek 286, 369
 - sila izvijanja 389, 401, 406, 410
 - tačka 286, 369
 - Kriva, Eulerova 407
 - Krivina:
 - kod čistog savijanja 167
 - elastične linije 298, 390
 - kod elasto-plastičnog savijanja 437
 - početna 353, 394
 - poluprečnik 167, 169, 353
 - kod savijanja silama 299
 - Krivi štap 352
 - deformacioni rad 357
 - neutralna osa 353
 - normalni napon 354
 - smičući napon 356
 - Krivljenje 451
 - Krt:
 - lom 83
 - materijal 83
 - Kruto, idealno plastično 106
 - Krutost:
 - na istezanje 147
 - na savijanje 170
 - torziona 210
 - Kruto tijelo 11
 - Kružni poprečni presjek:
 - pri savijanju 259, 270
 - pri torziji 211
 - Kružni prsten 283
 - Kubna:
 - dilatacija 66
 - ekspanzija, koeficijent 101
 - jednačina 30, 64
 - Kuka 357
 - Kutijasti profil 272
 - Kvadratni poprečni presjek:
 - pri savijanju 263
 - pri torziji 223
- ## L
- Lagrangeov množitelj veze 28, 33
 - Lamela 296
 - Laméove:
 - konstante 91
 - problem 117
 - Laplaceova jednačina 220, 264
 - Legura 79
 - Linearna:
 - elastičnost 90
 - jednačine 304, 360
 - napreznje 360
 - očvršćavanje 106
 - kod savijanja silama 325, 335, 338, 343

stanje napona 50
termička ekspanzija, koeficijent 100
veze između napona i deformacije 90
Linearne termoelastične jednačine 100
Linija:
 smičućih napona 219
 težišna 353
Linija, elastična 255, 298
 diferencijalna jednačina 300
 određivanje 300
Liveno gvožđe 91, 417
Logaritamska deformacija 80
Lokalno slabljenje poprečnog presjeka 413
Lom 83, 134
L profil 227, 381, 417, 481
 raznokraki 483

LJ

Ljuske 11

M

Maksimalno:
 klizanje (smičuća deformacija) 65
 napon istezanja 171
 napon pritiska 171
 naponi smicanja 33
 ugao rotacije 247
 ugib 310, 393
Materijal:
 homogen i nehomogen 79
 izotropan 100
 jačina na kidanje 82
 krt 83
 Maxwellov 107
 očvršćavanje 81
 ortotropan 100
 osobine 91
 struktura 78
 testiranje 80, 86
 viskoelastičan 85
 viskoplastičan 85
 žilav 83
Materijal u uslovima:
 elastičnih deformacija 87
 kombinovanog naprezanja 86
 plastičnih deformacija 102
 viskoelastičnih deformacija 106
Matrica:
 gradijenta pomjeranja 61
 koeficijenata elastičnosti 98
 krutosti, elasto-plastična 106

Maxwell-Kelvinov model 109
Maxwell-Mohrova metoda:
 deformacionog rada 315
 fiktivnog nosača 305
Maxwellov:
 materijal (model) 107
 recipročni koeficijenti 133
 stav o uzajamnosti pomjeranja 131
 uticajni koeficijenti 131
Mehaničke osobine 91
Mehanika 11
Mehanizam:
 dislokacioni 81
 u plastičnoj analizi 437
 sloma 439
Membranska analogija 216, 219, 253, 262
Memorija materijala 107
Metali 79, 83
Metode:
 analogije 114
 deformacionog rada 231, 312, 343
 eksperimentalne 114
 ekstenzometrijska 114
 fiktivnog nosača 305
 fotoelastičnosti 114
 konačnih elemenata 11, 114
 konačnih razlika 114
 pomoću krtih lakova 114
 Maxwell-Mohrova (deformacionog rada) 315
 Moiré 114
 numeričke 114
 približne 231, 412
 razdvajanja promjenljivih 220, 261, 265
 semi-inverzni 114, 146, 165, 250
 sila 325
 superpozicije 304
 teorije elastičnosti 114
 Vereščaginova 319
Minimalni:
 moment inercije 401
 poluprečnik inercije 407
Minimum:
 komplementarne energije, teorema 128
 potencijalne energije, teorema 127
Misesov uslov plastičnog tečenja 103
Mjerne trake 77
Mješoviti granični uslovi 112
Množitelj veze, Lagrangeov 28, 33
Model:
 idealno plastično ponašanje 106
 Kelvinov 108
 Maxwell-Kelvinov 109
 Maxwellov 107
 Voigtov 108

- Modul:
 elastičnosti (Youngov) 81, 88
 kompresija 91
 smicanja (klizanja) 90
 Mohrova hipoteza o slomu 138
 Mohrov krug:
 deformacije 73
 inercije 462
 napona 36, 45
 Moiré metoda 114
 Moment:
 dijagram 245, 295
 fiktivni 307
 granični 428, 432
 konvencija o znaku 171
 otporni 171, 209, 230
 redukovani 309
 savijanja 250
 torzije 203
 zaostali 444
 Momenti inercije ravnih površina 452
 aksijalni 452
 centrifugalni 452
 elipsa inercije 465
 glavni 458
 glavni centralni 460
 invarijante 460
 Mohrov krug 462
 polarni 452
 položajni 456
 poluprečnik inercije 465
 promjena pri rotaciji 457
 sopstveni 456
 Steinerova teorema 456
 Moment inercije pri torziji 223, 230
- N**
- Nagib 187, 299, 304, 308, 312
 Najveći:
 deformacioni rad na promjeni oblika, hipoteza 137
 dilatacija, hipoteza 136
 normalni napon, hipoteza 135
 smičući napon, hipoteza 136
 Naknadna elastičnost 109
 Napadni moment 306
 Napon:
 biaksijalno stanje 49
 devijatorski dio 38
 dozvoljeni 141
 elipsa 486
 funkcija, Prandtlova 202
 glavni 28
 na granici elastičnosti 81
 na granici loma 134
 na granici plastičnog tečenja 81, 423
 na granici proporcionalnosti 81
 inženjerski 80
 istezanja 156, 171
 ivični 499
 izvijanja, kritični 406
 kompresivni 96
 koncentracija 150, 227, 229, 234, 308
 konvencija o znaku 22, 46
 u kosoj ravni 148
 kritični izvijanja 406
 u krivom štapu 354, 356
 maksimalni normalni 286
 maksimalni smičući 33, 269
 Mohrov krug 36, 45
 normalni 18, 146, 166, 181, 191, 193, 251, 354, 361
 obručni 118
 oktaedarski 38
 pritiska 156, 171
 prostorno stanje 88
 radijalni 118
 ravno stanje 42
 rezidualni (*ridi* zaostali)
 sferni dio 38
 smičući 18
 smičući kod savijanja 251, 257, 260, 263, 268, 274, 282
 smičući kod torzije 202, 209, 213, 222, 225, 228
 srednji normalni 91
 stvarni 80
 tangencijalni 18
 tečenja 81
 tenzor 21
 trajektorija 285
 uporedni 141
 vektor 18
 veza sa deformacijom 90
 zaostali 426, 428, 434, 438
 zatezanja 195
 Napon i deformacija, dijagram 80
 Naprezanje:
 aksijalno 145
 kombinovano (složeno) 360
 normalno 20
 tangencijalno 20
 Navierove jednačine ravnoteže 113, 516
 Nehomogen:
 materijal 79
 stanje napona 191
 Neodređeni problemi, statički:
 kod aksijalnog naprezanja 156
 u elasto-plastičnoj analizi 439
 kod kombinovanog naprezanja 374

kod torzije 245
 Neprekidna sredina 11
 Neprizmatične grede 234
 Nestabilna ravnoteža 384
 Nestabilnost:
 grednog nosača 385, 400
 u testu istezanja 82
 Neumann-Duhamelove jednačine 101
 Neutralna osa:
 kod ekscentričnog pritiska 193
 kod elasto-plastičnog savijanja 431, 437
 kod kosog savijanja 182
 kod pravog savijanja 166
 Neutralna ravan (površ) 166, 254
 Nivo linija 219
 glavnih napona 286
 Normalni napon 18
 kod aksijalnog naprezanja 146
 kod ekscentričnog pritiska 193
 ekstremne vrijednosti 171, 185, 196
 maksimalni 286
 kod pritisnutih savijenih greda 396
 kod savijanja 166, 181, 251
 kod savijanja krivog štapa 354
 srednji 91
 Normirana sektorska koordinata 499
 Nosač:
 gredni (*vidi* Greda)
 ramni (*vidi* Ram)
 rešetkasti (*vidi* Rešetka)
 Nosivost:
 granična 439
 gubljenje usljed izvijanja 384
 Nulta tačka 497
 Numeričke metode 114

O

Oblik grede, idealni 288
 Obostrano uklještena greda 245, 327
 Obrazac:
 Eulerov 413
 Vereščaginov 320
 Obrtanje poprečnog presjeka 299
 Obručni napon 118
 Očvršćavanje materijala 81
 linearno 106
 Određenost, statička 152
 Određivanje reakcija 325, 335, 343
 Ograničena torzija 450
 Oktaedarski:
 napon 38
 ravan 38
 Okvirni nosač (*vidi* Ram)

Omega (ω) postupak 409
 Ometena torzija 450
 Opasni poprečni presjek 369
 Opruga 107
 Opterećenje:
 aksijalno 146, 151
 bočno 385, 391, 400
 dozvoljeno 294, 423, 440
 fiktivno 306
 granično 440
 kontinualno 151, 300, 391
 osnovno 339, 343
 Organsko porijeklo, materijali 110
 Ortogonalna anizotropija 99
 Ortotropija 99
 Osa:
 glavna 459
 neutralna 166, 182, 193, 431, 437
 simetrije 450
 Osnovne:
 jednačine teorije elastičnosti 110
 opterećenje 339, 343
 problem teorije elastičnosti 112
 slučajevi izvijanja 400
 Osobine:
 geometrijske, ravnih površina 450
 mehaničke 91
 na pritisak i istezanje 83, 171
 Osovina 239
 Otporni moment:
 idealni 176
 pri savijanju 171
 pri torziji 209
 Otpornost, provjera 398, 419
 Otvoreni tankozidni profil:
 pri savijanju 273
 pri torziji 224

P

Paralelne ose, Steinerova teorema 456
 Parcijalna diferencijalna jednačina 41, 113, 204, 252
 Partikularno rješenje 261
 Plastična analiza (*vidi* Elasto-plastična analiza)
 Plastična:
 deformacija 81
 idealno 106, 423
 masa 79
 tečenje, uslov 102
 zglob 436
 zona 436, 438
 Ploče 11
 Početna krivina 353, 394
 Poduprta konzola 326

Poissonova:
 jednačina 204, 252
 koeficijent 88
 Pojačanje, lamelama 296
 Pojam:
 deformacije 53
 deformacionog rada 122
 Polarne koordinate 264
 Polarni moment inercije 452
 Polarno-cilindrične koordinate 117
 Polimeri 79
 Položajni moment inercije 456
 Poluobratni metod (*vidi* Semi-inverzni metod)
 Poluprečnik:
 inercije 465
 krivine 167, 169, 353
 Pomjeranje:
 gradijent 61
 infinitesimalna 53
 jednoznačna 69
 komponentalna 53
 određivanje pri zadatim deformacijama 69
 vektor 53
 veza sa deformacijama 55
 virtualno 127, 446
 Poprečna deformacija 88
 Poprečni presjek:
 kritični 286, 369
 obrtanje 299
 opasni 369
 rotacija 211, 245
 višestruko povezan 206, 255
 vitoperenje 205
 Postupak:
 Vereščaginov 319
 ω (omega) 409
 Potencijalna energija 128, 409
 Površina tečenja 102
 Površinske sile 15
 Prandtlova funkcija napona 202
 Pravci napona, glavni 30, 44
 Pravo savijanje 165, 255
 Pravougaoni poprečni presjek:
 pri savijanju 260, 268
 pri torziji 220
 Prepust 305
 Presječna:
 ravan 19
 sile 328, 356
 Presjek, jezgro 195
 Pretpostavka:
 Bernoulli-Eulerova 169
 o homogenosti stanja napona 19

Približne metode 231, 412
 Princip:
 Saint-Venantov 114, 146, 167, 254
 superpozicije 89, 112, 360, 390
 virtualnog rada 446
 Pritisak 147
 ekscentrični 193
 hidrostatički 87
 napon 156, 171
 Pritisnuta savijena greda 386
 Pritisnuti stubovi 195, 385
 Problem:
 Laméov 117
 teorije elastičnosti, osnovni 112
 Profili, standardni 474
 Promjenljivi presjek 151, 234
 Proporcionalnost, granica 81
 Prosta greda 301
 Prostorno stanje napona 88
 Provjera otpornosti 398, 419
 Prstenasti poprečni presjek:
 pri savijanju 264, 283
 pri torziji 214
 Pukotina 83, 134
 Puna greda 201
 Puzanje 86, 107

R

Rad:
 deformacioni 122, 125 (*vidi takode* Deformacioni, rad)
 sile 122
 specifični deformacioni 124, 125
 virtualni, princip 446
 Radijalni napon 118
 Ram 316, 334
 prostorni 374
 zatvoreni 333
 Raspoređeni moment 235
 Rasterećenje 81, 425, 428, 438
 Ravan:
 elastične simetrije 98
 glavna 165
 maksimalnog smicanja 34
 minimalne krutosti 401
 neutralna 166
 oktaedarska 38
 savijanja 183
 Ravne površine, geometrijske osobine 450
 Ravno stanje deformacije 72
 dilatacije i klizanja 72
 glavne dilatacije 73

- maksimalno klizanje 73
- Mohrov krug 73
- Ravno stanje napona 42
 - diferencijalne jednačine ravnoteže 46
 - glavni naponi 44
 - maksimalni smičući naponi 45
 - Mohrov krug 45
 - normalni i smičući napon 43
- Ravnoteža:
 - jednačine 41, 113, 516
 - stabilna 384, 400
- Razdvajanje promjenljivih, metod 220, 261, 265
- Razlaganje tenzora:
 - deformacije 65
 - napona 38
- Raznokraki L profil 483
- Reakcije veza:
 - određivanje 325, 335, 343
 - statički prekobrojne 326
- Recipročni Maxwellovi koeficijenti 133
- Recipročnost, Bettiev stav 130
- Red, Fourierov 221
- Redukcija momentnog dijagrama 309
- Redukovana dužina izvijanja 406
- Relacija, Cauchyeva 21, 60
- Relaksacija napona 86, 108
- Relativni:
 - položaj tačaka 53
 - pomjeranje 62
 - promjena dužine 55
- Reološki efekti 79
- Rešetka:
 - određivanje pomjeranja 161
 - statički neodređena 162
 - statički određena 160
- Rezidualni naponi (*vidi* Zaostali naponi)
- Rezultujući:
 - smičući napon 209
 - ugib 364
- Rješavanje statički neodređenih problema 156, 172, 245, 325, 335, 338, 343, 374, 439
- Ritzov postupak 233
- Rotacija:
 - poprečnog presjeka 211, 245
 - tenzor 61
 - ugao 245
- Rotacija koordinatnog sistema:
 - promjena komponenti tenzora deformacije 63
 - promjena komponenti tenzora napona 26
- S**
- Saint-Venantove:
 - jednačine kompatibilnosti 69, 516
 - princip 114, 146, 167, 254
- Savijanje:
 - centar 253, 275, 283
 - čisto koso 180
 - čisto pravo 165
 - deformacija 166, 181, 254
 - (*vidi takode* Ugib grede)
 - deformacioni rad 168, 183, 297
 - dimenzionisanje 171, 184, 286
 - elementarna teorija 168, 266
 - grede punog poprečnog presjeka 250
 - grede višestruko povezanog poprečnog presjeka 255
 - koncentracija napona 308
 - koso silama 255, 360
 - krivog štapa 352
 - krutost 170
 - moment 250
 - normalni napon 166, 181, 251
 - ravan 183
 - plastično 434
 - pravo 165, 255
 - pritisnutih greda 386
 - silama 250, 434
 - spregovima 165, 392, 430
 - statički neodređenih greda 325
 - i torzija 361
 - trajektorije glavnih napona 285
 - ugib (*vidi* Ugib grede)
 - uticaj aksijalne sile 385
 - zaostali naponi 434, 438
- Sekantna formula 398
- Sektorska:
 - koordinata 497
- Semi-inverzni metod 114, 146, 165, 250
- Sferni dio tenzora:
 - deformacije 66
 - napona 39
- Sigurnost, koeficijent 141, 408, 440
- Sila:
 - aksijalna 146, 385
 - bočna 388, 400
 - ekscentrična 196
 - Eulerova kritična 389, 401, 406, 410
 - fiktivna 312
 - generalisana 312
 - granična 425, 437
 - gravitaciona 15
 - inercijalna 15
 - jedinična 161, 315
 - koncentrisana 301, 388
 - kritična izvijanja 389, 401, 406, 410
 - površinska 15
 - presječne 328, 356
 - pritisna 408
 - specifična 17, 18
 - spoljašnja 15
 - u štapovima rešetke 160, 162

- unutrašnja 15
 - zapreminska 15
 - Sistem kanonskih jednačina 343
 - Skraćenje stuba 154
 - Slobodna dužina izvijanja 406
 - Slobodna torzija 450
 - Slom 134
 - hipoteze 134
 - mehanizam 439
 - Složeno naprezanje (*vidi* Kombinovano naprezanje)
 - Slučajevi izvijanja, osnovni 400
 - Smicanje:
 - centar 253, 275, 283
 - čisto 50
 - modul 90
 - tok 228, 274
 - Smičuća deformacija 59
 - konvencija o znaku 73
 - Smičući napon 18
 - dozvoljeni 233, 287
 - konvencija o znaku 22, 46
 - konjugovanost 22
 - u kosoj ravni 153
 - maksimalni 33, 269
 - usljed transferzalne sile 361
 - Smičući napon kod savijanja silama:
 - eliptičnog poprečnog presjeka 257
 - I profila 271, 275
 - kružnog poprečnog presjeka 260, 270
 - kutijastog profila 272
 - pravougaonog poprečnog presjeka 263
 - prstenastog poprečnog presjeka 266, 284
 - tankozidnog otvorenog profila 274
 - tankozidnog zatvorenog profila 282
 - trougaonog poprečnog presjeka 271
 - Smičući napon kod torzije:
 - eliptičnog poprečnog presjeka 209
 - kružnog poprečnog presjeka 211, 213
 - pravougaonog poprečnog presjeka 222
 - prstenastog poprečnog presjeka 216
 - tankozidnog otvorenog profila 225
 - tankozidnog zatvorenog profila 228
 - trougaonog poprečnog presjeka 236
 - Sopstveni moment inercije 456
 - Specifični deformacioni rad 124, 125
 - kod aksijalnog naprezanja 148, 151
 - kod savijanja 168, 183, 297
 - kod torzije 229
 - Specifično izduženje 54
 - Specijalne vrste naponskog stanja 42
 - Spoljašnji proizvod vektora 58
 - Spreg:
 - savijanja 169
 - torzije 201
 - Srednji normalni napon 91
 - Stabilna ravnoteža 384, 400
 - Stabilnost grede 384, 400
 - Staklo 79
 - Standardni prifili 474
 - Stanje, granično 425, 428, 432, 439
 - Stanje napona:
 - hidrostatičko 31, 39
 - homogeno 19
 - linearno 50
 - prostorno 88
 - ravno 42
 - trodimenzionalno 102
 - Statička neodređenost, unutrašnja 162
 - Statički moment površine 450
 - plastično deformisanog dijela 432
 - Statički neodređeni problemi:
 - kod aksijalnog naprezanja 156
 - granično opterećenje 440
 - kod kombinovanog naprezanja 374
 - određivanje reakcija integracijom diferencijalne jednačine elastične linije 335
 - određivanje reakcija metodama deformacionog rada 343
 - određivanje reakcija metodom sila 325
 - plastična analiza 439
 - kod savijanja silama 325, 335, 338, 343
 - kod torzije 245
 - Statički prekobrojne 326, 374
 - Statičko opterećenje 122
 - Stav:
 - Bettiev 130
 - Castiglianov 132
 - o konjugovanosti napona 24
 - o konjugovanosti smičućih napona 23
 - Maxwellov 131
 - Steinerova teorema 456
 - Stepen:
 - iskorišćenja presjeka 176
 - statičke neodređenosti 325
 - Struktura, kristalna i amorfná 78
 - Stubovi:
 - ekscentrični pritisak 195
 - izvijanje 385, 417
 - određivanje napona 153, 506
 - Superpozicija, princip 89, 112, 304, 360, 390
- Š**
- Štap 145
 - aksijalno opterećen 152, 154, 424
 - izvijanje 385, 400
 - krivi 352
 - opterećen na torziju 240, 244
 - rešetke 160, 162

Šuplji:
cilindar 244
poprečni presjek 255

T

Tablice:
standardnih profila 474
ugiba i nagiba 469

Tačka proporcionalnosti 81

Tangencijalni napon 18 (*vidi takode* Smičući napon)

Tankozidna cijev:
kružna i kvadratna 241
pod unutrašnjim pritiskom 120
test 86

Tankozidni otvoreni profil:
pri savijanju 273
pri torziji 224

Tankozidni zatvoreni profil:
pri savijanju 280
pri torziji 228

Tečenje:
funkcija (površina) 103
napon 81
plastično 81, 423
viskozno 86

Tehnička teorija savijanja 266

Temperatura 100
uticaj na ponašanje materijala 85

Tensor deformacije 59
devijatorski dio 66
invarijante 64
promjena pri rotaciji koordinatnog sistema 63
sferni dio 66

Tensor napona 21
devijatorski dio 38
invarijante 30
promjena pri rotaciji koordinatnog sistema 26
sferni dio 38

Tensor rotacije 61

Teorema:
o minimumu komplementarne energije 128
o minimumu potencijalne energije 127

Steinerova 456

Teorija:
elastičnosti 11, 110, 112
elementarna 168, 211, 266
grede 11
plastičnosti 11, 103
ploča i ljuski 11
tehnička 266
viskoelastičnosti 11, 109

Termička ekspanzija, koeficijent 100

Termoelastičnost, jednačine 100

Termoplastičnost 11

Test:
istezanja 80
puzanja 86
relaksacije 86

Testiranje materijala 80, 86

Tetmajerova prava 407

Tetraedar 20

Težišna linija 353

Težište ravne površine 450

Tijelo:
deformabilno 11
kruto 11
Maxwellovo 107

Tok smicanja 228, 274

Toplotna energija 122

Torzija 201
deformacija 205
deformacioni rad 229, 236
dimenzionisanje 233
elementarna teorija 211
granični moment 428
grede eliptičnog poprečnog presjeka 208
grede kružnog poprečnog presjeka 211
grede pravougaonog poprečnog presjeka 220
grede prstenastog poprečnog presjeka 214
grede tankozidnog otvorenog profila 224
grede tankozidnog zatvorenog profila 228
grede trougaonog poprečnog presjeka 236
koncentracija napona 227, 229, 234
krutost 211
moment 203
moment inercije 223, 230
napon 202
ograničena (ometena) 450
otporni moment 209, 230
plastična 426
pomjeranja 205
Ritzov postupak 233
i savijanje 361
slobodna 450
statički neodređena 245
ugao 205
višestruko povezanog poprečnog presjeka 206
zaostali naponi 428

T profil 294, 475, 476

Trajektorije glavnih napona 285

Transferzalna sila 300, 306

Transformacija koordinatnog sistema 455

Translacija koordinatnog sistema 455

Trenutna elastičnost 86

Treskin uslov plastičnog tečenja 103

Tri momenta, jednačina 339

Trodimenziono stanje napona 102

U

- Ugao:
 - rotacije 245
 - torzije 205
- Ugib grede 299
 - koso savijanje silama 363
 - Maxwell-Mohrova metoda 315
 - metode deformacionog rada 312
 - metod fiktivnog nosača 305
 - metod superpozicije 304
 - promjenljivog presjeka 308
 - tablice 469
 - uticaj aksijalne sile 385, 389
 - Vereščaginova metoda 319
- Unutrašnje sile 15
- Uporedni napon 141
- Uslov:
 - granični 41, 112, 202
 - integrabilnosti 68
 - kompatibilnosti 67, 206 (*vidi takode* Jednačine kompatibilnosti)
 - plastičnog tečenja 102
 - ravnoteže 21, 41, 274
 - stabilnosti 409
- Uticaj:
 - aksijalne sile na ugib 385, 389
 - početne krivine 394
 - temperature i vremena 85
- Uticajni koeficijenti, Maxwelllovi 131
- Uvijanje (*vidi* Torzija)
- Uzajamnost pomjeranja, stav 131

V

- Vektor:
 - deformacije 60
 - napona 18
 - pomjeranja 53
 - spoljašnji proizvod 58
- Vereščaginova metoda 319
- Vertikalno pomjeranje 155, 315, 381
- Veza:
 - između napona i deformacije 90
 - između pomjeranja i deformacije 55
- Virtualne:
 - deformacije 127
 - pomjeranja 127, 446
 - priraštaji napona 128
 - rad, princip 446
- Viskoelastičnost 79, 106
- Viskoplastičnost 79
- Viskozni efekti 79, 85
- Viskoznost 85, 107

- Višestruko povezan poprečni presjek 206, 255
- Vitak štap 385
- Vitkost grede 407
 - granična 407
- Vitoperenje 205, 210, 224
- Vlakno grede 166, 169
- Voigtov model 108
- Vratilo 371
- Vrijeme, uticaj na ponašanje materijala 85
- Vrste naprežanja 145, 360

W

- ω (omega) postupak 409

Y

- Youngov modul elastičnosti 81, 88

Z

- Zakon:
 - akcije i reakcije 15, 19
 - Hookeov 87, 90
- Zaobljenje uglova 227
- Zaostala:
 - deformacija 86, 426
 - elastičnost 109
 - krivina 438
 - moment 444
 - naponi 426, 428, 434, 438
- Zapremina, promjena 39, 66
- Zapreminske sile 15
- Zatvoreni ram 333
- Zatvoreni tankozidni profil:
 - pri savijanju 280
 - pri torziji 228
- Zazor 329
- Zglob:
 - Gerberov 306
 - plastični 436
- Zona, plastična 436, 438
- Z profil 362, 480

Ž

- Žilavi materijal 83
- Žilavost 85
- Žuravski:
 - formula 274
 - hipoteza 267