



# L'ACQUA

*ESTRATTO*

Vittorio Di Federico, Daniel Tartakovsky

**STIMA ANALITICA DEL TRASPORTO DI SOLUTO VERSO UN DRENO**



ISSN 1125-1255



Vittorio Di Federico, Daniel Tartakovsky\*

## STIMA ANALITICA DEL TRASPORTO DI SOLUTO VERSO UN DRENO

### Summary

*In this paper we address a problem of transient mass transport within a homogeneous domain to a drainage slit on an impervious basis. The statement and solution of the flow problem are well-known and are used as a starting point in our investigation. Using the comparison method introduced in general form by one of us, a simple, closed form estimation of the two dimensional concentration field and of the solute flux is obtained. Conditions for the applicability of the method are derived and the influence of parameters on the solution are discussed.*

### Sommaire

*Cette memoire analyse le problème du transport à régime transitoire d'un soluté vers un drainage horizontal placé au pied d'un amas filtrant homogène sur un fond imperméable. Le problème est abordé à partir de la solution très connue pour le champ de mouvement. Le champ de concentration à deux dimensions et le flux de polluant à travers le drainage sont obtenus analytiquement d'un procédé, introduit dans une forme générale par un des auteurs, par lequel on donne une estimation que majore la solution exacte. On dérive les conditions pour appliquer la méthode et on discute de l'influence des paramètres sur la solution obtenue.*

### Sommario

*La memoria analizza il problema del trasporto in regime transitorio di soluto verso un dreno orizzontale posto al piede di un ammasso filtrante omogeneo su fondo impermeabile. Il problema è affrontato a partire dalla nota soluzione per il campo di moto. Il campo di concentrazione bidimensionale ed il flusso di soluto attraverso il dreno sono ricavati analiticamente tramite un procedimento, introdotto in forma generale da uno degli Autori, mediante il quale è fornita una stima maggiorante della soluzione esatta. Si derivano le condizioni di applicabilità del metodo e viene discussa l'influenza dei parametri sulla soluzione ottenuta.*

## 1. INTRODUZIONE

Il controllo della qualità delle acque nei sistemi di drenaggio è un problema antico. Uno dei primi risultati fu ottenuto da Muskat (1946), che esaminò il problema di un fronte idrico avanzante che spiazza e guida il petrolio in un pozzo situato in prossimità dell'interfaccia acqua-olio. Da allora, il crescente uso di nitrati e pesticidi in agricoltura è divenuto una ragione per diffuse preoccupazioni di carattere ambientale, tra cui quelle concernenti la qualità delle acque di drenaggio. Seguendo il modello di flusso a pistone per il trasporto di massa (ovvero trasporto dovuto esclusivamente

a processi convettivi) utilizzato da Muskat, Miaymoto e Warrick (1974) affrontarono il problema dello spiazzamento di sale in tubi di drenaggio forati, mentre Jury (1975) calcolò i tempi di transito di soluti per drenaggio di campi mediante tubi. Grismer (1993) utilizzò il metodo della sovrapposizione delle linee di flusso risultanti dalla ricarica superficiale e un profilo di qualità delle acque stratificato per investigare la qualità delle acque di drenaggio. I modelli convettivo-dispersivi, che includono il contributo della dispersione idrodinamica (Bear, 1972) sembrano rappresentare in

\* Vittorio Di Federico, DISTART - Idraulica, Università di Bologna; Daniel Tartakovsky, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, USA.



modo più completo i processi di trasporto di massa nei mezzi porosi naturali. Tuttavia il modello convettivo-dispersivo, applicato al problema della qualità delle acque raccolte dai sistemi di drenaggio di falda, presenta alcune problematiche di non facile soluzione, e cioè: (a) la grande variabilità spaziale della velocità di filtrazione non consente operazioni di media significativa sui coefficienti della equazione convettivo-dispersiva; (b) le geometrie del dominio di moto risultano complicate e spesso includono superfici libere; (c) esiste la necessità di esaminare processi dispersivi nel moto di filtrazione verso un drenaggio unitamente a quelli nel dreno stesso. La complessità risultante rende difficoltosa la derivazione di soluzioni analitiche a problemi di questo tipo, utili per valutazioni di prima approssimazione circa l'influenza dei diversi parametri. Nella maggioranza dei casi, le soluzioni a problemi di questo tipo sono numeriche (Fio e Deverel, 1990; Garcia et al., 1995), anche se non mancano esempi di soluzione analitica ricorrendo a semplificazioni (Tartakovsky e Di Federico, 1997).

In questa nota si affronta il problema del trasporto bidimensionale di massa verso un dreno posto su di un fondo impermeabile. L'impostazione e la soluzione del problema del moto sono noti (Polubarinova-Kochina, 1962; Bear et al., 1968); essi sono utilizzati come punto di partenza per la derivazione, in forma chiusa, di una stima maggiorante della soluzione esatta. Il fine è duplice: in primo luogo, derivare una soluzione, ancorché approssimata, di un problema di interesse applicativo; in secondo luogo, fornire una applicazione della metodologia e dei criteri introdotti da Tartakovsky (1994).

## 2. POSIZIONE DEL PROBLEMA

Si consideri il trasporto di un soluto conservativo verso un dreno orizzontale AF posto su di uno strato impermeabile orizzontale AD (Figura 1a). Si ipotizzi che il mezzo poroso sia omogeneo ed isotropo, e che la legge di Darcy sia valida. Il reticolo di filtrazione per il problema di moto in esame consiste nelle parabole aventi fuoco comune nel punto F (Polubarinova-Kochina, 1962), individuate da

$$\begin{aligned} x/l &= (\psi/q)^2 - (\phi/q)^2; & y/l &= -2\phi\psi/q^2; \\ l &= q/2K \end{aligned} \quad (1)$$

mentre la distribuzione delle velocità è data dalla seguente espressione

$$\frac{V(\phi, \psi)}{K} = \frac{l}{\sqrt{(\phi/q)^2 + (\psi/q)^2}} \quad (2)$$

dove, con riferimento allo schema di Figura 1a,  $x$  e  $y$  sono coordinate cartesiane,  $\phi$  e  $\psi$  sono potenziale e funzione di corrente ( $L^2T^{-1}$ ),  $l$  è la lunghezza del dreno ( $L$ ),  $q$  è la portata al dreno per unità di larghezza ( $L^2T^{-1}$ ),  $K$  è la conduttività idraulica dell'ammasso ( $LT^{-1}$ ), e  $V$  è la velocità di filtrazione ( $L T^{-1}$ ).

La relazione (1) implica un valore infinito della velocità  $V$

nel punto F. Per disegnare un dreno cui corrisponda un intervallo di velocità di ingresso, si può utilizzare, seguendo Pavlovsky (1937), la corrispondente linea di corrente  $\psi_{cr}$  all'estremo inferiore del sistema, cosicché alle (1) si aggiunge

$$\psi_{cr}/q = K/V_{cr} \quad (3)$$

La posizione del corrispondente punto di incidenza F' con il dreno (Figura 1b), è determinata dalle (1) e (3). Sia assegnato un livello di concentrazione costante  $C_1$  lungo la linea equipotenziale MN, sulla quale è presente un carico costante  $H$ ; il corrispondente potenziale vale  $\phi = -KH$ . Si consideri il trasporto bidimensionale non stazionario di un soluto inerte attraverso il dominio di moto con contorno superiore a forma parabolica MNAF'. Senza perdere in generalità, si può assumere che il dominio sia inizialmente libero da soluto. In tali ipotesi, il campo di concentrazione,  $C(x, y, t)$ , è governato dalla equazione convettivo-dispersiva bidimensionale

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(DVC) - VVC \quad (4)$$

con le condizioni iniziali

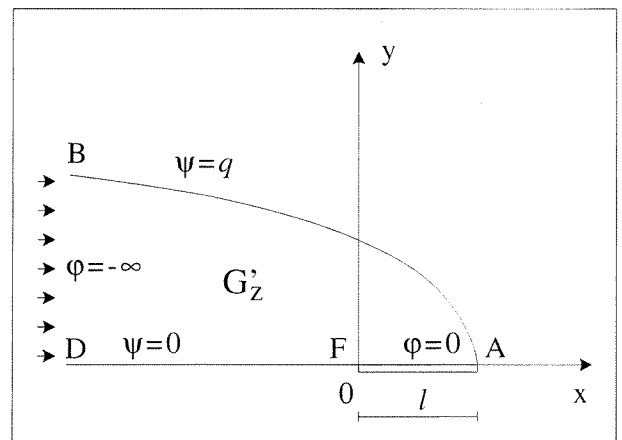


Figura 1a - Dominio di calcolo originale

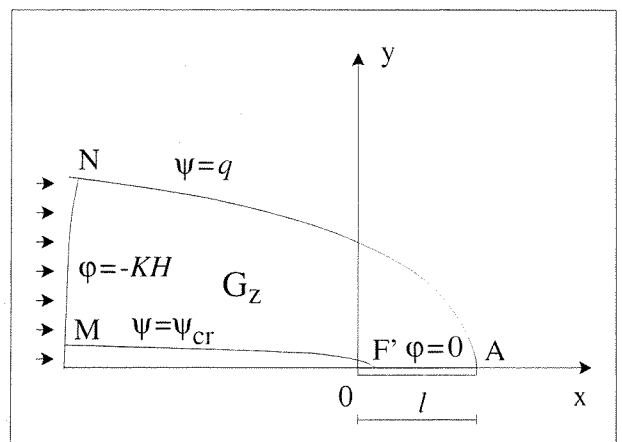


Figura 1b - Dominio di calcolo modificato

$$C(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \text{MNAF} \quad (5)$$

ed al contorno

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \text{F'M, AN} \quad (6)$$

$$C(x, y, t) = C_I, \quad (x, y) \in \text{MN} \quad (7)$$

$$C(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \text{AF} \quad (8)$$

dove  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)^T$ ,  $D$  è il tensore di dispersione idrodinamica,  $V$  il vettore velocità,  $n(x, y)$  il versore normale esterno ai contorni F'M e AN. La condizione (8) implica che il dreno abbia sufficiente capacità per assorbire istantaneamente tutto il soluto in arrivo. In realtà, una impostazione non semplificata del problema richiederebbe, come già evidenziato, la soluzione simultanea delle equazioni del trasporto nel dominio poroso ed entro il dreno, con l'imposizione di condizioni di continuità del flusso sul contorno AF'. Data la complessità di questo approccio, l'equazione (8) deve quindi essere vista come una approssimazione che consente la derivazione di una soluzione analitica.

### 3. STIME ANALITICHE

Poichè i domini BAFD ( $G'_1$ ) e NAF'M ( $G_2$ ) corrispondono, nel piano del potenziale complesso  $w = \varphi + i\psi$ , rispettivamente alla semi-striscia  $G'_w$  di larghezza  $q$  ed al dominio rettangolare  $G_w$ , di lunghezza  $KH$  e di larghezza  $q - \psi_{cr}$ , corrispondentemente (Figura 1c), il problema di valori al contorno (4)-(8) può essere riscritto come (Bear, 1972)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = V^2(\varphi, \psi) \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( D_L \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( D_T \frac{\partial C}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right] \quad (9)$$

$$C(\varphi, \psi, 0) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_w \quad (10)$$

$$\frac{\partial C(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi} = 0, \quad \psi = Kq/V_{cr}, \quad \psi = q \quad (11)$$

$$C(\varphi, \psi, t) = C_I, \quad \varphi = -KH \quad (12)$$

$$C(\varphi, \psi, t) = 0, \quad \varphi = 0 \quad (13)$$

dove  $D_L$  e  $D_T$  sono i coefficienti di dispersione idrodinamica longitudinale e trasversale; trascurando la diffusione molecolare, per essi si assume la forma

$$D_L = \lambda_L V(\varphi, \psi), \quad D_T = \lambda_T V(\varphi, \psi) \quad (14)$$

dove  $\lambda_L$  e  $\lambda_T$  sono i coefficienti di dispersività, assunti costanti. Per fornire una stima maggiorante della soluzione del problema (9)-(13), seguendo l'impostazione di Tartakovsky (1994), si considera il seguente problema di valori al contorno

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} = V^{*2} \left[ \lambda_L V^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial \varphi^2} + \lambda_T V^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial \psi^2} - \frac{\partial C^*}{\partial \varphi} \right] \quad (15)$$

$$C^*(\varphi, \psi, 0) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_w \quad (16)$$

$$\frac{\partial C^*(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi} = 0; \quad \psi = Kq/V_{cr}, \quad \psi = q \quad (17)$$

$$C^*(\varphi, \psi, t) = C_I, \quad \varphi = -KH \quad (18)$$

$$C^*(\varphi, \psi, t) = 0, \quad \varphi = 0 \quad (19)$$

dove  $V^*$  è una velocità che può essere costante sull'intero dominio, oppure una funzione della sola  $\varphi$ . Affinchè la soluzione  $C^*(\varphi, \psi, t)$  sia una stima per eccesso della reale soluzione del problema (9)-(13), ovvero

$$C^*(\varphi, \psi, t) \geq C(\varphi, \psi, t), \quad (\varphi, \psi) \in G_w, \quad t > 0, \quad (20)$$

debbono essere soddisfatte le seguenti condizioni necessarie e sufficienti (Tartakovsky, 1994)

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi} \leq 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_w, \quad t > 0 \quad (21)$$

$$V^* \geq V(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_w \quad (22)$$

$$\frac{V(\varphi, \psi)}{V^*} + \lambda_L \frac{\partial V(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \geq 1, \quad (\varphi, \psi) \in G_w \quad (23)$$

La relazione (21) è automaticamente soddisfatta poichè il valore della concentrazione diminuisce allorchè  $\varphi$  varia da  $-KH$  a zero. La simmetria del problema di valori al contorno (15)-(19) rispetto alla variabile  $\psi$  suggerisce che la soluzione del problema dipende da  $\psi$  solo come parametro e che, dunque,  $\partial C^*/\partial \psi = 0$  nell'intero dominio  $G_w$ . Questa circostanza, unita alle condizioni (21), (22) ed alla (2), consentono di scegliere il valore della costante  $V^*$  come

$$V^* = V_{\psi}^* = \max_{-KH \leq \varphi \leq 0} V(\varphi, \psi = \text{cost.}) = V(0, \psi = \text{cost.}) \quad (24)$$

In tal caso, il problema matematico (15)-(19) ha la seguente

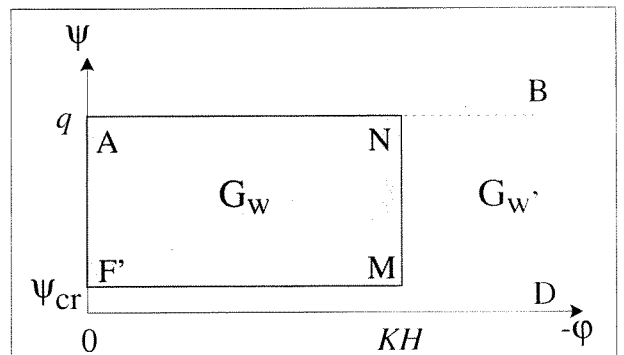


Figura 1c - Dominio di calcolo nel piano complesso



soluzione analitica (si veda l'Appendice)

$$\frac{C^*(\varphi, \psi, t)}{C_1} = \exp[\alpha(KH + \varphi)] \cdot \left[ -\frac{\sinh(\alpha\varphi)}{\sinh(\alpha KH)} + \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{V_{\psi}^* t}{4\lambda_L}\right) S(\varphi, \psi, t) \right] \quad (25)$$

dove  $\alpha$  è dato dalla (A12) e

$$S(\varphi, \psi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} j \sin\left(\frac{\pi j \varphi}{KH}\right)}{j^2 + \left(\frac{\alpha KH}{\pi}\right)^2} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\pi}{\alpha KH}\right)^2 j^2 \frac{V_{\psi}^* t}{4\lambda_L}\right] \quad (26)$$

La soluzione stazionaria si ottiene per  $S(\varphi, \psi, t) = 0$ . L'espressione (25) è una stima maggiorante del campo di concentrazione effettivo, giuste le (21)-(23). Una formulazione della relazione (24) che sicuramente soddisfa la condizione (22) è

$$V_{\psi}^* = qK / \psi \quad (27)$$

giusta la (2). Sostituendo la (27) e la (A12) nelle (25)-(26) si ricava l'espressione relativa alla stima della concentrazione. Infine, la relazione (23), tramite la (2) e la (27), si trasforma nella

$$\frac{\psi}{(\varphi^2 + \psi^2)^{1/2}} - \frac{\lambda_L K q \varphi}{(\varphi^2 + \psi^2)^{1/2}} \geq 1, \quad (\varphi, \psi) \in G_{**} \quad (28)$$

Per  $\varphi = 0$ , la (28) è verificata con il segno di eguaglianza; altrimenti, essa costituisce un vincolo che i parametri del problema devono soddisfare. Una stima del flusso totale di soluto al dreno,  $Q_c^*$ , può essere calcolata, in base alla (19) ed in accordo con la legge di Fick, come

$$Q_c^*(t) = - \int_{\psi_{cr}}^q D_L^* \frac{\partial C^*(\varphi=0, \psi, t)}{\partial \varphi} d\psi \quad (29)$$

Derivando la (25) e ricordando la (A12), la (27) e la prima delle (14), si ricava

$$Q_c^*(t) = C_1 \int_{\psi_{cr}}^q \left[ \exp\left(\frac{\psi H}{2\lambda_L q}\right) / \sinh\left(\frac{\psi H}{2\lambda_L q}\right) + \frac{2\lambda_L q}{\psi H} \exp\left(\frac{\psi H}{4\lambda_L q} - \frac{Kq t}{4\lambda_L \psi}\right) S_1(\psi, t) \right] d\psi \quad (30)$$

ove

$$S_1(\psi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j + \left(\frac{\psi H}{2\pi j \lambda_L q}\right)^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 j^2 \lambda_L K q^3}{H^2 \psi^3} t\right) \quad (31)$$

Il primo termine all'interno della (30) rappresenta il flusso di inquinante in regime stazionario ( $t \rightarrow \infty$ ), mentre il secondo termine rappresenta il contributo del transitorio. Il flusso a regime è derivabile analiticamente come (Gradshteyn e Ryzik, 1994, eq. 2.149.1)

$$\frac{Q_c^*(t \rightarrow \infty)}{C_1 q} = 1 - \psi_{cr} + 2 \frac{\lambda}{H} \ln \left[ \frac{\exp\left(\frac{\psi_{cr} H}{2\lambda_L q}\right)}{\exp\left(\frac{H}{2\lambda_L}\right)} \sqrt{\frac{\exp\left(\frac{H}{\lambda_L}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\psi_{cr} H}{\lambda_L q}\right) - 1}} \right] \quad (32)$$

mentre il secondo termine della (30) deve essere valutato numericamente.

#### 4. RISULTATI E DISCUSSIONE

I risultati possono essere più agevolmente discussi introducendo le grandezze adimensionali

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{q}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{q}; \quad \bar{H} = \frac{H}{2l}; \quad \bar{\lambda}_L = \frac{\lambda_L}{2l}; \quad (33)$$

$$\bar{i} = \frac{tK}{2l}; \quad \bar{C} = \frac{C^*}{C_1}; \quad \bar{Q}_c = \frac{Q_c^*}{C_1 q}$$

Ricordando l'ultima delle (1), le espressioni corrispondenti a (25)-(26), (28), (30)-(32) dipendono solo dalle variabili introdotte in (33). Per semplicità nel seguito si omette il soprassegno con l'avvertenza che si tratta di grandezze adimensionali. In particolare la limitazione (23) può essere espressa come

$$\frac{\bar{\psi}}{(\bar{\varphi}^2 + \bar{\psi}^2)^{1/2}} - \bar{\lambda}_L \frac{\bar{\varphi}}{(\bar{\varphi}^2 + \bar{\psi}^2)^{1/2}} \geq 1, \quad \bar{\varphi} \in [-\bar{H}, 0], \quad \bar{\psi} \in [0, 1] \quad (34)$$

Si noti come essa implichi una dispersività non inferiore ad una aliquota del carico, in dipendenza dal punto del dominio considerato; si può rilevare come tale condizione risulti più gravosa al crescere del valore di  $\bar{\psi}$  (ovvero in prossimità della superficie libera) ed al diminuire di quello di  $\bar{\varphi}$  (ovvero in prossimità della condizione al contorno di monte). Nel punto centrale del dominio, ovvero per  $\bar{\psi}=1/2$ ,  $\bar{\varphi}=-\bar{H}/2$ , la (34) si riduce a

$$\bar{\lambda}_L \geq \frac{(1 + \bar{H}^2)^{1/2} - (1 - \bar{H}^2)}{4\bar{H}} \quad (35)$$



che comporta, per  $H=1$  (ovvero un carico assegnato a monte pari alla metà della lunghezza del dreno),  $\lambda_L \geq 0.20$ , ovvero una dispersività longitudinale non inferiore a 0.4 volte la lunghezza del dreno. Per assegnato  $\lambda_L \geq 0.50$ , deve risultare  $H \leq 1.61$ .

Nella Figura 2 si riporta l'andamento della concentrazione in funzione della variabile  $\varphi$  lungo la linea di corrente  $\psi=0.50$  e per diversi valori del tempo  $t$ , ed i parametri  $H=0.50$  e  $\lambda_L = 0.30$ ; tali valori rispettano la (35) in ogni punto del dominio. Nella Figura 3 è rappresentato l'analogo grafico lungo la linea di corrente  $\psi=1$ . I profili di concentrazione sono molto ripidi nel tratto iniziale del transitorio, per raggiungere un profilo stazionario per valori del tempo adimensionale dell'ordine di 0.1-0.5. Il regime stazionario è raggiunto più rapidamente in corrispondenza del pelo libero, caratterizzato da  $\psi=1$ , che all'interno del dominio. Nelle Figure 4 e 5 si esamina l'andamento temporale della concentrazione nel punto del domino caratterizzato da  $\varphi=-0.25$  e  $\psi=0.50$ , in funzione rispettivamente della dispersività longitudinale e del carico di monte. La Figura 4 mostra come, a parità di altre condizioni, all'aumentare della dispersività longitudinale la concentrazione cresca, ed il valore asintotico sia raggiunto più rapidamente. Analogamente

effettuato ha la diminuzione del valore del carico imposto a monte (Figura 5). Nella Figura 6 è illustrato l'andamento del flusso a regime al variare di  $\lambda_L$  per  $H=0.50$ ; al crescere della dispersività, il valore del flusso aumenta rapidamente. Di converso, esso diminuisce al crescere di  $H$ , per  $\lambda_L$  fissato (Figura 7).

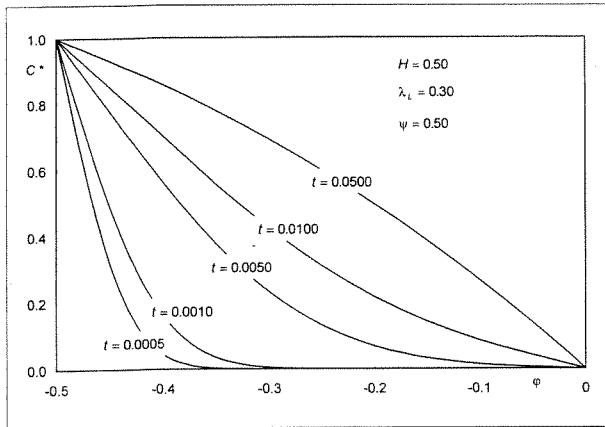


Figura 2 - Concentrazione in funzione di  $\varphi$  per  $\psi=1/2$ ,  $H=0.50$ ,  $\lambda_L=0.30$ , e diversi valori di  $t$

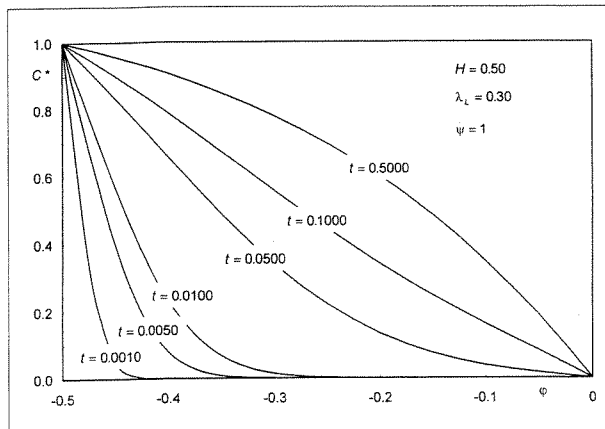


Figura 3 - Concentrazione in funzione di  $\varphi$  per  $\psi=1$ ,  $H=0.50$ ,  $\lambda_L=0.30$ , e diversi valori di  $t$

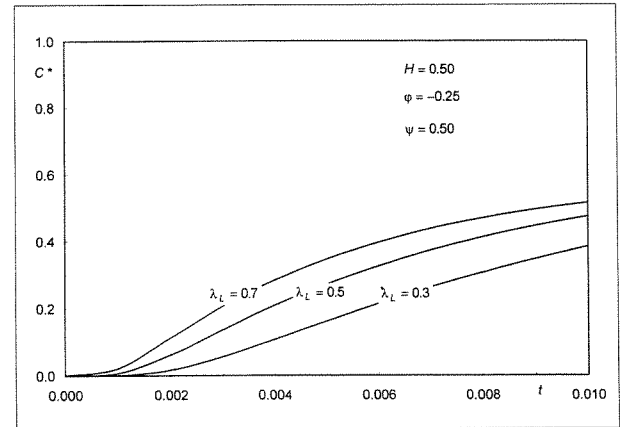


Figura 4 - Concentrazione in funzione di  $t$  per  $H=0.50$ ,  $\varphi=-0.25$ ,  $\psi=0.50$ , e diversi valori di  $\lambda_L$

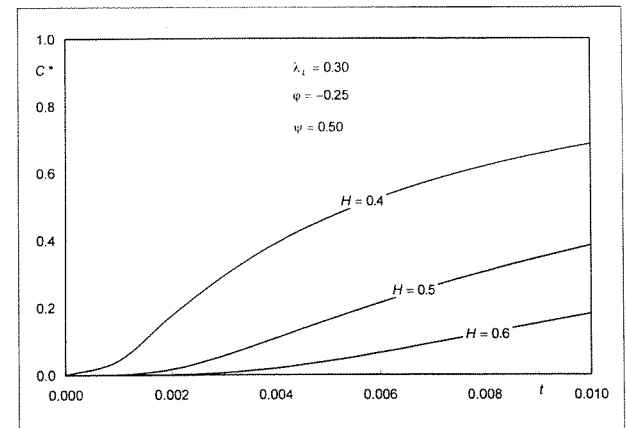


Figura 5 - Concentrazione in funzione di  $t$  per  $\lambda_L=0.30$ ,  $\varphi=-0.25$ ,  $\psi=0.50$ , e diversi valori di  $H$

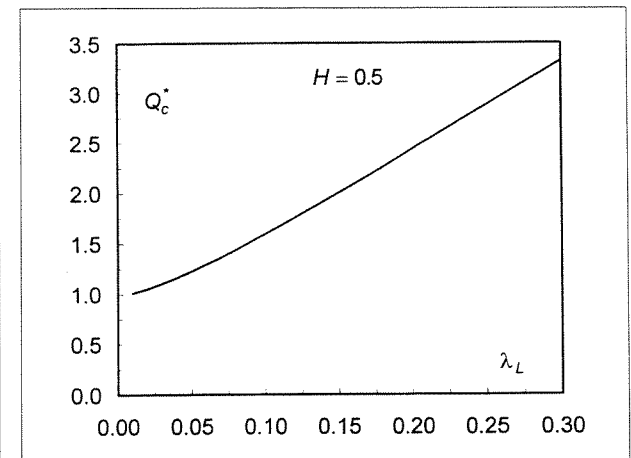


Figura 6 - Flusso a regime al variare di  $\lambda_L$  per  $H=0.50$

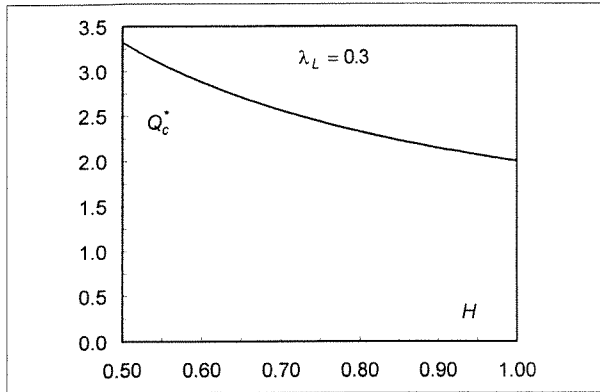


Figura 7 - Flusso a regime al variare di  $H$  per  $\lambda_L=0.30$

## 5. CONCLUSIONI

Nella presente nota viene esaminato il problema del trasporto bidimensionale di soluto in regime transitorio verso un dreno orizzontale, determinando una soluzione approssimata del campo di concentrazione che fornisce una stima per eccesso. Il problema costituisce una prima applicazione dei criteri introdotti da Tartakovsky (1994) per la soluzione approssimata di equazioni differenziali non-lineari, quali quelle derivanti da problemi di dispersione idrodinamica in domini a velocità variabile: sono stati altresì ricavati le condizioni di applicabilità della soluzione, sotto forma di vincoli sui parametri fisici del problema. Prescelta come lunghezza di riferimento quella del dreno, le equazioni in forma adimensionale evidenziano come la stima della concentrazione sia funzione decrescente del potenziale e del carico di monte, e funzione crescente della funzione di corrente e della dispersività longitudinale. Si è infine valutato il flusso al dreno, analizzando in particolare la sua espressione a regime: quest'ultima risulta funzione crescente della dispersività e funzione decrescente del carico di monte. I risultati ottenuti sono applicabili alla valutazione di concentrazione e flusso di soluti inquinanti in opere di ritenuta in materiale sciolto in presenza di dreni, e presentano rilevanza concreta ai fini del controllo della qualità delle acque nei sistemi di drenaggio. Le successive indagini riguarderanno la valutazione numerica del flusso in regime transitorio; inoltre, verrà approfondito il grado di approssimazione introdotto dalla stima del campo di concentrazione nei confronti della soluzione esatta del problema, mediante l'esecuzione di apposite simulazioni numeriche. La metodologia proposta è estendibile ad altre situazioni e geometrie di interesse applicativo.

## APPENDICE: SOLUZIONE DEL PROBLEMA (15)-(19)

Si introduca la funzione

$$u(\varphi, t) = C^*(\varphi, t) \exp\left(-\frac{\varphi}{2\lambda_L V_\psi^*}\right) \quad (A1)$$

Corrispondentemente, il problema di valori al contorno per l'equazione (15)

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} = V_\psi^{*3} \frac{\partial^2 C^*}{\partial \varphi^2} - V_\psi^{*2} \frac{\partial C^*}{\partial \varphi} \quad (A2)$$

si riduce alla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - bu \quad (A3)$$

dove  $a = \lambda_L V_\psi^{*3}$ ,  $b = V_\psi^*/(4\lambda_L)$ , con le seguenti condizioni iniziali ed al contorno

$$u(\varphi, 0) = 0 \quad (A4)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (A5)$$

$$u(-KH, t) = u_1 = C_1 \exp\left(\frac{KH}{2\lambda_L V_\psi^*}\right) \quad (A6)$$

Operando la trasformata di Laplace

$$U(\varphi, s) = \int_0^\infty u(\varphi, t) \exp(-st) dt \quad (A7)$$

il problema matematico espresso dalle (A3)-(A6) si trasforma in

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - (b+s)U = 0 \quad (A8)$$

$$U(0) = 0, \quad U(-KH) = s^{-1}u_1 \quad (A9)$$

la cui soluzione è

$$\frac{U(\varphi, s)}{u_1} = -\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{b+s}{a}}\varphi\right)}{s \sinh\left(\sqrt{\frac{b+s}{a}}KH\right)} \quad (A10)$$

La antitrasformata della espressione (A10) è pari a

$$\frac{u(\varphi, t)}{u_1} = -\frac{\sinh(\alpha\varphi)}{\sinh(\alpha KH)} + \frac{2}{\pi} \exp(-bt) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} j \sin\left(\frac{\pi j \varphi}{KH}\right)}{j^2 + \left(\frac{\alpha KH}{\pi}\right)^2} \exp\left[-\left(\frac{\pi}{\alpha KH}\right)^2 j^2 bt\right] \quad (A11)$$

dove

$$\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\lambda_L V_\psi^*} \quad (A12)$$



Infine, moltiplicando (A11) per  $\exp[\varphi / (2\lambda_L V_\psi^*)]$  e utilizzando la (A6) si ottiene la espressione (25).

### RINGRAZIAMENTI

Parte del presente lavoro è stata svolta nell'ambito della

permanenza del primo autore come Fulbright Scholar presso il Department of Hydrology and Water Resources, University of Arizona, Tucson, USA.

Gli Autori dichiarano che il loro contributo alla elaborazione e stesura della presente memoria è stato paritetico.

### BIBLIOGRAFIA

- Bear, J., *Dynamics of fluids in porous media*, New York, Elsevier, 1972, 761.
- Bear, J., Zaslowski, D., Irmay, S., *Physical principles of water percolation and seepage*, UNESCO, Paris, 1968.
- Fio, J. L., Deverel, S. J., *Ground water flow and solute movement to drain laterals, Western San Joaquin Valley, California. II Quantitative hydrologic assessment*, USGS Open-File Report 90-137, U.S. Geological Survey, Washington, D.C., 1990.
- Garcia L. A., Manguerra, H. B., e Gates T. K., «Irrigation-drainage design and management model: development», *J. Irrig. and Drain. Engrg.*, ASCE, vol. 121, n. 1, 1995, 71-82.
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., *Tables of Integrals, Series, and Products*, edito da A. Jeffrey, Boston, Academic Press, 1994.
- Grismer M. E., «Subsurface drainage system design and drain water quality», *J. Irrig. and Drain. Engrg.*, ASCE, vol. 119, n. 3, 1993, 537-543.
- Jury W. A., «Solute travel-time estimates for tile-drained fields: 1. Theory», *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, vol. 39, 1975, 1020-1024.
- Miyamoto S., Warrick A. W., «Salt displacement into drain tiles under ponded leaching», *Water Resour. Res.*, vol. 10, 1974, 275-278.
- Muskat, M., *The flow of homogeneous fluids through porous media*, 2nd ed., New York, Mc-Graw-Hill, 1946, 763.
- Pavlovsky N. N., «Flow of Water to horizontal filters», *Transactions of the Scientific Research Institute of Hydrotechnics, Leningrad, USSR*, vol. 21, 1937, 5-25.
- Polubarinova-Kochina, P. Y. A., *Theory of groundwater movement*, Princeton, Princeton University Press, 1962, 613.
- Tartakovsky D. M., «Limiting analytical solutions for complex saturated and unsaturated transport problems», *Transport in Porous Media*, vol. 17, 1994, 257-269.
- Tartakovsky D. M., Di Federico V., «An analytical solution for the 2-D problem of contaminant transport in a variable velocity flow field», *Transport in Porous Media*, vol. 27, 1997, 85-97.